

PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

1. Scrieți numărul 2007^{2008} ca sumă de 2007 numere consecutive.
Leonard Coțac, Boldești Scăieni
2. Să se reconstituie împărțirea știind că restul reprezintă jumătate din cât, câtul reprezintă un sfert din împărțitor, iar suma dintre împărțitor și rest este 264.
Eugen Niță, Ploiești
3. Să se determine trei numere naturale știind că produsul primelor două este 513, iar produsul ultimelor două este 342 iar diferența dintre primul și ultimul este 19.
Eugen Niță, Ploiești
4. Să se determine cel mai mic număr natural format din cifre nenule, care are suma cifrelor 348.
Eugen Niță, Ploiești
5. O jumătate din numărul elevilor de clasa a cincea participă la activitățile cercului sportiv. Știind că șase elevi participă la cercul de matematică iar o cincime din numărul elevilor sunt la cercul artistic și că nici un elev nu participă la două activități, aflați numărul elevilor din clasă
Mihail Focșeneanu, Ploiești
6. Calculați
$$n = 3^9 - 4 \cdot 3^8 + 4 \cdot 3^7 - 4 \cdot 3^6 + 4 \cdot 3^5 - 4 \cdot 3^4 + 4 \cdot 3^3 - 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 4$$

Petre Apostol, Câmpina
7. Produsul a două numere este 126. Dacă se mărește primul număr cu 5 produsul devine 161. Aflați cele două numere.
Aurora Jitcovi, Onești
8. Să se afle suma cifrelor numărului : $A = 2^{n+1} \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^{n+1} + 2007$, $n \in \mathbb{N}$.
Nicolae Scurtaovschi, Constanța
9. Două prune o piersică și o caisă cântăresc împreună 600 g. O prună, două piersici și două caise cântăresc împreună 900 g. Cât cântărește o prună?
Ioana Crăciun și Gheorghe Crăciun, Ploiești
10. Să se arate că orice putere naturală a lui 10 se poate scrie ca sumă a doua pătrate de numere naturale.
Luminița Corneci, Valenii de Munte

Clasa a VI-a

1. Să se arate că $(17n+5)(26n+7)(23n+111)$ se divide cu 3 pentru oricare n număr natural.
Adelina Apostol, Ploiești
2. Notăm $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Să se afle câtul și restul împărțirii numărului $p = 9! + 5$ la 360.
Liviu Ardelean, Sibiu
3. Fie $\angle AOB$ un unghi nenul și semidreapta $[OC_1$ care împarte $\angle AOB$ în două unghiuri congruente, semidreapta $[OC_2$ care împarte $\angle AOC_1$ în două unghiuri congruente, semidreapta $[OC_3$ care împarte unghiul $\angle AOC_2$ în două unghiuri congruente. Dacă $m(\angle AOC_3) = 19^\circ$, să se afle $m(\angle AOB)$. Să se realizeze construcția unghiurilor din problemă.

4. Fie unghiurile $\angle A_0\hat{O}A_1, \angle A_1\hat{O}A_2, \dots, \angle A_{n-1}\hat{O}A_n, \angle A_n\hat{O}A_0$ unghiuri în jurul punctului O cu $m(\angle A_0\hat{O}A_1) = 1^\circ, m(\angle A_1\hat{O}A_2) = 3^\circ, \dots, m(\angle A_{n-1}\hat{O}A_n) = (2n-1)^\circ, n \in \mathbf{N}$.
Determinați:
a) Valoarea maximă a lui n .
b) Unghiurile a căror bisectoare e OA_0
c) Perechile de semidrepte opuse.

Leon Genoiu, Rm. Vâlcea

5. Fie punctele coliniare A, B, C, cu B între A și C, respectiv M, N, P mijloacele segmentelor AB, BC și AC. Arătați că segmentele MN și BP au același mijloc.

6. Să se arate că numărul $a = 2^{3n+1} \cdot 5^{n+3} - 7^n$ este divizibil cu 3, $(\forall) n \in \mathbf{N}$.

E. Blăjuț, Bacău

7. Câtul împărțirii a două numere naturale nenule este 5 iar restul este 20. Adunând deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și restul se obține 195. Care sunt numerele?

Maria Avram, Ploiești

8. De Crăciun, școala a fost împodobită cu becuțe de diferite culori, astfel: primul alb, al doilea albastru, al treilea galben, al patrulea verde. Păstrând această ordine a culorilor pentru toate becuțele, ce culoare are al 123-lea becuț?

Megelea Gheorghe, Bușteni

9. Fie semidreptele $(OA_1), (OA_2), (OA_3), \dots, (OA_{27})$ astfel încât măsurile unghiurilor $\angle A_1\hat{O}A_2, \angle A_2\hat{O}A_3, \dots, \angle A_{26}\hat{O}A_{27}$, formate în jurul punctului O, să fie exprimate prin numere naturale. Arătați că:

- a) există, printre unghiurile date, cel puțin două unghiuri cu aceeași măsură;
b) dacă măsurile unghiurilor $\angle A_1\hat{O}A_2, \angle A_2\hat{O}A_3, \dots, \angle A_{26}\hat{O}A_{27}$ sunt numere naturale consecutive, există două semidrepte perpendiculare.

Ilarie Lazăr, Ploiești

10. Un pătrat se numește magic dacă suma numerelor înscrise în căsuțe este aceeași pe fiecare linie, pe fiecare coloană și pe fiecare diagonală. Completați următorul pătrat magic:

	54	
53	46	51

Emilian Deaconescu, Ceptura

Clasa a VII-a

1. Fie M mijlocul laturii AB a pătratului ABCD, E simetricul punctului M față de A și F simetricul punctului A față de B. Să se arate că triunghiul EDF este dreptunghic.

