Vizitati : www.profucraciun.wordpress.com
contact:profucraciun@yahoo.com

O CONSTRUCȚIE GEOMETRICĂ

Prof. dr. Miron Oprea
Prof. Elena Matei ,Mărăcineni, Argeș

În cele ce urmează vom da construcția geometrică cu rigla și compasul a expresiei: $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+....+\frac{1}{a_n}$, unde $a_1,a_2,...,a_n$ sunt lungimile a n segmente date. Dar, mai întâi, vom demonstra următoarea

Propoziție: Fiind date în plan dreptele concurente $x'Ox, y'Oy, z'Oz$, *astfel încât* $\widehat{xOy}=\widehat{yOz}=60^o$ *și punctele coliniare A, B, C luate respectiv pe* Ox, Oy, Oz *, există totdeauna relația:* $\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}$.

Demonstrație: Urmărim pe Fig.1 alăturată. Ducem prin B paralela BB' la Ox, unde $B'\in Oz$.

Din asemănarea triunghiurilor CBB' și COA, avem:

$\frac{CB'}{CO}=\frac{BB'}{OA}\Leftrightarrow\frac{CO-B'O}{CO}=\frac{BB'}{OA}.(*)$. Însă $\Delta OBB'$ fiind echilateral ($\widehat{BOB'}=\widehat{OBB'}=60^o$), avem că $BB'=B'O=OB$ și deci relația (*), devine:

$1-\frac{OB}{OC}=\frac{OB}{OA}\Leftrightarrow\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}(q.e.d.)$.

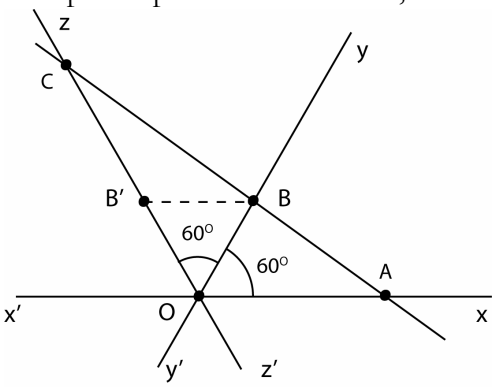

Fig. 1

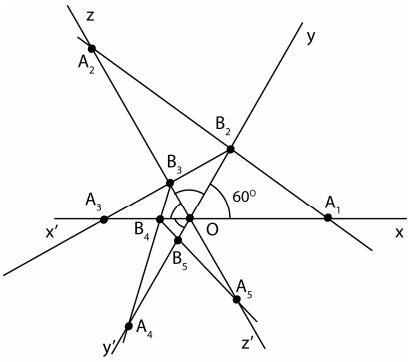

Fig. 2

Se poate ajunge la aceiași relație, observând că: aria AOC = aria AOB + aria BOC, adică:

$\frac{1}{2}OA\cdot OC\sin 120^o=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin 60^o+\frac{1}{2}OB\cdot OC\sin 60^o$

sau $OA\cdot OC=OA\cdot OB+OB\cdot OC$ (deoarece $\sin 120^o=\sin 60^o$). Prin împărțire cu produsul $OA\cdot OB\cdot OC$, obținem: $\frac{1}{OB}=\frac{1}{OA}+\frac{1}{OC}$ (q.e.d.).

Aplicaţie.

Din relaţia stabilită în propoziţia de mai sus, rezultă construcţia lungimii a, astfel încât $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a}$. Considerăm date dreptele din acelaşi plan concurente în O: $x'Ox, y'Oy, z'Oz$, astfel încât $\widehat{xOy}=\widehat{yOz}=60^o$ aşa cum se vede în Fig.2. Fie A_1 punctul de pe Ox, definit prin $OA_1=a_1$, A_2 punctul de pe Oz, definit prin $OA_2=a_2$ şi $A_3,...A_k, A_{k+1}...A_n$ punctele definite în modul următor: A_{k+1} este situat pe acele semidrepte $[Ox),[Oy).....[Oy'),[Oz')$ care urmează celui care poartă A_k şi este definit prin $OA_{k+1}=a_{k+1}$.

