

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU

Clasa a IX-a

1. Dacă triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate, să se calculeze:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$$

Mirică Vasile Eduard, Student, Pitești

2. Se consideră triunghiul ABC în reperul cartezian $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ și M, N, P mijloacele laturilor $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Se știe că $\overrightarrow{OM} = \vec{i}$, $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OP} = -\vec{i} + 6\vec{j}$

- Să se determine coordonatele punctelor M, N, P;
- Să se determine coordonatele punctelor A, B, C;
- Să se determine coordonatele vectorilor $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$

3. Se consideră un triunghi dreptunghic ΔABC ($m(\sphericalangle BAC) = 90^\circ$) a cărui perimetru este de 60 cm și care are catetele direct proporționale cu 3 și 4. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC) astfel încât laturile triunghiului ΔAMD sunt numere naturale și perimetrul său este cel mult egal cu 30 cm, unde D este proiecția lui A pe BC.

- Să se calculeze distanța de la A la planul (MBC).
- Dacă punctele P și Q sunt mobile astfel încât $P \in [AM]$ și $Q \in [BC]$ să se determine lungimea minimă a segmentului $[PQ]$.

Romeo Zamfir, Galati

4. Fie ABCDEF un hexagon convex în care avem că $m(\widehat{ABC}) \equiv m(\widehat{DEF}) < 90^\circ$, $[AB] = [EF]$ și $[BC] = [DE]$. Să se arate că mijloacele segmentelor $[AF]$, $[BE]$, $[CD]$ sunt coliniare.

Cristinel Mortici, Targoviste

5. Fie funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(a) = \max_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{3}{4 + \cos x} + \cos x + a \right|$. Determinați valoarea minimă a lui f .

Gabriel Tica, Băilești, Dolj

6. Determinați numerele naturale n pentru care $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+57} + \sqrt{n+25} \in \mathbf{N}$.

Felicia Ozunu, Vulcan

Clasa a X-a

1 Să se arate că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$ nu pot fi termenii unei progresii geometrice.

Boncescu Marcela, Costești

2 Fie funcția $f: R \rightarrow R$ definite prin $f(x) = |x + [x]|$

- a) Sa se reprezinte grafic funcția;
- b) Sa se studieze bijectivitatea funcției;
- c) Sa se determine $x \geq 0$ astfel incat

$$f(x) + f\left(x + \frac{1}{3}\right) + f\left(x + \frac{2}{3}\right) = 3x + 2.$$

Mibaela Doinaru, Sinaia

3 Să se rezolve inegalitatea: $6^{|x^2-3x+2|} < 36^{x+1}$

4. Se dau numerele întregi $a_1, a_2, \dots, a_n$, aflate în progresie aritmetică. Știind că suma lor este nulă și că suma pătratelor lor este egală cu 280, să se afle termenul al 5-lea.

Emil Dumitrescu, Galati

5. Să se calculeze $\sum_{k=1}^{2004} \left[\frac{3^k}{13} \right]$, unde $[x]$ desemnează partea întreagă a numărului real x .

Iuliana Duma, Galati

6. Aratați ca $\forall z_1, z_2 \in C$ are loc relația

$$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Clasa a XI-a

1.

- a. Să se determine numerele reale a, b, astfel încât:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(4a^2 - 2b + 1)n + b}{(b^2 - 4a + 1)n + a} = -1$$

- b. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n^2 - 1} + \frac{2}{2n^2 - 2} + \dots + \frac{n}{2n^2 - n} \right)$

- c. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 3 + \dots + n^2 \cdot (n+1)}{1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \dots + n(n+1)^2}$

- d. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an+1}{2n+3} \right)^{2007n}$, (Discuție după $a \in (0, \infty)$)

- e. Fie $a_n = \sum_{k=1}^n \log_{\frac{1}{3}} \left[\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} \right]$, Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Boncescu Florin Cristian, Ciuleanu Ionela, Studenți București

2. Determinați matricele $A, B \in M_2(N)$ astfel încât $AB = I_2$

Marian Teler, Costești

3. **Sa se arate** că primele κ zecimale ale numărului $\sqrt[10^k]{2}$ sunt zerouri:

Ștefan Savu, Maneciu

4. Fie matricea $A \in M_n(\mathbb{N})$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n+1 & n+2 & \dots & 2 \cdot n - 1 \end{pmatrix}$. De pe fiecare linie a

matricei A se alege câte un element (număr), astfel încât orice două elemente (numere) alese să fie de pe coloane diferite. Să se demonstreze că suma acestor numere nu depinde de modul în care se face alegerea lor.

5. Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$ care pentru orice numere naturale m și n

verifică relația: $x_m \cdot x_n \cdot (x_n^2 + x_m^2) + 8 \leq 6 \cdot x_n^2 + 4x_m^2$. Să se calculeze:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n \cdot \sin^2 \left(\pi \cdot \sqrt[2001]{n^{2001} + 1} \right) \right).$$

Romeo Zamfir, Galați

6. Dacă $a, b, x, y \in (0, \infty)$ atunci arătați că:

$$(x+y) \cdot a^x \cdot b^y \leq x \cdot a^{x+y} + y \cdot b^{x+y}$$

Mihai Dicu, Craiova

Clasa a XII-a

1. Fie $G = (-2, 2)$ și $x \circ y = \frac{4(x+y)}{4+xy}$

a) Să se rezolve ecuația: $\left(\frac{a}{a^2 - a + 1} \right) \circ \left(a - 1 + \frac{1}{a} \right) = \frac{26}{15}$.

b) Calculați $a^3 - b^3$, știind că numerele a, b , verifică relația: $\left(\frac{a}{b} \right) \circ \left(\frac{b}{a} \right) = \frac{8}{5}$.

c) Calculați valoarea expresiei:

$$\left[\left(\frac{1}{2} \circ \frac{4}{7} \right) - 1,1022 \right]^2 + 2 \left[\left(\frac{1}{2} \circ \frac{4}{7} \right) - 1,1022 \right] \left[\left(\frac{1}{2} \circ \frac{4}{7} \right) + 1,1022 \right] + \left[\left(\frac{1}{2} \circ \frac{4}{7} \right) + 1,1022 \right]^2$$

d) Calculați: $\left(-\frac{1}{2007} \right) \circ \left(-\frac{1}{2006} \right) \circ \dots \circ (-1) \circ 1 \circ \dots \circ \left(\frac{1}{2006} \right) \circ \left(\frac{1}{2007} \right)$.

e) Găsiți $a, b \in (R - Q) \cap G$, astfel încât $a \circ b \in Q - Z$.

Marian Teler, Costești și Marian Ionescu, Pitești

2. Fie $f: R \rightarrow R$ o funcție cu proprietățile

a) $f(\sin x) \in \mathbb{Q}, (\forall) x \in \mathbb{R}$,

b) Există $a, b \in [-1, 1]$ astfel încât $f(a) \neq f(b)$.

Să se demonstreze că funcția f nu admite primitive.

Marian Teler, Costești

3. Să se determine grupurile $(G, \cdot)$ cu proprietatea că dacă H este subgrup al lui G , $H \neq \{e\}$ (e este elementul neutru al grupului G), atunci $(H, \cdot)$ este izomorf cu $(G, \cdot)$.

4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$. Considerăm mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x; n) \neq 1\}$. Să se arate că A este parte stabilă a mulțimii $\mathbb{Z}$ față de adunarea numerelor întregi dacă și numai dacă numărul natural n este o putere a unui număr prim.

5. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție injectivă și primitivabilă, iar $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a sa.

(i) Arătați că $\forall a, b \in \mathbb{R}$ cu $a \neq b$ avem $F(a) - F(b) \neq (a - b) \cdot f(b)$.

(ii) Demonstrați că $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b$, tangentele la graficul funcției F în $A(a, F(a)), B(b, F(b))$ sunt concurente într-un punct C cu $x_c \in (a, b)$.

6. Fie $g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a.i. $g \in \int h(x) dx$, $h \in \int g(x) dx$ și $g(0) = h'(0) = 2$, $g'(0) = h(0) = 1$.

a) Să se determine funcțiile g, h .

b) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Să se demonstreze echivalența:

f admite primitive pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $f \cdot g$ și $f \cdot h$ admit primitive pe $\mathbb{R}$.

Gabriel Necula, Ploiești

**INSPECTORATUL SCOLAR AL
JUDETULUI PRAHOVA
Olimpiada Nationala de Matematica
Etapa locala, 26 ianuarie 2008**

CLASA A IX-A

1. Arătați că $1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} < 2$, $n \in \mathbb{N}^*$

2. Să se rezolve ecuația: $\{nx\} - \{(n+1)x\} = x$, unde $n \in \mathbb{N}^*$. Prin $\{a\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real a .

Prof. Petre Nachila, Prof. Catalin Nachila

3. Fie $A_1, A_2, \dots, A_9$ puncte distincte pe un cerc si $H_i, i = \overline{1,9}$, ortocentrele triunghiurilor $A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, \dots, A_7A_8A_9, A_8A_9A_1$ respectiv $A_9A_1A_2$. Atunci triunghiurile $H_1H_4H_7, H_2H_5H_8$ si $H_3H_6H_9$ au acelasi centru de greutate.

Prof. Claudiu Militaru

4. Fie cercurile $C(O_1, a), C(O_2, b), C(O_3, c)$, tangente exterior doua cate doua si $\{T_1\} = C(O_1, a) \cap C(O_2, b), \{T_2\} = C(O_2, b) \cap C(O_3, c)$ respectiv $\{T_3\} = C(O_3, c) \cap C(O_1, a), a, b, c > 0$.

