

PROBLEME PROPUSE PENTRU GIMNAZIU

Clasa a V-a

- În blocul nr.10 de pe strada Mărășești sunt apartamente cu 2 sau 3 camere. În total sunt 24 apartamente și 64 camere. Să se afle câte apartamente au 2 camere și câte au 3 camere.

Maria Zaharia, Onești

- Să se determine a, b, c numere naturale astfel încât $b^a + 2 \cdot c^a = \overline{bb}$

Leonard Coțac, Bodești-Scăieni

- Câte numere naturale de 3 cifre, cu cifrele diferite două câte două, există?

Ioana Craciun și Gheorghe Craciun, Ploiești

- Fie numerele

$$A = 2^{2008} + (2^{1004})^2 + (2^4)^{502} + (2^{256})^6 \cdot (2^{236})^2$$

$$B = 2^{2007} + (2^{669})^3 + (2^9)^{223} + 2^{2000} \cdot (2^3)^2 + 2^{2007} \cdot b.$$

Determinați b astfel încât $A \geq B$.

Nicolae Scuratovschi, Constanța

- Sala unui teatru are 25 rânduri cu 23 locuri fiecare. Toate locurile sunt numerate începând cu primul rând. În ce rând poate fi găsit locul 275?

Elena Matei, Mărăcineni, Argeș

- Trei elevi s-au cântărit, doi câte doi, în toate combinațiile posibile. Ei au obținut următoarele măsuri: 85kg, 80kg, 91kg. Cât cântăresc împreună?

Maria Avram, Ploiești

- Se dau numerele:

$$a = 1 + 2 + 3 + \dots + 9; b = 11 + 22 + 33 + \dots + 99; c = 111 + 222 + 333 + \dots + 999.$$

Să se calculeze câtul împărțirii lui $a + b + c$ la 324.

Daniela Bucur, Ploiești

- Împărțind două numere naturale obținem câtul 2 și restul 40. Aflați cele două numere știind că suma dintre deîmpărțit, dublul împărțitorului, triplul restului și dublul câtului este $S = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{11}$.

Luminița Corneci Vălenii de Munte

- Să se determine numerele naturale m, n știind că $5 \cdot 2^m - 16 = 2^n$.

Petre Năchilă, Ploiești

- Să se determine numerele naturale a, b, c pentru care avem:

$$2^{3a+2} + 2^{2b+1} + 2^{2c} = 448.$$

Maria și Anton Negrila, Ploiești

Clasa a VI-a

- Se considera segmentul BC și NM mediatoarea sa astfel încât $M \in [BC]$ și $m(\angle BNC) > 90^\circ$. Fie $A \in NC$ astfel încât $\triangle ABN \equiv \triangle MCN$. Demonstrați ca :

$$a) \quad NC = 2AN$$

$$b) \quad BN \perp AM$$

Musat Claudia și Vasilescu Tamara, Ploiești

- Fie numărul $x = 1^a + 2^{a+1} + 3^{a+2} + 4^{a+3} + 5^{a+4}$, $a \in \mathbb{N}$.

Să se determine cea mai mică valoare a numărului natural „a” astfel încât $(x-3):11$.

Maria Frusinoiu, Ploiești

3. Fie n un număr natural nenul care are exact 6 divizori naturali. Fie S suma celor 6 divizori naturali. Să se determine n știind că : a) $S=63$ b) $S=39$

Petre Năchilă, Ploiești

4. Aflați numerele naturale a, b, c pentru care avem:

$$4^{a+b+2} + 4^{b+c+2} + 4^{a+c+2} = 21504$$

Maria și Anton Negrilă, Ploiești

5. Aflați numerele naturale x și y astfel încât mulțimile:
 $A = \{2^x, 4^{x-y}, 2^{2y}\}$ și $B = \{2^{x-2}, 2^{4-y}, 2^{x+y}\}$ să fie egale.

