

# Concursul EUGEN IONESCU – ediția a VI-a – 05.III.2011

## CLASA A V-A

1. Determinați numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  știind că  $8(\overline{abc} - 1) = \overline{a000}$ .

*Niculae Grigorescu, Slatina*

**Soluție.** Relația dată se scrie sub forma  $8(\overline{abc} - 1) = 1000a$  de unde  $\overline{abc} = 125a + 1$ . **(2p)**

Atunci  $100a + \overline{bc} = 125a + 1$ , de unde  $\overline{bc} = 25a + 1$  **(2p)**

Rezultă  $25a + 1 \leq 99$ , de unde  $a \leq 3$ , adică  $a \in \{1, 2, 3\}$ . Se obțin soluțiile 126, 251, 376. **(3p)**

2. Numărul natural  $A$  împărțit la 48 dă restul 41 și împărțit la 50 dă restul 9. Aflați numărul  $A$  știind că suma celor două cături este 81.

*Ion Neață, Slatina*

**Soluție.** Din teorema împărțirii cu rest rezultă că  $A = 48c + 41$  și  $A = 50d + 9$  **(2p)**. Întrucât  $c + d = 81$ , rezultă  $d = 81 - c$  **(1p)**, deci are loc relația  $48c + 1 = 50(81 - c) + 9$  **(2p)** Se obține  $c = 41$  și  $A = 2009$  **(2p)**

3. a) Arătați că suma primelor 6 cuburi perfecte nenule este un pătrat perfect.

b) Arătați că pentru orice  $k \in \mathbb{N}$ , numărul  $21^{3k+2}$  se poate scrie ca suma a 6 cuburi perfecte nenule.

*Daniel Cojocaru, Slatina*

**Soluție.** a)  $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 = 441 = 21^2$  **(2p)**

b)  $21^{3k+2} = 21^{3k} \cdot 21^2 = (21^k)^3 \cdot (1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3)$  **(2p)**

Rezultă  $21^{3k+2} = (21^k)^3 + (2 \cdot 21^k)^3 + (3 \cdot 21^k)^3 + (4 \cdot 21^k)^3 + (5 \cdot 21^k)^3 + (6 \cdot 21^k)^3$  **(3p)**

4. Numerele  $\overline{abc}$  și  $\overline{xyz}$  sunt scrise numai cu cifrele 1 și 2 și dau același rest la împărțirea cu 8. Arătați că  $\overline{abc} = \overline{xyz}$ .

*Marius Perianu, Slatina*

**Soluție.** Vom presupune că  $\overline{abc} \geq \overline{xyz}$ . Conform teoremei împărțirii cu rest, există  $m, n \in \mathbb{N}$  și  $r \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}$  astfel încât  $\overline{abc} = 8m + r$  și  $\overline{xyz} = 8n + r$  **(2p)**

Rezultă că  $\overline{abc} - \overline{xyz} = 8(m - n)$ , deci  $\overline{abc} - \overline{xyz}$  este număr par. Atunci ultima cifră a diferenței  $\overline{abc} - \overline{xyz}$  este pară. Cum  $c$  și  $z$  pot fi doar 1 și 2, rezultă că  $c = z$  **(2p)**

Atunci  $\overline{abc} - \overline{xyz} = \overline{abc} - \overline{xy}c = 10(\overline{ab} - \overline{xy})$ , de unde rezultă că  $10(\overline{ab} - \overline{xy}) = 8(m - n)$ , deci  $5(\overline{ab} - \overline{xy}) = 4(m - n)$ . Ca urmare, și  $\overline{ab} - \overline{xy}$  este număr par, și, folosind același raționament ca mai sus, rezultă că  $b = y$  **(2p)**

Obținem  $\overline{ab} - \overline{xy} = \overline{ab} - \overline{xb} = 10(a - x)$ , de unde rezultă că  $50(a - x) = 4(m - n)$ , deci  $25(a - x) = 2(m - n)$ . De aici  $a - x$  este număr par, și, cum  $a, x \in \{1, 2\}$ , rezultă  $a = x$  **(1p)**

În concluzie,  $\overline{abc} = \overline{xyz}$ .