Sa se arate ca : a) dreptele O_1T_2, O_2T_3, O_3T_1 sunt concurente.

$$b) \overrightarrow{O_1T_2} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{O_1O_3} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$c) \overrightarrow{O_1T_2} + \overrightarrow{O_2T_3} + \overrightarrow{O_3T_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \Delta O_1O_2O_3 \text{ echilateral.}$$

Prof. Nedelcu Ion

CLASA A X-A

1. Fie numarul : $a = \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$
- demonstrati ca $a \in \mathbb{N}$
 - pentru $a = 4$ rezolvati ecuatia $[a+x] + \log_3[a+x] + 3^{[a+x]} = 31$.
(prin $[x]$ s-a notat partea intreaga a numarului real x)

Prof. Radu Nicolae

2. Fie sirul cu termenul general $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{90k-1}{10^k}, n \in \mathbb{N}^*$

- Sa se arate ca sirul este monoton.
- Sa se exprime x_n in functie de n .
- Sa se arata ca sirul este marginit

Prof. Dafina Anghel

3. Fie $a, b, c \geq 0$ cu proprietatea ca $a+b+c=1$. Sa se arata ca:

$$\frac{1}{2} \leq \frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}.$$

Prof. Nedelcu Ion

4. Fie $z \in C^* - \{0,1\}, n \in N^*$

- a) Sa se determine z stiind ca z^n, z^{n+1}, z^{n+2} sunt afixele varfurilor unui triunghi dreptunghic.
 b) Sa se reprezinte geometric imaginile punctelor obtinute.

Prof. Petre Nachila si Prof. Catalin Nachila

CLASA A XI-A

1. Fie matricele $A, B \in M_3(Z)$, $A = \begin{pmatrix} pa_1 + a & pb_1 & pc_1 \\ pa_2 & pb_2 + b & pc_2 \\ pa_3 & pb_3 & pc_3 + c \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 638 & 469 & 203 \\ 1274 & 939 & 406 \\ 1911 & 1407 & 610 \end{pmatrix}.$$

a) Folosind proprietatile determinantilor sa se arate ca : $\det A = k p + \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$,

$k \in R$

- b) Sa se arate ca $\det B \neq 0$.
 c) Sa se determine B^{-1} .

Prof. Gabriel Necula

2. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$ definit astfel: $x_1 = 1, (n+1)x_{n+1} = x_n + \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$. Sa se arate ca:

a) $x_n \leq \frac{1}{n-1}, n \geq 2$.

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x_n = 1$.

Prof. Nedelcu Ion

3. Sa se determine limita sirului $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{C_n^k}{a^n + k}, a > 0$.

Prof. Petre Nachila si Prof. Catalin Nachila

4. Pentru orice $M \in M_2(R)$ notam cu $S(M)$ suma elementelor sale. Fie $A \in M_2(R)$ astfel incat

$$S(A)=S(A^2)=S(A^3)\in R^*, B=I_2-A, T=\{B^n/n\in N^*\}.$$

a) Daca A nu e inversabila, determinati $|T|$

b) Daca A e inversabila si T finita, aratati ca $|T|\leq 4$

Prof. Emil Vasile

CLASA A XII-A

$$1. \text{ Fie } f, g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x \sin x + \cos x} \text{ si } g(x) = \begin{cases} \frac{x}{x \cos x - \sin x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

a) Demonstrati ca f admite primitive si g nu admite primitive.

b) Calculati primitivele lui f^2 .

Prof. Coman Vasile

2. Fie $(G, \cdot)$ grup, cu elementul neutru e si $m, n, k \in \mathbb{N}^*$, fixate

$$\text{Dacă } x^{mn} = e \text{ si } y^k = x^m y x^{-m}, x, y \in G, \text{ atunci } y^{k^n - 1} = e.$$

Prof. Ovidiu Avramescu

3. Fie $a \in \mathbb{Z}^*$ si functia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care admite o primitiva F astfel incat:

$$[f(x)] = a, [F(x)] = [ax], \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Sa se arate ca } F \text{ este bijectiva si sa se determine } f. \\ (\text{prin } [x] \text{ s-a notat partea intreaga a numarului real } x)$$

Prof. Emil Vasile

$$4. \text{ Fie } M = \left\{ A(a, b) = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix}, a, b \in R_+^* \right\}.$$

a) Sa se arate ca $(M, \cdot)$ este grup $\Leftrightarrow b = \frac{1-k}{k}a, k \in (0,1)$;

b) Pentru $b = \frac{1-k}{k}a, k \in (0,1)$, sa se arate ca $(M, \cdot) \cong (R_+^*, \cdot)$.

