

Clasa a IX-a

1. Să se determine mulțimile finite de numere reale A pentru care $x^2 - 2|x| + 2 \in A$ pentru orice x din A .
Petre Năchilă, Ploiești
2. Fie M un punct în interiorul unui triunghi echilateral ABC de latură a . Să se arate că: $MA \cdot MB + MB \cdot MC + MC \cdot MA \geq a^2$
Dan Coma, Vădăstrița, Olt
3. Fie punctele O, A, B, C coliniare în această ordine. Demonstrați că:
 $AB\sqrt{OC} + BC\sqrt{OA} < AC\sqrt{OB}$
Vasile Predeanu, Ploiești
4. Să se determine natura și unghiurile triunghiului ABC , în care are loc relația:
 $|(2\sin 2A - 1)(\sin A + \cos A)| \cdot h_a = \sqrt{2p(p-a)}$
Nicolae Teodorescu, Ploiești
5. Fie x un număr real astfel încât $\{23x\} = \{7x\}$ Arătați că $\{73x\} = \{25x\}$.
(S-a notat cu $\{a\}$ partea fracționară a lui a)
Ioana Crăciun și Gheorghe Crăciun, Plopieni

Clasa a X-a

1. Se dă punctul O fix și triunghiul $[ABC]$ mobil, nedeformabil, de arie S , astfel încât volumul piramidei $OABC$ să fie constant. Se cere:
a) Locul geometric al triunghiului $[ABC]$;
b) Locul geometric al punctului G , unde G este centrul de greutate al triunghiului $[ABC]$
Anghel Dafina, Vălenii de Munte
2. Să se rezolve ecuația $\log_{30}(x^3 + x) = \log_3 x$.
Petre Năchilă, Ploiești
3. Într-un triunghi isoscel ABC , $[AB] \equiv [AC]$ cu măsura unghiului A egală cu $\frac{\pi}{7}$ raportul dintre bază și una dintre laturile congruente este x . Arătați că are loc relația:
 $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 = 0$
Octavian Vasilcanu, Drobeta Tr. Severin
4. Fie p un număr natural fixat, $p > 1$. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ astfel încât
 $[x] + [x + \frac{1}{a}] + [x + \frac{2}{a}] + \dots + [x + \frac{p-1}{a}] = [ax], \forall x \in \mathbb{R}$.
Marius Perianu, Slatina
5. Fie M mijlocul laturii unui triunghi ABC . Notăm cu I și J centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AMB respectiv AMC . Dacă $m(\angle AIB) - m(\angle MIJ) = 90^\circ$, să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.
Marius Perianu și Florian Dumitrel, Slatina

Clasa a XI-a

- 1) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 6$ ecuația $x^{n+1} - (n+1)x + 5 = 0$ are două rădăcini a_n și b_n cu proprietățile:
1) $0 < a_n < 1$ și $b_n > 1$;
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$.
Ion Ureche, Rm. Vâlcea

2) Rezolvați în $M_2(\mathbf{R})$ ecuația matriceală $A^3 - 2A^2 + 10A = \begin{pmatrix} 18 & 4 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

Ion Ureche, Rm. Vâlcea

3) Fie $A, B \in M_3(\mathbf{R})$ cu proprietatea $BA^2 = A^2 + B$. Să se arate că $\det(3B - A^2B^2) \leq 0$.

Nicolae Teodorescu, Ploiești

4) Fie funcția continuă $f: [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}_+$. Să se demonstreze că pentru orice cuplu de numere $(p, q) \in \mathbf{R}^2$, există un număr $c \in [a, b]$ astfel încât $f^p(a) \cdot f^q(b) = f^{p+q}(c)$.

dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

5) Să se determine expresia termenului general al șirului $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ dat prin relațiile: $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ și $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$, pentru oricare n număr natural nenul, apoi studiați convergența sa.

Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

Clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup multiplicativ și $f: G \rightarrow G$ injectivă cu proprietatea $f(xf(y)) = x^2f(y)$, pentru oricare x, y din G . Să se demonstreze că G este grup abelian.

Petre Năchilă, Ploiești

2. Să se arate că orice grup cu cel mult patru elemente este comutativ.

3. Considerăm

$$f: (-1, 1) \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = \begin{cases} \arcsin x + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & x \in (-1, 1) - \{0\} \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ și } g \text{ restricția lui } f \text{ la}$$

$(0, 1)$. Arătați:

- 1) f nu admite primitive;
- 2) g admite primitive și calculați $\int g(x) dx$.

Ion Ureche, Rm. Vâlcea

4. Există funcții $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ astfel încât să admită o primitivă F cu proprietatea $(F \circ f)(x) = -x, \forall x \in \mathbf{R}$?

O. Purcaru, Ploiești

5. Fie $g, h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ a.i. $g \in \int h(x) dx$, $h \in \int g(x) dx$ și $g(0) = h'(0) = 2$, $g'(0) = h(0) = 1$.

a) Să se determine funcțiile g, h .

b) Fie $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. Să se demonstreze echivalența:

f admite primitive pe $\mathbf{R}$ dacă și numai dacă $f \cdot g$ și $f \cdot h$ admit primitive pe $\mathbf{R}$.

Gabriel Necula, Plopeni