Gabriel Țaga, Ploiești

6. Găsiți numerele naturale de forma $\overline{abc}$ știind că:

$$c < a < b, \overline{a(b)} + \overline{b(c)} + \overline{c(a)} = 16\frac{2}{3} \text{ și } a + b = 4c.$$

Magdalena Georgescu, Ploiești

7. Se consideră numărul $n = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$.

- a) Arătați că numărul n se divide cu 111.
 b) Determinați n , dacă prin împărțire la 110 dă restul 26.

Dragoș Moldoveanu, Sinaia

8. Aflați toate valorile expresiilor:

$$N_1 = (-1)^{2p+q} \cdot [3 + (-1)^{5p+2}] \cdot [3 - (-1)^{2q}] \text{ și}$$

$$N_2 = \frac{(-1)^p + (-1)^q + (-1)^{p+q}}{(-1)^p - (-1)^q + (-1)^{pq}}.$$

Gheorghe Achim, Mizil

9. Fie triunghiul isoscel ABC cu $m(\angle BAC) = 100^\circ$. Fie (CE) și (AD) bisectoarele unghiurilor ACB , respectiv BAC , unde $E \in AB$, $D \in BC$ și fie $CE \cap AD = \{F\}$. Bisectoarea unghiului BEC intersectează BC în G . Demonstrați că:

- a) $\triangle CAE \equiv \triangle CGE$;
 b) (GF) este bisectoarea unghiului EGD .

Gheorghe Achim, Mizil

10. Dacă un unghi exterior al triunghiului este media aritmetică a măsurilor celorlalte două unghiuri exterioare a aceluiași triunghi, cercetați dacă acesta este congruent cu unghiul format de bisectoarele a două unghiuri interioare ale triunghiului.

Vasile Coman, Valenii de Munte

Clasa a VII-a

1. Fie $A = \{1, 4, 7, 10, 13, 17\}$. Să se determine submulțimile E și F ale lui A care au același număr de elemente, iar dacă $x \in E$, atunci $x - 3 \in F$.

Petre Năchilă, Ploiești

2. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\angle A) = m(\angle D) = 90^\circ$, baza mare AB iar baza mică CD . Se știe că $AD=12$ cm, $DC=4$ cm și punctul M este mijlocul lui AD astfel încât $m(\angle BMC) = 90^\circ$. Să se afle:

- a) Aria trapezului $ABCD$;

b) Distanța de la punctul M la dreapta BC.

Maria și Anton Negrila, Ploiești

3. Pe latura AD a paralelogramului ABCD se consideră punctele M și N astfel încât $A - M - N - D$ și $\frac{AM}{ND} = \frac{BM}{NC}$. Să se demonstreze că $\angle ABM \equiv \angle DCN$.

E. Blăjuț, Bacău

4. Să se afle patru numere naturale nenule și distincte mai mari decât 1 pentru care produsul primelor trei este 90, produsul ultimelor trei este 540, iar suma dintre primul și ultimul este 14, iar al doilea și al treilea sunt prime între ele.

Ioan Drăghicioiu, Ploiești

5. Să se calculeze partea întreagă a numărului real x, unde

$$x = \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}}}$$

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara

6. Să se rezolve în R ecuația:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 8} + \sqrt{x^2 + z^2 - 4x + 2z + 5} + \sqrt{z^2 + y^2 + 2z + 5} = 4$$

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

7. Fie $A = \{5 \cdot n + 2, 5 \cdot n + 3, 5 \cdot n + 7, 5 \cdot n + 8\}$ și $B = \{n, n^2, n^3, n^4\}$, unde n este un număr natural fixat care este pătrat perfect. Câte elemente are mulțimea $A \cap B$?

Ioana și Dumitru Oprea, Dragodănești

8. Determinați numerele naturale x și y astfel încât $x > y > 0$ și $x^3 + 7y = y^3 + 7x$

Avram Maria, Ploiești

9. Fie trapezul isoscel ABCD cu baza mare AB = 11cm și BC = CD = DA = 5cm. Calculați sinusul unghiului dintre diagonale trapezului.