Prof. Nedelcu Ion

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 27.01.2007
(RADU SIMION SI CATEDRA DE MATEMATICA A C.N. MIHAI VITEAZUL)

CLASA A-IX-A

- 1.a) Arătați că: $\sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{10}$ nu este număr rațional.
 b) Arătați că $(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5})$ nu este număr rațional.
2. Dacă n este un număr natural, demonstrați că $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right]$.
 ([x] reprezintă partea întreagă a lui x .)
3. Pe laturile unui triunghi ABC se consideră punctele $M \in (BC), N \in (AB), P \in (AC)$ astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{2}, \frac{BN}{NA} = \frac{1}{3}, \frac{CP}{PA} = x$. Fie R astfel încât $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$. Să se determine x , astfel încât punctele A, R, M să fie coliniare.

Prof. Ion Nedelcu, Ploiești

4. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $N \in (AD), M \in (AB)$ astfel încât $\frac{AN}{AD} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$; G_1 - centrul de greutate al triunghiului ABC , G_2 - centrul de greutate al triunghiului ADC și $MG_2 \cap NG_1 = \{O\}$. Să se arate că:
- a) $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$
 b) $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AG}$, unde G este centrul de greutate al patrulaterului $ABCD$, adică $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

Prof. Leu Gabriela, Sinaia

CLASA A-X-A

1. a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $5^{4x} - 34 \cdot 15^{2x-1} + 3^{4x} = 0$.
 b) Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația: $(x^2 - 3x + 6)^4 - 29x^2(x^2 - 3x + 6)^2 + 100x^4 = 0$.

Prof. Dumitran Sânziana, Câmpina

2. Fie $a, b, c \in (1, \infty)$. Să se arate că:

$$\frac{\log_a^2 b}{\log_b c + 2 \log_c a} + \frac{\log_b^2 c}{\log_c a + 2 \log_a b} + \frac{\log_c^2 a}{\log_a b + 2 \log_b c} \geq 1, (\forall) a, b, c \in (1, \infty).$$

Prof. Leu Gabriela, Sinaia

3. Se consideră triunghiul ABC având afixele vârfurilor z_A, z_B, z_C de modul $r > 0$ și care verifică relația $z_A + z_B + z_C = r^3$. Determinați raportul ariilor triunghiurilor MNP

și ABC dacă punctele M, N, P au respectiv afixele $z_M = \frac{z_A z_B + z_A z_C}{z_B z_C}$,

$$z_N = \frac{z_B z_C + z_B z_A}{z_C z_A}, \quad z_P = \frac{z_C z_A + z_C z_B}{z_A z_B}.$$

4. Determinați numerele complexe z de modul 10, astfel încât :

$$[\operatorname{Re} z] + [\operatorname{Re}(\varepsilon z)] + [\operatorname{Re}(\varepsilon^2 z)] + \dots + [\operatorname{Re}(\varepsilon^5 z)] = 0, \text{ unde}$$

$$\varepsilon = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}.$$

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x .)

Prof. Emil Vasile, Ploiești

CLASA a XI-a

1. Fie $A \in M_2(\mathbb{R})$. În $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}^2$ se cunosc elementele aflate pe pozițiile (1, 1), (1, 2)

astfel: 2, respectiv 3 în $\mathcal{A}$, 4 respectiv 12 în $\mathcal{A}^2$.

Să se arate că $A^n = n \cdot 2^{n-1} \cdot A - (n-1) \cdot 2^n \cdot I_2$, pentru orice $n \geq 1$.

Prof. Gabriel Necula, Prahova

2. Calculați determinantul :

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x \dots & x \\ x & a_2 & x \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x \dots & a_n \end{vmatrix}, \text{ unde } a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ și } x \in \mathbb{R}^* \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

3. Fie șirul de numere reale $(y_n)_{n \geq 1}$, cu $y_1 > 0$ și

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n}, (\forall) n \geq 1.$$

a) Studiați convergența șirului.

b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{n+1}}{y_n} \right)^{n^2 y_n^2}$.

Prof. Emil Vasile, Ploiești

4. Fie $a > 1$. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin :

$$x_0 = 0, x_1 = 1, (a+1)^{x_{n+2}} = a^{x_{n+1}} + (\sqrt{2a+1})^{x_n}, \forall n \geq 0.$$

Să se demonstreze că șirul este convergent și să se determine limita șirului.

Prof. Petre Năchilă, Prof. Cătălin Năchilă, Ploiești

CLASA a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ un grup comutativ cu $4k+2$ elemente și $a \in G$.

a) Arătați că G conține un unic element de ordin 2.

b) Aflați numărul de elemente ale mulțimii $M = \{x \in G \mid x^{2k+1} = a\}$.

2.a) Să se calculeze $\int \frac{x^2}{x + \operatorname{ctg} x} dx, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$; b) Să se calculeze

$$\int \frac{(x-1) \ln x - 1}{e^x + x \ln x} dx, x \geq 1.$$

Prof. Ion Nedelcu, Ploiești

3. Fie $I_n = \int_0^1 x^n \cos \frac{\pi x}{2} dx, n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se determine I_1, I_2 și o relație de recurență.

b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.