E. Blăjuț, Bacău

2. Demonstrați că există o infinitate de triplete de numere naturale direct proporționale cu trei numere naturale consecutive date, având media aritmetică un număr natural.
Petre Năchilă, Ploiești

3. Lungimile laturilor unui triunghi sunt exprimate prin 3 numere naturale pare consecutive, iar aria este numeric egală cu perimetrul triunghiului. Aflați aria și perimetrul triunghiului.
Petre Apostol, Câmpina

4. Se dă triunghiul ABC. Pe latura AB se ia punctul M, astfel că segmentul [AM] să aibă lungimea $\frac{3}{8}$ din lungimea lui [AB], iar pe latura [BC] se ia punctul N astfel încât

$$BN = \frac{4}{9} BC. \text{ Să se fixeze pe latura [AC] un punct P astfel ca } A_{AMNP} \text{ să fie } 30\% \text{ din } A_{ABC}.$$

Emil Mitrache, Rm. Vâlcea

5. Fie P un punct interior ΔABC oarecare. Notăm A', B', C' simetricele punctului P față de A, B, respectiv C. Arătați că punctele P, G, G' sunt colineare unde G și G' sunt centrele de greutate ale ΔABC , respectiv al $\Delta A'B'C'$.

6. Fie ABCD un dreptunghi, iar $M \in (AB), N \in (BC)$ și $P \in (CD)$. Arătați că aria triunghiului MNP este cel mult egală cu aria dreptunghiului ABCD.

Daniela Badea și Ion Dumitrache, Ploiești

7. Fie ΔABC în care $m(\angle B) = 75^\circ, m(\angle C) = 45^\circ, BM \perp AC, M \in AC, D \in (AB)$, astfel încât $m(\angle ACD) = 15^\circ$. Perpendiculara în D pe CD intersectează dreapta BM în E. Să se arate că $ED = BC$ și să se determine $m(\angle BEC)$.

E. Blajut, Bacău

8. Fie dreptunghiul ABCD, $P \in (BD), M \in (CP)$, astfel încât $PM = CP$, $ME \perp AD, E \in AD, MF \in AB, F \in AB$. Arătați că: a) AM și BD sunt paralele; b) E, F, P sunt coliniare.

Constantin Saraolu, Rm. Vâlcea

9. Să se afle numerele naturale x, y, z, t, u, v astfel încât

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z + \frac{1}{t + \frac{1}{u + \frac{1}{v}}}}} = \frac{37}{23}.$$

Luminița Corneci, Valenii de Munte

10. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$, știind că are loc relația $(a+b)^c = \overline{abc}$.

Elev Claudiu Mândrilă, Târgoviște

Clasa a VIII-a

1. Arătați că soluțiile ecuației :

$$2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}} - \sqrt{2} = 0 \text{ aparțin intervalului } \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

Gheorghe Achim, Mișil

2. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D astfel încât:

$$AB = AC = BD = CD = a.$$

a) Arătați că $AD \perp BC$;

b) Dacă $P \in (AB), Q \in (AC), S \in (BD), T \in (CD)$ astfel încât $[AP] \equiv [AQ] \equiv [DS] \equiv [DT]$, aflați natura patrulaterului $PQST$;

c) Dacă, în plus, $m(\angle BAC) = m(\angle ACD) = 60^\circ$, calculați aria maximă a patrulaterului $PQST$.

Dragoș Constantinescu, Rm. Vâlcea

3. În vârful A al dreptunghiului $ABCD$ se ridică, pe planul acestuia perpendiculara AM . Se construiesc perpendicularele AP și AQ astfel încât $AP \perp BM, AQ \perp DM$ ($P \in BM; Q \in DM$). Să se arate că $PQ \perp MC$.

Ioana Oprea și Dumitru Oprea, Dragodănești, Dâmbovița

4. a) Există numere naturale de 2004 cifre, cu primele două cifre 33, având proprietatea ca prin ștergerea acestora, se obține un număr de 45 de ori mai mic?

b) Există numere naturale nenule cu proprietatea că, prin ștergerea primei cifre, se obține un număr de 45 de ori mai mic?

Cristinel Mortici, Târgoviște

5. Verificați egalitatea:
$$\sqrt{\frac{7 - 4\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

Luminița Corneci, Valenii de Munte

6. Un patrulater convex are două laturi opuse congruente și diagonalele congruente. Să se arate că celelalte laturi ale patrulaterului sunt paralele.

Luminița Corneci, Valenii de Munte

7. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată iar punctele M și N mijloacele laturilor AA' respectiv $A'B'$. Știind că $MN = 13\text{ cm}$ și $d(B; AC) = 24\text{ cm}$, să se afle:

a) Aria totală a prisme;

b) Sinusul unghiului format de dreptele MN și CB' .

Doina Petrescu, Ploiești

8. Determinați numerele reale x, y și z pentru care avem:

$$\sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{y^2 - 2y + 2} - \sqrt{z^2 - 4z + 29} = z + y - x$$

Leonard Coțac, Boldești-Scăieni

9. Determinați cifrele a, b, c, d , (în baza zece) pentru care avem relațiile:

$$\overline{ab} = \sqrt{bcd\overline{b}}, a = \sqrt{bc} \text{ și } 2a + b = \sqrt{d\overline{b}}.$$

Elev Claudiu Mândrilă, Târgoviște

10. Demonstrați ca $a^3 + 2ab^2 = b^3 + 2a^2b$ dacă și numai dacă $a = b$.

Elev Claudiu Mândrilă, Târgoviște