Fie, pe de altă parte, B_2 punctul de intersecţie $(A_1A_2)\cap[Oy).....[Oy');B_3=(B_2A_3)\cap[Oz);.....B_{k+1}=(B_kA_{k+1})\cap$ cu acea semidreaptă care este în interiorul unghiului $\widehat{B_kOA_{k+1}}$ şi în sfârşit $B_n=(B_{n-1}A_n)\cap$ cu acea semidreaptă care este în interiorul unghiului $\widehat{B_{n-1}OA_n}$.

O aplicare repetată a relaţiei stabilite în propoziţia de mai înainte, ne conduce, punând $OB_k=b_k$, la următoarele relaţii:

$$\frac{1}{b_2}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}$$
$$\frac{1}{b_3}=\frac{1}{b_2}+\frac{1}{a_{n-1}}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{b_{n-1}}=\frac{1}{b_{n-2}}+\frac{1}{a_{n-1}}$$
$$\frac{1}{b_b}=\frac{1}{b_{n-1}}+\frac{1}{a_n}$$

care prin adunare membru cu membru ne dă: $\frac{1}{b_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+.....\frac{1}{a_n}$. Avem deci $b_n=a$, adică $OB_n=a$.

Observaţie: În cazul când: $a_1=1;a_2=2^2;a_3=3^2;.....;a_n=n^2$, avem că $\frac{1}{a}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....+\frac{1}{n^2}$, care reprezintă termenul de rang n, al şirului sumelor parţiale ale seriei convergente $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}$ a cărei sumă a frământat minţile a unor celebri matematicieni din sec. XVII şi XVIII (fraţii Bernoulli, Euler, Wallis etc.) şi

a rămas în istorie ca *problema din Basel* (Bernoulli şi Euler s-au născut şi au studiat la celebra universitate din oraşul elveţian Basel).

De abia Euler, într-un mod ingenios, în 1735 a reuşit să arate că suma seriei este $\pi^2/6$. Până azi s-au dat 14 demonstraţii egalităţii $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Construcţia geometrică de mai sus arată că B_n este situat pe una din cele 6 raze ale hexagonului regulat cu latura egală cu unitatea, astfel că şirul $\frac{1}{OB_2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}; \frac{1}{OB_3} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}; \frac{1}{OB_n} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}; .....$ are ca limită $\frac{1}{\frac{6}{\pi^2}} = \frac{1}{OB}$.

Bibliografie:

[1]. Paul J. Nahin: „*O poveste imaginară. Istoria numărului* $\sqrt{-1}$" – (Ed. Theta, Bucureşti, 2000)

[2]. Robin Chapman: *"Evaluating* $\zeta(2)$*"*- (Univ. Exter, 2003).

ASUPRA PROBLEMEI DIN BASEL

Prof. dr. Miron Oprea
Prof. Maria Avram ,Ploieşti

În *Istoria matematicii,* se înţelege prin „*problema din Basel*", problema aflării sumei seriei $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}$, a cărei convergenţă a fost stabilită de celebrii matematicieni Jacob şi Iohan Bernoulli în secolul al XVII-lea, fără însă să reuşească a-i găsi şi suma. Astfel Jaques Bernoulli scria în 1700: „*Dacă cineva va reuşi să afle ceea ce până acum a rezistat eforturilor noastre şi ne-o va comunica, îi vom fi foarte recunoscători*".

Problema a fost făcută cunoscută întregii lumi matematice, prin cartea italianului *Pietro Mengoli* (1625-1686) intitulată: „*Novae quadraturae arithmeticae*" apărută în 1650 şi prin celebrul tratat al lui John Wallis *Aritmetica infinitorum* apărut în 1655. În secolul al XVIII-lea, *Jean Montucla,* istoric al matematicilor, a numit calculul sumei seriei, „*exasperarea analiştilor",* pentru că timp de aproape un secol, matematicieni celebri ca Wallis, fraţii Bernoulli, John Pell, Leibniz s-au străduit să afle suma acestei serii – fără să reuşească.

De abia în secolul al XVIII-lea, în 1735, celebrul matematician elveţian Leonard Euler aflat la Academia de ştiinţe din Sankt-Petersburg, în mod ingenios, găseşte că suma ei este $\pi^2/6$.