# Concursul EUGEN IONESCU – ediția a VI-a – 05.III.2011

## CLASA A VI-A

1. Determinați numerele de forma  $\overline{ab}$  știind că  $\overline{ab} + \overline{ba} + a + b$  este cub perfect.

*Nicolae Ivășchescu, Craiova (S.G.M. 10/2010)*

**Soluție.** Folosind descompunerea zecimală, rezultă  $\overline{ab} + \overline{ba} + a + b = 12(a + b)$  (**2p**) deci cubul perfect căutat este al unui număr par (**1p**)

Cum  $a + b \leq 18$ , rezultă că  $12(a + b) \leq 216$ . Cuburile perfecte pare mai mici sau egale cu 216 sunt  $2^3 = 8$ ,  $4^3 = 64$  și  $6^3 = 216$ . Convine doar 216, pentru care se obține  $\overline{ab} = 99$  (**4p**)

2. Pe laturile ( $OX$  și ( $OY$  ale unghiului  $XOY$  se consideră punctele  $A$ , respectiv  $B$ , astfel încât  $(OA) \equiv (OB)$ . Perpendiculara în  $A$  pe  $OX$  intersectează pe  $OY$  în  $D$ , iar perpendiculara în  $B$  pe  $OY$  intersectează pe  $OX$  în  $C$ . Se notează cu  $M$  punctul de intersecție al dreptelor  $AD$  și  $BC$ .

a) Demonstrați că  $[AC] \equiv [BD]$ .

b) Arătați că  $MA + MC = MB + MD$ .

c) Demonstrați că ( $OM$  este bisectoarea unghiului  $XOY$ ).

*Dorin Popa, Slatina*

**Soluție.** a) Din  $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$  (C.U.) rezultă  $[OC] \equiv [OD]$  (**2p**) deci  $AC = OC - OA = OD - OB = BD$  (**1p**)

b) Avem  $\triangle AMC \equiv \triangle BMD$  (C.U.), de unde obținem  $[AM] \equiv [BM]$  și  $[CM] \equiv [DM]$ . Rezultă  $MA + MC = MB + MD$  (**2p**)

c) Deoarece  $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$  (C.C.) rezultă  $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BOM}$ , deci ( $OM$  este bisectoarea unghiului  $XOY$ ) (**2p**)

3. Determinați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma  $\overline{aabbcc}$  divizibil cu 97.

*Costel Anghel, Slatina*

**Soluție.** Fie  $N = \overline{aabbcc} = 110\,000a + 1100b + 11c$ .

Deoarece restul împărțirii lui 110 000 la 97 este 2 și restul împărțirii lui 1100 la 97 este 33, rezultă că  $97 \mid 2a + 33b + 11c$  (**2p**)

Atunci  $97 \mid (97a + 2a + 33b + 11c)$ , deci  $97 \mid 11(9a + 3b + c)$ , adică  $97 \mid 9a + 3b + c$  (**2p**)

Cum  $9a + 3b + c \leq 9 \cdot 9 + 3 \cdot 9 + 9 = 117$ , rezultă că  $9a + 3b + c = 97$  (**1p**)

Cum  $3b + c \leq 40$ , rezultă  $9a \geq 57$ , deci cea mai mică valoare a lui  $a$  poate fi 7. Atunci  $3b + c = 34$ , de unde  $b = 9$ ,  $c = 7$ , cu soluția  $N_{\min} = 779977$  (**1p**)

Cea mai mare valoare a lui  $a$  poate fi 9, pentru care obținem  $3b + c = 16$ . Cel mai mare număr de forma dată se obține pentru  $b = 5$  și  $c = 1$ , cu soluția  $N_{\max} = 995511$  (**1p**)

4. a) Fie mulțimea  $A = \left\{ \frac{2010}{1}, \frac{2011}{2}, \frac{2012}{3}, \frac{2013}{4}, \dots \right\}$ . Determinați cardinalul mulțimii  $A \cap \mathbb{N}$ .

b) Se dau mulțimile  $B = \left\{ \frac{2011}{1}, \frac{2012}{2}, \frac{2013}{3}, \frac{2014}{4}, \dots \right\}$  și  $C = \left\{ \frac{2012}{1}, \frac{2013}{2}, \frac{2014}{3}, \frac{2015}{4}, \dots \right\}$ .  
 Demonstrați că mulțimea  $B \cap C$  conține un singur număr natural.