Prof. Petre Năchilă, Prof. Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Fie $A = [0, 1)$, $c \in \mathbb{R}$ și $*$: $A \times A \rightarrow A$ prin $x * y = \{x + y + c\}$, $\forall x, y \in A$.

a) Studiați dacă $(A, *)$ este grup.

b) Determinați funcțiile $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât f, g admit primitive, iar $(A, \circ)$ este grup, unde $x \circ y = \{f(x) + g(y)\}$, $\forall x, y \in A$, ($\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x).

Prof. Emil Vasile, Ploiești

Soluții clasa a IX-a

1.a) Presupunem prin absurd că $\sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{10} = a, a \in \mathbb{Q}_+$.

$$\sqrt{6} + \sqrt{15} = a - \sqrt{10} \Rightarrow 21 + 2\sqrt{90} = a^2 + 10 - 2a\sqrt{10} \Rightarrow$$

$$(6 + 2a)\sqrt{10} = a^2 - 11 \Rightarrow \sqrt{10} = \frac{a^2 - 11}{6 + 2a} \in \mathbb{Q}$$

contradicție cu faptul că

$\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$. Deci $\sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{10}$ nu este număr rațional.

b) Presupunem prin absurd că

$$(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{5}) \in \mathbb{Q} \Rightarrow 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{30} \in \mathbb{Q}$$

$$(1 - \sqrt{2})(1 - \sqrt{3})(1 - \sqrt{5}) = \frac{(1-2)(1-3)(1-5)}{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})(1+\sqrt{5})} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15} - \sqrt{30} \in \mathbb{Q}$$

Adunăm și obținem $2 + \sqrt{6} + \sqrt{10} + \sqrt{15} \in \mathbb{Q}$ în contradicție cu a). De aici rezultă concluzia.

2. Avem

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{4n+2} \Leftrightarrow 2n+1 + 2\sqrt{n^2+n} < 4n+2 \Leftrightarrow 4n^2 + 4n < 4n^2 + 4n + 1,$$

adevărat.

Rezultă $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] \leq \left[\sqrt{4n+2} \right]$. Presupunem prin absurd că există $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k \leq \sqrt{4n+2} \Rightarrow k^2 \leq 4n+2$ și cum un pătrat perfect are doar forma $4m$ sau $4m+1$ rezultă $k^2 \leq 4n+1$. Dar $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} < k \leq \sqrt{4n+1} \Rightarrow 2n+1+2\sqrt{n^2+n} < 4n+1 \Rightarrow 4n^2+4n < 4n^2$, contradicție, deci $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right] = \left[\sqrt{4n+2} \right]$.

3. Vom nota toți vectorii de forma $\overrightarrow{AT}$ cu T . Astfel $N = \frac{3}{4}B$, $M = \frac{2}{3}B + \frac{1}{3}C$,

$$P = \frac{1}{x+1}C.$$

$$\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow R - M = N - M + P - M \Rightarrow R = N + P - M = \frac{3}{4}B + \frac{1}{x+1}C - \frac{2}{3}B - \frac{1}{3}C = \frac{1}{12}B + \frac{2-x}{3x+3}C.$$

$$R, M \text{ sunt coliniare} \Leftrightarrow R \text{ și } M \text{ sunt vectori proporționali} \Leftrightarrow \frac{\frac{1}{12}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

4.a) Vom nota toți vectorii de forma $\overrightarrow{AT}$ cu T . Astfel

$$M = \frac{1}{3}B, N = \frac{1}{3}D, G_1 = \frac{A+B+C}{3} = \frac{B+C}{3}, G_2 = \frac{A+D+C}{3} = \frac{D+C}{3} \Rightarrow \frac{G_1+N}{2} = \frac{M+G_2}{2}, \text{ de unde}$$

MG_1G_2N este paralelogram (mijloacele diagonalelor coincid), deci

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}.$$

$$\text{b) } O = \frac{M+G_2}{2} = \frac{B+C+D}{6}. \text{ Din}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow A - G + B - G + C - G + D - G = \vec{0} \Rightarrow$$

$$G = \frac{B+C+D}{4} \text{ deci } 2G = 3O \Rightarrow 3(G-O) = G \text{ adică } 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AG}.$$

Soluții clasa a X-a

$$1. \text{ a) Împărțim cu } 9^{2x} \text{ și notând } \left(\frac{25}{9} \right)^x = t \text{ obținem } t^2 - \frac{34}{15}t + 1 = 0 \text{ cu soluțiile } \frac{3}{5}, \frac{5}{3}$$

$$\text{de unde } x = \pm \frac{1}{2}.$$

b) Împărțim cu x^4 și notând $\frac{x^2-3x+6}{x^2} = t$ obținem $t^2 - 29t + 100 = 0$ cu soluțiile