După cum se vede, problema a fost formulată şi rezolvată de către matematicieni celebri de la Universitatea din Basel (Elveţia) şi de aceea a rămas în istorie cu numele de *problema din Basel*. Faptul că numărul π (definit geometric) este legat de suma inverselor pătratelor numerelor naturale a trezit un interes deosebit în rândul matematicienilor, iar egalitatea $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ este considerată o adevărată *bijuterie matematică*.

S-a constatat că dacă se cere unui matematician să citeze primele cinci formule matematice cele mai frumoase, printre ele cu siguranţă va figura şi formula de mai sus. Până astăzi sunt cunoscute 14 demonstraţii diferite ale acestei egalităţi aşa cum se arată în [5].

În cele ce urmează pentru cititorii noştri vom prezenta ingenioasa metodă folosită de Euler în 1735 prin care a determinat pentru prima dată în istorie suma acestei serii. Şi pentru că suma acestei serii a preocupat şi pe unii matematicieni români, vom prezenta în detaliu şi demonstraţia dată în [6] a cunoscutului matematician *Toma Apostol,* astăzi profesor la *California Institute of Technology Pasadena* (USA).

Spre a înţelege mai bine ingenioasa metodă a lui Euler, vom trece în revistă câteva fapte legate de ecuaţiile polinomiale şi relaţiile lui Viète.

Fie ecuaţia polinomială de gradul n, cu coeficienţi reali: $a_o+a_1x+a_2x^2+.....a_nx^n=0$ care are rădăcinile $x_1,x_2,...,x_n$. Se ştie că în acest caz există egalitatea: $a_o+a_1x+a_2x^2+.....a_nx^n=a_n\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right).....\left(x-x_n\right)$ (1)

din care rezultă relaţiile lui Viète, cea mai simplă fiind $a_{n-1}=-a_n\left(x_1+x_2+.....+x_n\right)$.

În ipoteza că $a_o\neq 0$ (ceea ce înseamnă că ecuaţia are toate rădăcinile diferite de zero) şi cunoscând ultima relaţie a lui Viète: $x_1x_2.....x_n=\left(-1\right)^n\frac{a_o}{a_n}\Leftrightarrow a_n=\left(-1\right)^n\frac{a_o}{x_1x_2....x_n}$ pe care înlocuind-o în relaţia (1), obţinem:

$$a_o+a_1x+.....a_nx^n=a_o\left(\frac{x_1-x}{x_1}\right)\left(\frac{x_2-x}{x_2}\right).....\left(\frac{x_n-x}{x_n}\right)=a_o\left(1-\frac{x}{x_1}\right)\left(1-\frac{x}{x_2}\right).....\left(1-\frac{x}{x_n}\right)\quad(2)$$

Din (2), prin identificarea coeficienţilor lui x, obţinem:

$$a_1 = a_o\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+.....+\frac{1}{x_n}\right) \qquad (3).$$

Această relaţie i-a sugerat lui Euler posibilitatea de a calcula suma seriei inverselor pătratelor numerelor naturale. În acest sens, el a considerat ecuaţia sinx=0, care e echivalentă cu ecuaţia: $\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+.....=0$ (se cunoaşte dezvoltarea în serie a sinusului) care are o infinitate de rădăcini:

$$0,\pi,-\pi,-2\pi,2\pi,.....$$

Prin împărţirea ecuaţiei polinominale de grad infinit (un polinom cu o infinitate de termeni) cu x (în acest mod se elimină rădăcina zero) se obţine ecuaţia $1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+.....=0$ (de grad infinit) şi care conform relaţiei (2) avem că:

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+.....=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right).....$$

Egalând coeficienţii lui x^2 din ambii membrii (prima relaţie a lui Viète), obţinem:

$$\frac{1}{6}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+.....\Rightarrow\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Analog, Euler obţine şi suma seriei $\sum_1^\infty\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$, iar servindu-se de dezvoltarea în serie a cosinusului, el obţine în aceiaşi manieră sumele seriilor:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+.....=\frac{\pi^2}{8};\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+.....=\frac{\pi^3}{32}.$$

Observaţie importantă: Lăsăm pe seama cititorului să stabilească extrapolările analogice între finit şi infinit pe care Euler le-a făcut şi prin care a stârnit unele îndoieli în rândul contemporanilor.