*Dorin Popa, Slatina*

**Soluție.** a) Observăm că  $A$  conține numere de forma  $\frac{2009+n}{n}$ , unde  $n \in \mathbb{N}^*$  **(1p)**

Dacă  $\frac{2009+n}{n} \in \mathbb{N}$ , atunci  $n \mid 2009+n$ , deci  $n \mid 2009$ . Întrucât  $2009 = 7^2 \cdot 41$ , rezultă că 2009 are 6 divizori, deci  $n$  poate lua 6 valori. În concluzie,  $\text{card}(A \cap \mathbb{N}) = 6$  **(2p)**

b) Dacă  $x \in B \cap C$ , atunci există numerele  $p, q \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x = \frac{2010+p}{p} = \frac{2011+q}{q}$  **(1p)**

Rezultă  $\frac{2010}{p} + 1 = \frac{2011}{q} + 1$ , de unde  $2010q = 2011p$ . Ca urmare,  $2011 \mid q$ , deci  $q = 2011k$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$  **(2p)**

Atunci  $x = \frac{2011}{q} + 1 = \frac{1}{k} + 1$ , unde  $k \in \mathbb{N}^*$ . Un singur număr de această formă este natural, și anume 2 (care se obține pentru  $k = 1$ ) **(1p)**

**Concursul EUGEN IONESCU – ediția a VI-a – 05.III.2011**  
**CLASA A VII-A**

1. a) Arătați că  $\frac{1}{1+2+\dots+n} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ , pentru orice număr natural  $n \geq 1$ .  
 b) Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+x} = \frac{4020}{2011}.$$

*Mariana Fleancu, Cîmpulung (S.G.M. 11/2010)*

**Soluție.** a) Avem  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$  **(1p)**

și  $\frac{1}{1+2+\dots+n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \cdot \frac{(n+1)-n}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$  **(2p)**

b) Folosind punctul anterior, rezultă

$$\begin{aligned} \frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+x} &= 2\left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\right] = \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x}{x+1} \quad \textbf{(3p)} \end{aligned}$$

Obținem  $\frac{2x}{x+1} = \frac{4020}{2011}$ , cu soluția  $x = 2010$  **(1p)**

2. În triunghiul  $ABC$  se consideră mediana  $[BD]$ ,  $D \in (AC)$  și punctul  $E \in (AB)$ . Se construiesc  $EF \parallel BD$ ,  $F \in (AC)$  și  $FG \parallel BC$ ,  $G \in (AB)$ . Demonstrați că:

- a)  $[AG] \equiv [GE]$ .                      b)  $DG \parallel CE$ .

*Niculae Grigorescu, Slatina*

**Soluție.** a) Notând cu  $P$  mijlocul lui  $[AB]$ , rezultă că  $[PD]$  este linie mijlocie în  $\triangle ABC$  **(1p)**

Cum  $GF \parallel PD$ , cu teorema lui Thales rezultă că  $\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AP}$  **(1p)**

La fel, din  $EF \parallel BD$ , rezultă  $\frac{AF}{AD} = \frac{AE}{AB}$  **(1p)**

Ca urmare,  $\frac{AG}{AP} = \frac{AE}{AB}$ , deci  $\frac{AG}{AE} = \frac{AP}{AB} = \frac{1}{2}$ , de unde  $[AG] \equiv [GE]$  **(2p)**

b) Cum  $\frac{AG}{AE} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{2}$ , cu reciproca teoremei lui Thales în  $\triangle AEC$  rezultă  $GD \parallel CE$  **(2p)**

3. În triunghiul  $ABC$ , cu  $AB < AC$ , se construiește bisectoarea  $[AD]$ ,  $D \in (BC)$ . Paralelele prin  $D$  la  $AC$ , respectiv  $AB$ , intersectează pe  $[AB]$  în  $E$  și pe  $AC$  în  $F$ . Fie  $\{M\} = EF \cap BC$  și  $\{O\} = EF \cap AD$ . Demonstrați că  $\frac{OM}{OE} = \frac{BM}{BD} + \frac{CM}{CD}$ .

*Niculae Grigorescu, Slatina*

**Soluție.** Patrulaterul  $AEDF$  este romb, deoarece laturile opuse sunt paralele, iar diagonala  $[AD]$  este bisectoarea unghiului  $\widehat{EAF}$  **(2p)**

Întrucât  $AB < AC$ , rezultă că  $M$  se află pe dreapta  $BC$  astfel încât  $B$  este între  $M$  și  $C$ .