25, 4. Se obțin 4 ecuații

$$x^2 - 3x + 6 = 5x, x^2 - 3x + 6 = -5x, x^2 - 3x + 6 = 2x, x^2 - 3x + 6 = -2x \text{ cu}$$

$$\text{rădăcinile: } 4 \pm \sqrt{10}, -1 \pm i\sqrt{5}, 2, 3, \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}.$$

2. Notăm

$$x = \log_a b, y = \log_b c, z = \log_c a, x, y, z > 0 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a}{\lg c} = 1.$$

Aplicăm inegalitatea $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$ (care rezultă prin inducție din

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x+y)^2}{a+b} \Leftrightarrow (bx-ay)^2 \geq 0) \text{ și inegalitatea mediilor:}$$

$$\frac{x^2}{y+2z} + \frac{y^2}{z+2x} + \frac{z^2}{x+2y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} = 1.$$

$$\begin{aligned} 3. z_M - z_N &= \frac{z_A^2 z_B + z_A^2 z_C - z_B^2 z_C - z_B^2 z_A}{z_A z_B z_C} = \frac{(z_A - z_B)(z_A z_B + z_B z_C + z_C z_A)}{z_A z_B z_C} = (z_A - z_B) \left(\frac{1}{z_A} + \frac{1}{z_B} + \frac{1}{z_C} \right) = \\ &= (z_A - z_B) \left(\frac{\overline{z_A}}{r^2} + \frac{\overline{z_B}}{r^2} + \frac{\overline{z_C}}{r^2} \right) = (z_A - z_B) r \Rightarrow \left| \frac{z_M - z_N}{z_A - z_B} \right| = r \Rightarrow \frac{MN}{AB} = r. \text{ Analog} \end{aligned}$$

$$\frac{NP}{BC} = \frac{PM}{CA} = r \text{ deci triunghiurile } MNP \text{ și } ABC \text{ sunt asemenea și au raportul ariilor } r^2.$$

4. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Relația devine

$$[a] + \left[\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} \right] + \left[-\frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} \right] + [-a] + \left[-\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} \right] + \left[\frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} \right] = 0.$$

Folosind faptul că $[x] + [-x] = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Z} \\ -1, & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$ obținem că $a, \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2}, \frac{a}{2} + \frac{b\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{Z}$

de unde $a, b\sqrt{3} \in \mathbb{Z}$ și cum $a^2 + b^2 = 100$ rezultă $z \in \{\pm 10, 5 \pm 5i\sqrt{3}, -5 \pm 5i\sqrt{3}\}$

(considerând cazurile $a^2 \in \{0, 1, 2^2, \dots, 10^2\}$).

Soluții clasa a XI-a

1. Avem $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix}$ și $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ c & d \end{pmatrix}$. Din

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+3a & 6+3b \\ 2a+ba & 3a+b^2 \end{pmatrix} \text{ rezultă } 4+3a=4, 6+3b=12, \text{ adică } a=0, b=2.$$

Acum $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2 + B$, unde $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $B^k = O_2, \forall k \geq 2$. Din binomul

lui Newton:

$$A^n = (2I_2 + B)^n = 2^n I_2 + n2^{n-1} B = 2^n I_2 + n2^{n-1} (A - 2I_2) = n \cdot 2^{n-1} \cdot A - (n-1) \cdot 2^n \cdot I_2.$$

2. Scădem prima linie din toate celelalte și obținem

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x-a_1 & a_2-x & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x-a_1 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}. \text{ Dăm factor comun de pe coloane}$$

$x-a_1, a_2-x, \dots, a_n-x$ și obținem

$$D = (x-a_1)(a_2-x)\dots(a_n-x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{x-a_1} & \frac{x}{a_2-x} & \frac{x}{a_3-x} & \dots & \frac{x}{a_n-x} \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}. \text{ Adunăm}$$

toate coloanele la prima și dezvoltăm determinantul superior triunghiular

$$D = (x-a_1)(a_2-x)\dots(a_n-x) \left(\frac{a_1}{x-a_1} + \frac{x}{a_2-x} + \dots + \frac{x}{a_n-x} \right) (-1)^{n-1}$$

$$D = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n) \left(\frac{a_1}{x-a_1} + \frac{x}{a_2-x} + \dots + \frac{x}{a_n-x} \right).$$

3. a) Prin inducție după $n \geq 1, y_n > 0$ de unde $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n} > 0$,

adică $(y_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

$$y_{k+1} - y_k = \frac{1}{y_1 + 2y_2 + \dots + ky_k} < \frac{1}{y_1 + 2y_1 + \dots + ky_1} = \frac{2}{y_1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), (\forall) k \geq 1.$$

Adunăm inegalitățile $y_{k+1} - y_k < \frac{2}{y_1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$ pentru $k = 1, \dots, n-1$ și obținem

$$y_n - y_1 < \frac{2}{y_1} \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \frac{2}{y_1}, \text{ deci } (y_n)_{n \geq 1} \text{ este mărginit superior. Din teorema lui}$$

Weierstrass rezultă că $(y_n)_{n \geq 1}$ este convergent la $L \in \mathbb{R}$.