Solomon Nicolai, Vaslui

10. Trapezul isoscel ortodiagonal ABCD, are baza mare AB de 8 cm și baza mică este CD. Notăm cu P intersecția dreptelor AD și BC. Știind că $m(\angle AP; BP) = 60^\circ$, să se afle:

- sinusul unghiului APB;
- aria triunghiului AOD;
- distanța de la punctul D la dreapta AC

Maria și Anton Negrila, Ploiești

Clasa a VIII-a

1. Tetraedrul regulat VABC are înălțimea $VO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Se secționează cu planele paralele (A'B'C') și (A''B''C'') astfel ca aria laterală tetraedrului să fie împărțită în trei părți egale. Calculați volumul trunchiului de piramidă A'B'C'A''B''C''

Ioan Pascaru, Ploiești

2. Să se determine numerele de forma $\overline{xy}$ scrise în baza 10 astfel încât $\frac{\overline{xy}}{yx} = 2 - \frac{y}{x}$

Ioan Drăghicioiu, Ploiești

3. Sa se determine numerele naturale n pentru care
 - a) $\frac{1}{7 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(2n+3)(2n+5)} = \frac{286}{4018}$
 - b) Determinati numerele naturale a pentru care $a^2 < n < (a+1)^2$

Maria si Anton Negrita, Ploiesti
4. Fie ABCDA'B'C'D' un cub cu AB=4 cm si M,N,P mijlocul laturilor [BC], [AA'], respectiv [B'C'].
 - a) Calculati aria triunghiului MNP
 - b) Aflati C'S, unde $MN \cap (A'B'C') = \{S\}$

Luminița Corneci Vălenii de Munte
5. Demonstrați că numărul $A = 1+2+2^2+2^3+ \dots + 2^{2003}$ este divizibil cu 15.

Gheorghe Megelea, Buzeni
6. Fie $N = \sqrt{8x^2 - 4\sqrt{6}x + 16} + \sqrt{27y^2 - 6\sqrt{6}y + 9}$. Aflați valoarea minimă a lui N și numerele x și y pentru care se realizează acest minim.

Emilian Deaconescu, Ceptura
7. Se dă rombul ABCD de latură 10cm și arie 96 cm^2 . Fie punctul P mijlocul laturii DC și $AP \cap DB = \{E\}$. În punctul E se ridică perpendiculara SE pe planul rombului, $SE = 4\sqrt{3}$. Să se calculeze :
 - a) lungimea segmentului SD;
 - b) distanța de la S la dreptele AB, AC și AD;
 - c) tangenta unghiului diedru format de planele (SAB) și (ABC).

Ionescu Ionela, Valenii de Munte
8. Determinați numerele naturale $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $\sqrt{4n^2 - 12n + 20} \in \mathbf{N}$.

Solomon Nicolai, Vaslui
9. Fie triunghiul ABC și punctele $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât $\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC} = \frac{MB}{NC}$ și $T \notin (ABC)$. Bisectoarea interioară a unghiului BAC taie MN și BC în E și respectiv F. Dacă planele (PQT) și (TEF) se intersectează după dreapta d , arătați că $d \parallel (ABC)$.

Nicolae Talău- Craiova
10. Fie ABCD un dreptunghi cu AB=6 cm și $BC = 3\sqrt{2} \text{ cm}$, iar P este mijlocul laturii AB. În punctul P se ridică perpendiculara MP pe planul dreptunghiului, $MP = 3\sqrt{3} \text{ cm}$. Se cere:
 - a) Măsura unghiului format de dreapta MC cu planul dreptunghiului;
 - b) Unghiul format de dreptele MC și BD.