Iată acum şi demonstraţia matematicianului român Toma Apostol publicată în Mathematical Intelligencer în 1983:

Avem evident $\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1 x^{n-1}y^{n-1}dxdy$, din care pe baza teoremei de convergenţă uniformă obţinem: $\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=\int_0^1\int_0^1\left[\sum_1^\infty(xy)^{n-1}\right]dxdy=\int_0^1\int_0^1\frac{dxdy}{1-xy}$.Făcând schimbările de variabile $(x,y)=(u-v,u+v)$, avem că: $\zeta(2)=\sum_1^\infty\frac{1}{n^2}=2\iint_{(P)}\frac{dudv}{1-u^2+v^2}$ unde (P) este pătratul cu vârfurile: $(0,0);\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right);(1,0);\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Datorită simetriei, putem scrie:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=4\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{u}\frac{dvdu}{1-u^2+v^2}+4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-u}\frac{dvdu}{1-u^2+v^2}=4\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arc\,tg\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right)du+4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}arc\,tg\left(\frac{1-u}{v_1-u^2}\right)du$$

Cum: $arc\,tg\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}=arc\sin u$ şi dacă $\theta=arc\,tg\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}$, atunci $tg^2\theta=\frac{1-u}{1+u}$ şi $\sec^2\theta=\frac{2}{1+u}$. Urmează că $u=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$ şi $\theta=\frac{1}{2}arc\cos u=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}arc\sin u$.

Deci:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=4\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{arc\sin u}{\sqrt{1-u^2}}}du+4\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{arc\sin u}{2}\right)du=\left[2\left(arc\sin u\right)^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\pi arc\sin u-\left(arc\sin u\right)^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{\pi^2}{4}-\frac{\pi^2}{6}+\frac{\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{6}$$

unde s-a folosit $\sum_{1=0}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$ dedusă din egalitatea evidentă:

$$\frac{3}{4}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m)^2}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2r+1)^2}.$$

Bibliografie:

[1]. P. Nahin: „*O poveste imaginară. Istoria numărului* $\sqrt{-1}$”, (trad. din lb.engleză; Ed. Theta, Buc. 2000);

[2]. George Polya: “*Matematica şi raţionamentele plauzibile*” (vol.1), (Ed. Ştiinţifică, Bucureşti 1962);

[3]. A. M. Iaglom şi I. M. Iaglom: “*Probleme neelementare tratate elementar*”, (Ed. Tehnică, Bucureşti 1962);

[4]. Mikael Passare: “*How to compute* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *by solving triangles*”, (Matemastika Institutionem, Stocholms Universitet, 2007);

[5]. Robin Chapman: “*Evaluating* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$”, (Univ. of Exeter, 2003);

[6]. Tom M. Apostol: "*A Proof that Euler Missed: Evaluating* $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ *the Easy Way*", (Mathematical Intelligencer, 1983).

MEMBRII SOCIETATII DE MATEMATICA
SUBFILIALA CÂMPINA

Nr. crt.	Numele si prenumele	Scoala	Localitatea
1.	Albu Gheorghe	Ion Kalinderu	Busteni
2.	Alexandrescu Marilena	ICPG	Campina
3.	Alexiu Daniela	CNNG	Campina
4.	Ana Iulian	C.Cantacuzino	Baicoi
5.	Ancuta Cristian	ICPG	Campina
6.	Angelescu Carmen	CNNG	Campina
7.	Anghel Leonard	ICPG	Campina
8.	Anghel Valentin	Forestier	Campina
9.	Apostolescu Camelia	Petrol	Campina
10.	Badiu Florin	ICPG	Campina
11.	Badiu Vasile	ICPG	Campina
12.	Banu Stelian	Sc. Centrala	Campina
13.	Barbulescu Simona	Petrol	Campina
14.	Barbut Ion	A.Vlaicu	Breaza
15.	Boca Elena	Petrol	Campina
16.	Bora Viorel	ICPG	Campina
17.	Brad Ion	CNNG	Campina
18.	Bratu Ionela	I. Campineanu	Campina
19.	Buruiana Lucia	Ion Kalinderu	Busteni
20.	Buruiana Petre	Ion Kalinderu	Busteni
21.	Calin Cristina	Energetic	Campina
22.	Cartoaje Olimpia	A. Vlaicu	Breaza
23.	Constantinescu Antoaneta	Petrol	Campina
24.	Cristian Cristina	Forestier	Campina
25.	Cotrut Nicolae	B. P. Hasdeu	Campina
26.	Cotrut Silvia	I. Mateescu	P. Campina
27.	Damian Rodica	A. Vlaicu	Breaza
28.	Ditei Alexandru	D. Cantemir	Breaza
29.	Doinaru Mihaela	M. Cantacuzino	Sinaia