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul  $MOD$  cu transversala  $A - E - B$  rezultă  $\frac{AO}{AD} \cdot \frac{BD}{BM} \cdot \frac{EM}{EO} = 1$ , de unde  $\frac{EM}{EO} = 2 \cdot \frac{BM}{BD}$  **(2p)**

Aplicând teorema lui Menelaus în triunghiul  $MOD$  cu transversala  $A - F - C$  rezultă  $\frac{AO}{AD} \cdot \frac{CD}{CM} \cdot \frac{FM}{FO} = 1$ , de unde  $\frac{FM}{FO} = 2 \cdot \frac{CM}{CD}$  **(2p)**

Adunând relațiile **(1)** și **(2)** și ținând cont că  $OE = OF$ , rezultă

$$\frac{EM + FM}{OE} = 2 \left( \frac{BM}{BD} + \frac{CM}{CD} \right) \Rightarrow \frac{BM}{BD} + \frac{CM}{CD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{OM - OE + OF + OM}{OE} = \frac{OM}{OE} \quad \textbf{(1p)}$$

**4.** Determinați câte numere naturale nenule  $a \leq 500$  au proprietatea că șirul  $a, 2a, \dots, 72a$  conține exact 24 de multipli ai lui 72.

*Mihail Chiriac, Slatina*

**Soluție.** Numerele din șir sunt de forma  $ka$ , unde  $1 \leq k \leq 72$ .

Fie  $d = (a, 72)$ ; atunci  $a = dm$  și  $72 = dn$ , unde  $(m, n) = 1$  **(1p)**

Rezultă că în șir se află numerele  $dm, 2dm, 3dm, \dots, 72dm$ , care se pot scrie și sub forma

$$72 \cdot \frac{m}{n}, 72 \cdot \frac{2m}{n}, 72 \cdot \frac{3m}{n}, \dots, 72 \cdot \frac{72m}{n} \quad \textbf{(2p)}$$

Întrucât  $(m, n) = 1$ , rezultă că numărul de elemente ale șirului divizibile cu 72 este egal cu numărul de numere naturale aflate în șirul

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{72}{n} = d,$$

adică cu  $d$  **(1p)**.

Ca urmare, șirul  $a, 2a, \dots, 72a$  conține exact 24 de multipli ai lui 72 dacă și numai dacă  $(72, a) = 24$ , deci  $a = 24m$ , unde  $(m, 3) = 1$  **(2p)**

Condiția  $a \leq 500$  impune  $1 \leq m \leq 20$  și, cum  $(m, 3) = 1$ , rezultă că  $m$  (ca și  $a$ ) poate lua 14 valori. **(1p)**

# Concursul EUGEN IONESCU – ediția a VI-a – 05.III.2011

## CLASA A VIII-A

**SUBIECTUL I.** Pe foaia de concurs scrieți numai rezultatele **(30p)**.

- (5p) 1. Rezultatul calculului  $105 - 105 : 5$  este ... .  
(5p) 2. Cel mai mare număr natural mai mic decât  $\sqrt{23}$  este ... .  
(5p) 3. Soluția din mulțimea  $\mathbb{N}$  a ecuației  $3x^2 - 10 = 2$  este ... .  
(5p) 4. Dacă  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 < x < 1\}$ , atunci  $A \cap \mathbb{N} = \{\dots\}$  .  
(5p) 5. Lungimea medianei unui triunghi echilateral cu latura 6 cm este ... cm.  
(5p) 6. Lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 6 cm, 8 cm și  $10\sqrt{3}$  cm este de ... cm.

**SUBIECTUL al II-lea.** Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete **(30p)**.

- (5p) 1. Desenați pe foaia de concurs un paralelipiped dreptunghic și notați-l  $A'LEITARG$ .  
(5p) 2. Aflați media geometrică a numerelor  $3^{-1}$  și  $27^{-1}$ .  
(5p) 3. Scrieți sub formă de interval mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x - 1| < 8\}$ .  
4. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -x + 5$ .  
(5p) a) Reprezentați grafic funcția  $f$ .  
(5p) b) Aflați valoarea reală a numărului  $m$  pentru care punctul  $P(m^2, 4m + 9)$  aparține graficului funcției  $f$ .  
(5p) 5. Fie  $ABCD A'B'C'D'$  un cub cu diagonala  $7\sqrt{3}$  cm. Calculați perimetrul triunghiului  $A'BC'$ .

**SUBIECTUL al III-lea.** Pe foaia de concurs scrieți rezolvările complete **(30p)**

1. Se dă expresia  $E(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x + 2} \cdot \left(\frac{x+1}{x+3}\right)^2 : \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$ .  
(5p) a) Pentru ce valori ale lui  $x$  expresia este definită?  
(5p) b) Arătați că  $E(x) = \frac{x-2}{x+3}$ .  
(5p) c) Stabiliți dacă  $E(\sqrt{2}) + E(-\sqrt{2}) \in \mathbb{Z}$ .  
(5p) 2. Fie cubul  $ABCD A'B'C'D'$  cu muchia de 6 cm și  $M$  mijlocul muchiei  $[CC']$ .  
(5p) a) Determinați distanța de la  $M$  la  $BD$ .  
(5p) b) Calculați distanța de la  $C$  la planul  $(MBD)$ .  
(5p) c) Demonstrați că  $AC' \perp (A'BD)$ .