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{y_{n+1}}{y_n} \right)^{n^2 y_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y_{n+1} - y_n}{y_n} \right)^{\frac{y_n - y_{n+1} - y_n n^2 y_n^2}{y_{n+1} - y_n}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 y_n}{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n}} = e^2 \text{ pentru că din}$$

$$T. Stolz-Cesaro \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 y_n}{y_1 + 2y_2 + \dots + ny_n} = L \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{(n+1)y_{n+1}} = L \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)}{(n+1)y_{n+1}} = L \cdot \frac{2}{L} = 2.$$

4. Arătăm prin inducție după $n \geq 2$ că $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n$. Pentru $n = 2$, rezultă din ipoteză ($x_2 = 1$). La pasul de inducție

$$(a+1)^{x_{n+1}} = a^{x_n} + (\sqrt{2a+1})^{x_{n-1}} \geq a^{x_{n-1}} + (\sqrt{2a+1})^{x_{n-2}} = (a+1)^{x_n} \Rightarrow x_{n+1} \geq x_n.$$

Arătăm prin inducție după $n \geq 2$ că $x_n \leq 2$. Pentru $n = 2$, rezultă din ipoteză ($x_2 = 1$).

$$\text{La pasul de inducție } (a+1)^{x_{n+1}} = a^{x_n} + (\sqrt{2a+1})^{x_{n-1}} \leq a^2 + (\sqrt{2a+1})^2 = (a+1)^2 \Rightarrow x_{n+1} \leq 2.$$

Din teorema lui Weierstrass rezultă că $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent la $L \in \mathbb{R}$. Trecem la limită în

$$\text{relația de recurență și obținem } (a+1)^L = a^L + (\sqrt{2a+1})^L. \text{ Împărțim cu } (a+1)^L \text{ și}$$

$$\text{pentru că funcția } f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\frac{a}{a+1} \right)^x + \left(\frac{\sqrt{2a+1}}{a+1} \right)^x \text{ este suma a două funcții}$$

strict descrescătoare (deci strict descrescătoare, rezultă injectivă) avem unica soluție $L = 2$.

Soluții clasa a XII-a

1. a) Presupunem că există două elemente diferite $x, y \in G$ de ordin 2. Atunci mulțimea $T = \{e, x, y, xy\}$ formează un subgrup cu 4 elemente al lui G (din tabla operației “ $\cdot$ ” pe T), în contradicție cu Teorema lui Lagrange $(4 | 4k+2)$.

Dacă, prin absurd, nu există elemente de ordin 2, atunci elementele mulțimii $G \setminus \{e\}$ se pot

$$\text{grupa câte 2 în submulțimi disjuncte, } z \text{ cu } z^{-1}, \text{ adică } G \setminus \{e\} = \bigcup_{z \in G \setminus \{e\}} \{z, z^{-1}\},$$

contradicție cu faptul că $G \setminus \{e\}$ are $4k+1$ elemente.

Rezultă că G conține un unic element de ordin 2.

b) Din Teorema lui Lagrange $x^{4k+2} = e, \forall x \in G$, deci, dacă $a^2 \neq e$, rezultă $\text{card } M = 0$.

Dacă a este egal cu t , unicul element de ordin 2 din G , notăm cu $N = \{x \in G \mid x^{2k+1} = e\}$ și $f: N \rightarrow M, f(x) = t \cdot x \cdot f$ este bine definită (dacă $x \in N$, $(t \cdot x)^{2k+1} = t^{2k+1} \cdot x^{2k+1} = t \cdot e = t$) și bijectivă (inversa ei este funcția $g: M \rightarrow N, g(x) = t \cdot x$), iar cum $N \cap M = \emptyset, N \cup M = G$ (oricare $x \in G, x^{4k+2} = e \Rightarrow (x^{2k+1})^2 = e$ și din a) rezultă $x^{2k+1} \in \{e, t\}$, rezultă $\text{card } N = \text{card } M = 2k + 1$.

Prin urmare $\text{card } M = 0$, dacă $a \notin \{e, t\}$ și $\text{card } M = 2k + 1$, dacă $a \in \{e, t\}$.