30.	Dorobantu Carolina	A. Vlaicu	Breaza
31.	Dumitran Sanziana	Energetic	Campina
32.	Dumitrescu Cristiana	Ion Kalinderu	Busteni
33.	Duta Daniela	G. Enescu	Sinaia
34.	Garbacea Ion	A. Vlaicu	Breaza
35.	Gora Aurel	Grup Scolar	Sat Minier
36.	Grigoriu Aurelian	ICPG	Campina
37.	Ionita Cristina	ICPG	Campina
38.	Laiu Razvan	M. Cantacuzino	Sinaia
39.	Leu Gabriela	M. Cantacuzino	Sinaia
40.	Lungu Adrian	Energetic	Campina
41.	Lungu Adriana	Energetic	Campina
42.	Manolescu Andreea	Mecanica 2	Campina
43.	Mihail Maria	Petrol	Campina
44.	Moldoveanu Dragos	G. Enescu	Sinaia
45.	Moraru Amalia	Agromontan	V. Doftanei
46.	Necula Elena	Forestier	Campina
47.	Pantea Gheorghe	A. Vlaicu	Breaza
48.	Patran Tiberiu	CNNG	Campina
49.	Piciorea Cornelia	S. Stolnicu	Comarnic
50.	Pitea Ariana	Politehnica	Bucuresti
51.	Pitea Teodor	ICPG	Campina
52.	Pristavu Diana	CNNG	Campina
53.	Raducanu Nicoleta	C. Cantacuzino	Baicoi
54.	Rat Cristina	Energetic	Campina
55.	Rusalim Beatrice	Liceul Teoretic	Filipesti
56.	Sai Nicoleta	C. Cantacuzino	Baicoi
57.	Sendroiu Cristian	B. P. Hasdeu	Campina
58.	Simionescu Marilena	Liceul Teoretic	Azuga
59.	Stan Constantin	CNNG	Campina
60.	Stanciu Ion	D. Cantemir	Breaza
61.	Stefan Margareta	Forestier	Campina
62.	Tanase Gabriela	CNNG	Campina
63.	Toader Mariana	Petrol	Campina
64.	Voiculet Elena	Scoala 3	Busteni
65.	Vulcu Eleonora	A. Vlaicu	Breaza
66.	Vulcu Victor	D. Cantemir	Breaza
67.	Gradinaru Nicoleta	Liceul teoretic	Filipestii de Padure

68.	Oprea Daniela	D. Cantemir	Breaza
69.	Dragomir Cristina	Petrol	Campina

PROBLEME REZOLVATE DIN ULTIMELE NUMERE ALE REVISTEI AXIOMA SUPLIMENT MATEMATIC

Cătălina Isofache,Daniela Badea, Ploieşti

1) Să se determine numerele prime, a, b, c, d ştiind că: 60a + 90b + 72c + 119d = 2008

Rezolvare

60a + 90b + 72c + 119d = 2008 $\Leftrightarrow$ 119d = 2008 - (60a + 90b + 72c) $\Rightarrow$ 119d nr. Par $\Rightarrow$ d par si cum d prim din ipoteza $\Rightarrow$ d = 2

Atunci 30a + 45b + 36c = 885 $\Leftrightarrow$ 30a + 36c = 15·(59 - 3b) $\Rightarrow$ 15/30a + 36c si 15/30a $\Rightarrow$ 15/36c $\Leftrightarrow$ 36c = 15k $\Leftrightarrow$ 12c = 5k, iar 5 nu divide 12 $\Rightarrow$ 5/c, c prim $\Rightarrow$ c = 5. Atunci 2a + 12 = 59 – 3b $\Leftrightarrow$ 2a = 47 – 3b $\Rightarrow$ 2/ 47 – 3b deci 3b impar $\Rightarrow$ b impar si prim.