**SUBIECTUL al IV-lea.** Probleme de departajare **(20p)**

- (10p) 1. a) Fie  $a, b \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab} = 2010$ . Arătați că  $a$  și  $b$  sunt pătrate perfecte.

b) Determinați numerele naturale  $a, b$  pentru care  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab} = 2010$ .

*Marius Spoitu, Slatina*

- (10p) 2. Numărul natural  $N$  are 2011 cifre, dintre care 670 din mulțimea  $\{0, 3, 6, 9\}$ , 670 din mulțimea  $\{1, 4, 7\}$  și 671 din mulțimea  $\{2, 5, 8\}$ . Arătați că  $\sqrt{N}$  este irațional.

*Marius Perianu, Slatina*

**SUBIECTUL I.**      1. 84      2. 4      3. 2      4.  $\{0\}$       5.  $3\sqrt{3}$  cm      6. 20 cm.

**SUBIECTUL II.**      1. desen      2.  $m_g = \sqrt{3^{-1} \cdot 27^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9}$ .

3.  $|3x - 1| < 8 \Leftrightarrow -8 < 3x - 1 < 8$ . Se obține  $A = \left(-\frac{7}{3}, 3\right)$ .

4. a) grafic      b)  $P(m^2, 4m + 9) \in G_f \Rightarrow f(m^2) = 4m + 9 \Leftrightarrow -m^2 + 5 = 4m + 9$ . Rezultă  $(m + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow m = -2$ .

5. Notând cu  $a$  lungimea muchiei cubului, rezultă  $d = a\sqrt{3}$ , deci  $a = 7$  cm.

Triunghiul  $A'BC'$  este echilateral, de latură  $7\sqrt{2}$  cm. Perimetrul său este  $21\sqrt{2}$  cm.

### SUBIECTUL III.

**III. 1.** a) Observând că  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ ,  $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$  și  $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$ , se impun condițiile de existență  $x + 1 \neq 0$ ,  $x + 2 \neq 0$ ,  $x + 3 \neq 0$  și  $x - 3 \neq 0$ , de unde rezultă  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, -2, -1, 3\}$ .

b)  $E(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)} \cdot \frac{(x+1)^2}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x-3)} = \frac{x-2}{x+3}$ .

c)  $E(\sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{2}-8}{7}$  și  $E(-\sqrt{2}) = \frac{-5\sqrt{2}-8}{7}$ , deci  $E(\sqrt{2}) + E(-\sqrt{2}) = -\frac{16}{7} \notin \mathbb{Z}$ .

**III.2.** a) Cum  $MC \perp (ABC)$  și  $CO \perp BD$ , cu teorema celor trei perpendiculare obținem  $MO \perp BD$ , deci  $d(M, BD) = MO$ .

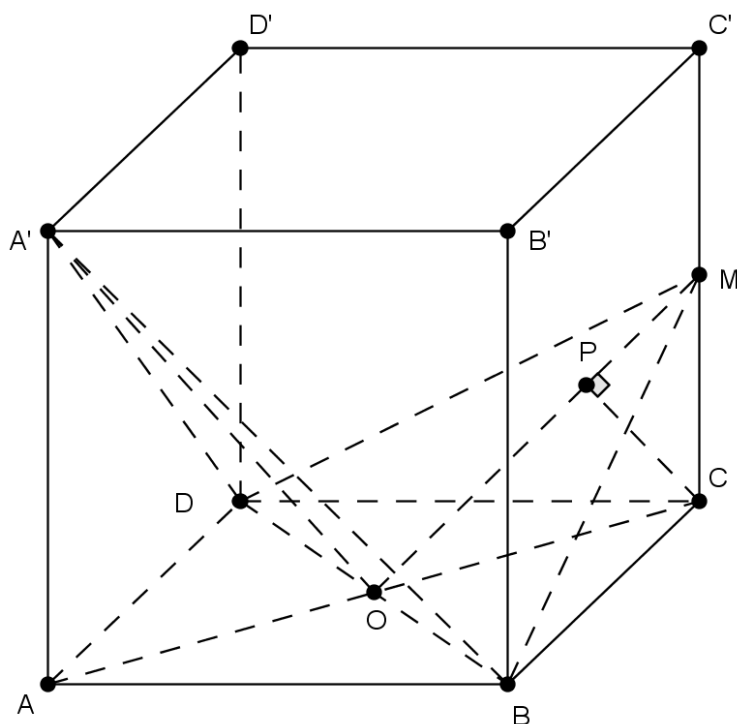
Cum  $CO = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2}$  cm, din triunghiul dreptunghic  $COM$  rezultă  $MO = 3\sqrt{3}$  cm.