2.a) Notăm $f(x) = x + \text{ctgx}$, atunci $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sin^2 x} = -\text{ctg}^2 x$ și cum

$x^2 = (x + \text{ctgx})(x - \text{ctgx}) - (-\text{ctg}^2 x)$ avem

$$\int \frac{x^2}{x + \text{ctgx}} dx = \int (x - \text{ctgx}) dx - \int \frac{-\text{ctg}^2 x}{x + \text{ctgx}} dx = \frac{x^2}{2} - \ln(\sin x) - \ln(x + \text{ctgx}) + C$$

b) Vom folosi următoarea observație: $\int \frac{a \cdot f(x) + b \cdot f'(x)}{f(x)} dx = a \cdot x + b \cdot \ln|f(x)| + C$.

Notăm $f(x) = e^x + x \ln x$, atunci $f'(x) = e^x + \ln x + 1$ și cum

$(x-1) \ln x - 1 = f(x) - f'(x)$ rezultă că

$$\int \frac{(x-1) \ln x - 1}{e^x + x \ln x} dx = x - \ln(e^x + x \ln x) + C.$$

$$3. a) I_1 = \int_0^1 x \cos \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 x \left(\frac{2 \sin \frac{\pi x}{2}}{\pi} \right)' dx = \left(x \frac{2 \sin \frac{\pi x}{2}}{\pi} \right) \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi} \int_0^1 \sin \frac{\pi x}{2} dx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2\pi-4}{\pi^2}.$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n \cos \frac{\pi x}{2} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \cos \frac{\pi x}{2} dx = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} \cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 + \frac{\pi}{2n+2} \int_0^1 x^{n+1} \sin \frac{\pi x}{2} dx = \\ &= \frac{\pi}{2n+2} \int_0^1 \left(\frac{x^{n+2}}{n+2} \right)' \sin \frac{\pi x}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2n+2} \left(\left(\frac{x^{n+2}}{n+2} \sin \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 - \frac{\pi}{2n+4} \int_0^1 x^{n+2} \cos \frac{\pi x}{2} dx \right) = \frac{\pi}{2n+2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{\pi}{2n+4} I_{n+2} \right) \text{ deci} \\ I_n &= \frac{\pi}{2n+2} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{\pi}{2n+4} I_{n+2} \right), \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

Procedăm analog cu $I_0 = \int_0^1 x' \cdot \cos \frac{\pi x}{2} dx$ și rezultă $I_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} I_2 \right)$, dar

$$I_0 = \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi x}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}, \text{ deci } I_2 = \frac{4(\pi^2 - 8)}{2\pi^3}.$$

b) $x^n \cos \frac{\pi x}{2} \geq 0$ pe $[0, 1]$ deci $I_n \geq 0$. Pe

$$[0, 1] \quad x^n \geq x^{n+1} \Rightarrow x^n \cos \frac{\pi x}{2} \geq x^{n+1} \cos \frac{\pi x}{2} \Rightarrow I_n \geq I_{n+1}.$$

Deci $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător și mărginit inferior. Conform Teoremei lui Weierstrass

$(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Notăm cu L limita șirului, trecem la limită în relația de recurență de la a) și rezultă $L = 0$.

4. a) În cursul rezolvării vom folosi că $\{a + k\} = \{a\}$, $k \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$.

$(A, *)$ este grup. $x * y = \{x + y + c\} = y * x \in [0, 1)$, deci $*$ este lege de compoziție comutativă pe A .

Asociativitatea:

$$(x * y) * z = \{\{x + y + c\} + z + c\} = \{x + y + c - [x + y + c] + z + c\} = \{x + y + z + 2c\} \text{ și}$$

$$x * (y * z) = \{x + \{y + z + c\} + c\} = \{x + y + z + c - [y + z + c] + c\} = \{x + y + z + 2c\}.$$

Elementul neutru este $\{-\{c\}\} \in [0, 1)$ pentru că

$$x * \{-\{c\}\} = \{x + \{-\{c\}\} + c\} = \{x - \{c\} - [-\{c\}] + [c] + \{c\}\} = x, \text{ simetricul}$$

oricărui $x \in [0, 1)$ este $\{-x - 2\{c\}\} \in [0, 1)$ pentru că

$$x * \{-x - 2\{c\}\} = \{x + \{-x - 2\{c\}\} + c\} = \{x - x - 2\{c\} - [-x - 2\{c\}] + [c] + \{c\}\} = \{-\{c\}\}.$$

b) $(A, \circ)$ este grup, deci există $e \in A$ element neutru.

$$\forall x \in A, x \circ e = x \Rightarrow \{f(x) + g(e)\} = x \Rightarrow f(x) + g(e) - x \in \mathbb{Z} \text{ și cum}$$

$f(x) + g(e) - x$ are primitive, deci are proprietatea lui Darboux pe A rezultă că

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in A, f(x) = x + \alpha. \text{ Analog folosind } \forall x \in A, e \circ x = x,$$

$$\exists \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in A, g(x) = x + \beta. \text{ Atunci } x \circ y = \{x + y + \alpha + \beta\} \text{ și având în vedere}$$

rezultatul de la a) $f(x) = x + \alpha$, iar $g(x) = x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.