Daca b = 3 $\Rightarrow$ a = 19

b = 5 $\Rightarrow$ a = 16 nr. compus

b = 7 $\Rightarrow$ a = 13

b = 11 $\Rightarrow$ a = 7

Pentru b > 11 $\Rightarrow$ 47 – 3b < 0 (F)

Deci problema are 3 solutii : a = 19 ; b = 3 ; c = 5 ; d = 2

a = 13 ; b = 7 ; c = 5 ; d = 2

a = 7 ; b = 11 ; c = 5 ; d = 2.

2) Daca un unghi exterior al triunghiului este media aritmetica a masurilor celorlalte doua unghiuri exterioare a aceluiasi triunghi, cercetati daca acesta este congruent cu unghiul format de bisectoarele a doua unghiuri interioare ale triunghiului.

Rezolvare

Din teorema unghiului exterior avem $180^0 - x = y + z$

Iar din ipoteza $180^0 - x = \dfrac{180^0 - y + 180^0 - z}{2}$

$\Leftrightarrow 180^0 - x = 180^0 - \dfrac{y+z}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{y+z}{2}$

Bisectoarele unghiurilor cu masurile y, respectiv z formeaza un unghi cu masura $180^0 - \left(\dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2}\right) = 180^0 - \dfrac{y+z}{2} = 180^0 - x$, proprietatea fiind indeplinita.

3) Aflați x din relația: $(9^{23} \cdot x - 9^{23} - 3) : 2 = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{46}$

<u>*Rezolvare*</u>

$(9^{23} \cdot x - 9^{23} - 3) : 2 = 3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{46} / \cdot 2 \Leftrightarrow 9^{23} \cdot x - 9^{23} - 3 = 3^{47} - 3 \Leftrightarrow 9^{23} \cdot (x - 1) = 3^{47}$

$\Leftrightarrow 3^{46} \cdot (x - 1) = 3^{47} \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$

4) . Unghiurile in jurul unui punct O, ∠ AOB, ∠ BOC, ∠ COA au respectiv bisectoarele (OX, (OY, (OZ, iar $m(XOY), m(\angle YOZ), m(\angle ZOX)$ suht direct proportionale cu 5, 6, 7. Aflati :

a) masurile ∠ AOB, ∠ BOC, ∠ COA ;

b) masura unghiului format de bisectoarele unghiurilor ∠ BOX si ∠ COZ.

<u>*Rezolvare*</u>

a) Notam $\begin{array}{l} m(\angle AOB) = 2a, m(\angle BOC) = 2b, m(\angle COA) = 2c \Rightarrow m(XOY) = a + b, \\ m(\angle YOZ) = b + c, m(\angle ZOX) = c + a \end{array}$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{6} = \frac{c+a}{7} = \frac{2(a+b+c)}{18} = \frac{360^0}{18} = 20^0 \Rightarrow \begin{array}{l} a + b = 100^0 \\ b + c = 120^0 \\ c + a = 140^0 \end{array}$$

de unde $\begin{cases} a = 60^0 \\ b = 40^0 \\ c = 80^0 \end{cases}$

$\Rightarrow m(\angle AOB) = 120^0, m(\angle BOC) = 80^0, m(\angle COA) = 160^0.$

b)Fie (OM bisectoarea $\angle$BOX si (ON bisectoarea $\angle$COZ **.** Atunci

$$m(\angle MON) = m(\angle MOB) + m(\angle BOC) + m(\angle CON) = \frac{m(\angle AOB)}{4} +$$

$$m(\angle BOC) + \frac{m(\angle COA)}{4} = 150^0$$

5) .Într-o cariera sunt 50 de blocuri de piatra, având greutatile de 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 468 kg.(Fiecare piatra, începând cu a doua, are cu 2 kg mai mult decât precedenta).

a) Sa se arate ca greutatea blocurilor de piatra nu depaseste 21 de tone.

b) Se pot transporta blocurile cu 7 camioane de câte 3 tone, fiecare camion facând un singur transport?