Radu Nicolae, Ploiești

PROBLEME PROPUSE PENTRU CONCURSUL REZOLVITORILOR

CLASA a V-a

1. Suma dintre dublul primului număr și triplul de-al doilea este 2488. Împărțind primul număr la sfertul celui de-al doilea obținem catul 3 și restul 2. Aflați cele două numere.
2. a) Câte numere naturale cuprinse între 1909 și 2105 sunt divizibile cu 10?
b) Determinați suma numerelor naturale cuprinse între 1909 și 2105 care împartite la 28 dau restul 5 și împartite la 35 dau restul 12.
3. Fie $A = 2008^{2009} + 2009^{2009} + 2006^{2008}$ și
 $B = 2010 \cdot 2009 - 2009 \cdot 2008 - 2 \cdot 2008 + 2 \cdot 2007 - 2 \cdot 2006$
Stabiliți dacă numerele A și B sunt pătrate perfecte.
4. Se da numărul $A = 5^n + 6^{n^2} + 7^{n^2+n}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Arătați că $n^2 + n$ este număr par;
b) Aflați ultima cifră a numărului A.
(OLM Arges, 2008-Subiecte selectate de Aurelian Costache, Pitesti)
- 5.a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
$$\frac{1999 \cdot 3^2 - 1999 \cdot 2^3 - 1999 \cdot 1999^0 + 5^{3^0}}{7^2 - 5 \cdot 2^3} = \frac{a}{b},$$

unde $a = u(1555^{2000})$ și $b = u(1999^{1999})$. ($u(n)$ este ultima cifră a numărului n).
b) Calculați: $\left[5^{100} : \left(5^{7^2} \right)^2 \right] \cdot (3^3 - 2 \cdot 3^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$.

Mihail Foșeneanu, Ploiești

6. Dacă dintr-o cantitate de grâu se așază câte 70 kg într-un sac rămân 40 kg nepuse în saci. Dacă se pun câte 75 kg într-un sac rămân 5 saci goi și încă 10 kg de grâu. Câți saci s-au folosit pentru întreaga cantitate de grâu?

Alexandru Pavel, Mangalia

CLASA a VI-a

1. Determinați cel mai mic număr natural care împărțit, pe rând, la numerele 24; 40 și 56 dă, de fiecare dată, restul 5 și câtul diferit de 0.

2. Determinați ultimele 3 zecimale nenule ale numărului rațional $\frac{2007}{2^{2008}}$.

prof. Irinel Pancu

3. Fie $B \in (AC)$ și D, E două puncte de o parte și de alta a dreptei AC astfel încât triunghiurile ABD și BCE să fie echilaterale. Considerăm $S \in (AB)$, $T \in (BC)$ astfel încât $m(\angle DSB) = m(\angle ETC) = 90^\circ$ și $DS \cap EC = \{P\}$, $ET \cap AD = \{F\}$. Dacă P, B, F sunt coliniare și D, B, E sunt coliniare, arătați că AD=BC

prof. Nicolae Stănică

4. Să se afle măsura unghiului format de bisectoarele a două unghiuri adiacente, știind că raportul dintre suplementul sumei lor și suma suplementelor lor este $\frac{1}{4}$.

prof. Ștefan Iloaie, G.M. nr. 7/2006

(OLM Braila, 2008-Subiecte selectate de prof. Nicolae Stanica)

5. Aflați x din relația:

$$(9^{23} \cdot x - 9^{23} - 3) : 2 = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{46}$$

Maria și Anton Negrilă, Ploiești

6. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ pentru care $n^2 = x \cdot y$, dacă $x = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 6 + \dots + 2005 \cdot 2006$ și $y = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + 2005^2$

Luminița Corneci Vălenii de Munte

CLASA a VII-a

1. a) Demonstrați că $\sqrt{1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008} \notin \mathbb{Q}$.

b) Dacă $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}$, demonstrați că $\frac{1}{2} < S < 1$.

2. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât: $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{a+c} = \frac{c}{a+b}$. Arătați că:

a) $\sqrt{\frac{a+b}{a+2b+3c} + \frac{b+c}{b+2c+3a} + \frac{c+a}{c+2a+3b}} \in \mathbb{Q}$;

b) $\sqrt{\frac{ab}{c(2a-b)} + \frac{bc}{a(2b-c)} + \frac{ca}{b(2c-a)}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. Fie ABCD un paralelogram. Notăm cu M punctul în care se intersectează bisectoarele unghiurilor A și D și cu N punctul în care se intersectează bisectoarele unghiurilor B și C.

a) Calculați măsura unghiului AMD;

b) Demonstrați că $MN \parallel AB$.

4. Se dă $\triangle ABC$ cu $AB=4\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$, $AC=5\text{cm}$. Prelungim latura $[AB]$ cu segmentul $[BD]$, $BD=6\text{cm}$ și latura $[AC]$ cu segmentul $[CE]$, $CE=3\text{cm}$.

a) Calculați lungimea segmentului $[DE]$;

b) Dacă $\{M\} = BC \cap DE$, calculați $P_{\triangle MCE}$.

(OLM Arges, 2008-Subiecte selectate de prof. Dumitru Borocan)

5. Fie triunghiul oarecare ABC, cu $AB < AC$. Se prelungește $[CA]$ dincolo de A cu $[AD] \equiv [AB]$, $A \in (DC)$, apoi se prelungește $[BA]$ dincolo de A cu $[AE] \equiv [AC]$, $A \in (BE)$. Dacă $\{P\} = BC \cap DE$, demonstrați că:

a) $\triangle ABC \equiv \triangle ADE$.

b) $[PC] \equiv [PE]$.

c) $[AP]$ este bisectoarea unghiului $\angle BAD$.

Liviu Ardelean, Sibiu

6. În triunghiul ABC, măsurile unghiurilor A, B, C sunt direct proporționale cu 3, 7, respectiv 2. Să se arate că unghiul dintre dreapta AB și înălțimea din A este congruent cu unghiul dintre AC și mediana din A.

Constantin Apostol, Rm. Sărat

CLASA a VIII-a

1. a) Verificați dacă este cub perfect numărul: $n = 3^{2007} + 3^{1895} + 3^{1782} + 3^{1668}$.
G.M. 9/2007, E:13518

b) Se consideră fracția:

$$F(x) = \frac{x^2(x^2 + 10x + 25) + 12x(x + 5) + 35}{(x + 2)(x + 3) + 1}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-3, -2\}$$

Arătați că $F(x) \in \mathbb{N}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$.

2. a) Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $\sqrt{1! + 2! + 3! + \dots + n!} \in \mathbb{Q}$. S-a notat $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

b) Fie a, b, c numere reale. Dacă $a + 2b + 3c = 7m$, $m \neq 0$, arătați că

$$(a - m)^2 + (b - 2m)^2 + (c - 3m)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

3. În interiorul unghiului XOY cu măsura de 60° se consideră punctul A depărtat de $[OX]$ la 2 cm și față de $[OY]$ la 11 cm. În punctul A pe planul (XOY) se ridică perpendiculara AM, $AM = 4\sqrt{3}$ cm.

- a) calculați distanța de la M la laturile unghiului;
b) calculați lungimea segmentului OM.

4. Să se determine numerele raționale a și b astfel încât

$$\sqrt{2a^2 + 8a + 8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{(b - 3)^2} \cdot \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

(OLM Vashui, 2008)

5. Un număr $\overline{abcd}$ se poate scrie ca suma a 13 numere naturale consecutive, sau ca suma a 23 de numere naturale consecutive, sau ca suma a 29 de numere naturale consecutive. Demonstrați că numărul $\overline{dcba}$ se poate scrie ca suma a 13 numere naturale consecutive sau ca suma a 17 numere naturale consecutive.

Cristinel Mortici, Târgoviște

6. Să se scrie numărul 83^{83} sub forma $x^2 + y^2 + z^2$ unde x, y, z sunt numere naturale distincte.

Ion și Lucica Preda, Râmnicu-Vâlcea