b) Construim  $CP \perp OM$ . Din  $MO \perp BD$  și  $BD \perp OC$ , cu reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare, obținem  $CP \perp (MBD)$ , deci  $d(C, (MBD)) = CP$ .

Întrucât  $CP$  este înălțime în triunghiul dreptunghic  $COM$ , rezultă  $CP = \frac{CO \cdot CM}{OM} = \sqrt{6}$  cm, deci  $d(C, (MBD)) = \sqrt{6}$  cm.

c) Avem  $MO = 3\sqrt{3}$  cm,  $A'O = 3\sqrt{6}$  cm și  $A'M = 9$  cm, deci triunghiul  $A'OM$  este dreptunghic în  $O$  (reciproca teoremei lui Pitagora).

Atunci, din  $MO \perp OA'$  și  $MO \perp BD$ , deducem că  $MO \perp (A'BD)$ . Dar  $MO$  este linie mijlocie în triunghiul  $ACC'$ , deci  $MO \parallel AC'$ . Ca urmare,  $AC' \perp (A'BD)$ .



#### SUBIECTUL IV.

**IV.1.** a) Avem  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 2010 - \sqrt{ab}$  și, ridicând la pătrat rezultă că  $a + b + 2\sqrt{ab} = 2010^2 - 4020\sqrt{ab} + ab$ , de unde  $4022\sqrt{ab} = 2010^2 + ab - a - b$ , adică  $4022\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$ .

Atunci  $\sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$  și, cum  $ab \in \mathbb{N}$ , rezultă că  $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$  **(2p)**

Obținem  $\sqrt{a} + \sqrt{ab} = 2010 - \sqrt{b}$ , de unde  $a + ab + 2a\sqrt{b} = 2010^2 + b - 4020\sqrt{b}$ . De aici avem că  $(2a + 4020)\sqrt{b} \in \mathbb{N}$ , de unde  $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ . Rezultă  $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$  și cum  $a, b \in \mathbb{N}$ , rezultă  $\sqrt{a} \in \mathbb{N}$  și  $\sqrt{b} \in \mathbb{N}$ , adică  $a$  și  $b$  sunt pătrate perfecte **(3p)**

b) Adunând 1 în ambii membri rezultă  $(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{b} + 1) = 2011$ . Folosind punctul anterior, rezultă că  $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{N}$ , deci  $\sqrt{a} + 1$  și  $\sqrt{b} + 1$  sunt divizori ai lui 2011. Deoarece 2011 este număr prim, singurele soluții sunt  $a = 0, b = 2010^2$  și  $a = 2010^2, b = 0$ . **(2p)**

**IV.2.** Restul împărțirii unui număr la 3 este egal cu restul împărțirii sumei cifrelor sale la 3 **(1p)**

Pentru a afla suma cifrelor numărului  $N$  ținem cont de următoarele observații:

- suma cifrelor lui  $N$  aflate în mulțimea  $\{0, 3, 6, 9\}$  este de forma  $3k$  **(1p)**

- suma celor 670 de cifre ale lui  $N$  aflate în mulțimea  $\{1, 4, 7\}$  este de forma  $3p + 670$  și, cum  $670 = 3 \cdot 223 + 1$ , rezultă că suma acestor cifre este de forma  $3p' + 1$  **(2p)**

- suma celor 671 de cifre ale lui  $N$  aflate în mulțimea  $\{2, 5, 8\}$  este de forma  $3q + 2 \cdot 671$  și, cum  $2 \cdot 671 = 3 \cdot 447 + 1$ , rezultă că suma acestor cifre este de forma  $3q' + 1$  **(2p)**

În concluzie, suma cifrelor lui  $N$  este un număr de forma  $3r + 2$ , unde  $r \in \mathbb{N}$ , care nu este pătrat perfect. Așadar  $\sqrt{N}$  este irațional **(1p)**