<u>*Rezolvare*</u>

a) Masa totala a blocurilor de piatra este

$$S = \frac{(370+468)\cdot 50}{2} = 20950kg = 20{,}95t < 21t$$

b) Masa celor mai usoare 7 blocuri de piatra este 370 + 372 + 374 + … + 384 = 3016 kg > 3t. Atunci , cum fiecare camion are capacitatea de 3 tone, in fiecare vor incapea cel mult 7 blocuri de piatra, adica in toate cele 7 camioane , cel mult 49 blocuri . Rezulta ca nu se pot transporta blocurile cu 7 camioane de câte 3 tone, fiecare camion facând un singur transport

6). *Ştiind că a, b, c ∈ $\mathbb{R}_+$ \ {2} şi a + b + c = 2, arătaţi că:*

$$\frac{ab}{2-c} + \frac{bc}{2-a} + \frac{ac}{2-b} \le 1\cdot$$

<u>*Rezolvare*</u>

Observam ca 2-c=a+b ;2-a=b+c;2-b=a+c si

$\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}; \frac{bc}{b+c} \le \frac{b+c}{4}; \frac{ac}{a+c} \le \frac{a+c}{4}$ .Insumand inegalitatile,rezulta

$$\frac{ab}{2-c} + \frac{bc}{2-a} + \frac{ac}{2-b} \le \frac{2(a+b+c)}{4} = 1.$$

7) **.** *Se consideră mulţimea* $A = \{a \in N \mid 100 \le a \le 142\}$. *Un număr natural d se numeşte prieten cu 11 dacă:*

a) $11 \mid d$

b) există $b \in A$ si $c \in A$ atsfel încât $d=b^2+c^2$.
Gasiți toate numerele naturale prietene cu 11.

<u>*Rezolvare*</u>

Multimea A=$\{a \in N / 100 \le a \le 142\}$ este formata din numere naturale de forma 11k+i , k$\in N$ si i=$\overline{0,10}$.Patratele elementelor din multimea A sunt numere naturale de forma 11k ;11k+1 ;11k+3 ;11k+4 ;11k+5 ;11k+9.Pentru ca suma b^2+c^2, b,c$\in A$ sa fie divizibila cu 11 , rezulta ca b^2 si c^2 sunt de forma 11k, deci b si c sunt divizibile cu 11.Numerele naturale multiplii de 11 din multimea A sunt :110 ;121 si 132 . Deci numerele naturale d cu proprietatile din enunt sunt :110^2+110^2;110^2+121^2 ;110^2+132^2
121^2+121^2;121^2+132^2;132^2+132^2. .

8) Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt: $a = 2n(n + 1)$, $b = 2(n + 1)(n + 2)$ și $c = (n + 1)^2 + 2$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că diagonala paralelipipedului are ca lungime un număr natural.

<u>*Rezolvare*</u>

Din
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow d^2 = 4n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^2(n+2)^2(n+1)^4 + 4(n+1)^2 + 4$,
obtinem $d^2 = (n+1)^2\left[4n^2 + 4(n+2)^2 + (n+1)^2 + 4\right] + 4 =$
$(n+1)^2\left[9(n+1)^2 + 12\right] + 4 =$
$=9(n+1)^4 + 12(n+1)^2 + 4 = \left[3(n+1)^2 + 2\right]^2 \Rightarrow d = 3(n+1)^2 + 2$.
Deci lungimea diagonalei este numar natural.

9) . *Verificați egalitatea:* $\sqrt{\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

<u>*Rezolvare*</u>

$\sqrt{\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4-2\sqrt{3}}} = \sqrt{\dfrac{(2-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3}-1)^2}} = \left|\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}\right| = \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(2-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.Deci, propozitia este adevarata.

10) .*Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația:* $x^4 + 5x - 6 = 0$

Rezolvare

$x^4 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)(x^2 - x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -2.$