REVISTA SCOLII GIMNAZIALE BALCESTI

Nr. 40 **2021**

COLECTIVUL DE REDACŢIE

COORDONARE:
FONDATOR BOGDAN CONSTANTIN
REDACTOR- ŞEF: DOBRE ROXANA , BUJOR MARIA MIHAELA
CONSULTANT: COJOCARU MIHAELA , CEPOI DELIA , RADOI CARMEN

TEHNOREDACTARE:OPREA RADU, IENCUT CRISTINA

CORECTOR:COJAN GEORGIANA

PUBLICARE REVISTA:BOGDAN CONSTANTIN

Adresa redactiei:
BALCESTI , COMUNA BENGESTI CIOCADIA

Fiecare autor îşi asumă responsabilitatea pentru conţinutul textului publicat.

TESTE BACALAUREAT MATEMATICA M1
TESTE COMPLETE CU BAREM

PROF DR BOGDAN CONSTANTIN

Partea 1

Testul 1

Subiectul I

1. Calculați suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_1=3$ și $a_2=5$.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+2$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(4^x-1)(4^x-4)=0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conțină cifra 2.

5. Se dă triunghiul echilateral ABC, cu $BC=3$. Calculați lungimea vectorului $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$.

6. Calculați aria triunghiului ABC, știind că $A=90°$ și $AC=AB=2$.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$a_3=7$ $a_4=9$ $a_1+a_2+a_3+a_4=24$	2p 2p 1p
2.	$x_v=1$ $y_v=1$	2p 3p
3.	$4^x=1$ sau $4^x=4$ $x=0$ sau $x=1$	2p 3p
4.	Sunt 18 numere de două cifre care conțin cifra 2, deci sunt 18 cazuri favorabile Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $p=\dfrac{nr.cazuri\ favorabile}{nr.cazuri\ posibile}=\dfrac{18}{90}=\dfrac{1}{5}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ ΔABC echilateral $\Rightarrow BC=3$	2p 3p
6.	$A_{\Delta ABC}=\dfrac{2\cdot2\cdot\sin90°}{2}=2$	5p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}3 & x & x\\ x & 3 & 3\\ x & x & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det A(0)=27$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $\det A(x)=0$.

c) Determinați inversa matricei $A(0)$.

2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-3X^2+3X+a$, unde $a\in\mathbb{R}$.

a) Calculați $f(-1)-f(1)$.

b) Arătați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3$.

c) Determinați numărul real a știind că $X-1$ divide polinomul f.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$\det A(0)=\begin{vmatrix}3&0&0\\0&3&3\\0&0&3\end{vmatrix}=$	2p
	$=27+0+0-0-0-0=27$	3p
b)	$\det A(x)=\begin{vmatrix}3&x&x\\x&3&3\\x&x&3\end{vmatrix}=(x-3)^2(x+3)$	3p
	$(x-3)^2(x+3)=0 \Leftrightarrow x=-3$ sau $x=3$	2p
c)	Adjuncta este $\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&-9\\0&0&9\end{pmatrix}$	3p
	Inversa este $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$	2p
2.a)	$f(-1)=a-7$	2p
	$f(1)=1+a$	2p
	$f(-1)-f(1)=-8$	1p
b)	$x_1+x_2+x_3=3,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=3$	2p
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=3^2-2\cdot 3=3$	3p
c)	$f(1)=0 \Rightarrow$	3p
	$a=-1$	3p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+\ln x}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

a) Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{4}{3}$.

b) Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul real $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{f(x)}dx$.

Arătați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Determinați numărul real pozitiv m știind că $\int_1^m \dfrac{2x}{f(x)}dx=\ln\dfrac{5}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. a)	$f'(x)=\frac{(x+\ln x)'\cdot x-(x+\ln x)\cdot x'}{x^2}=$	3p
	$=\frac{1-\ln x}{x^2},\ x\in(0,+\infty)$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1$	3p
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(e)=0,\ f'(x)>0$, pentru orice $x\in(0,e)$ și $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(e,\infty)$	3p
	Intervalele de monotonie sunt $(0,e]$ și $[e,\infty)$	2p
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$	2p
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^n(x-1)}{x^2+1}dx$,	2p
	pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,1]$ avem $x^n\geq 0,\ x-1\leq 0,\ x^2+1>0\Rightarrow I_{n+1}\leq I_n$	3p
c)	$\int_1^m\frac{2x}{f(x)}dx=\left(\ln(x^2+1)\right)\Big\vert_1^m=\ln(m^2+1)-\ln 2$	3p
	$\ln(m^2+1)-\ln 2=\ln 5-\ln 2\Leftrightarrow m=2$	2p

Subiectul I

1. Arătați că $3(2-4i)+2(1+6i)=8$.
2. Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+4$ este tangentă la axa Ox.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x^2+1}=5^{2x}$.
4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifrele 2, 4, 6 și 8.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,1)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta BC.
6. Arătați că $\sin\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}=0$.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$6-12i+2+12i=$	3p
	$=6+2=8$	2p
2.	$\Delta=4-4=$	3p
	$=0$, deci parabola asociată funcției f este tangentă la axa Ox	2p
3.	$x^2+1=2x\Leftrightarrow x^2-2x+1=0$	3p
	$x=1$	2p
4.	Cifra unităților se poate alege în 4 moduri	3p
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	2p
5.	Panta dreptei BC este $m_{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow m_d=-2$	2p
	$d: y=-2x-1$	3p

6.	$\sin\frac{7\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	2p
	$\cos\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sin\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{7\pi}{4}=0$	3p

1. Se consideră matricea $A(n)=\begin{pmatrix}1 & 3^n-1 & 0\\ 0 & 3^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde n este număr real.

a) Arătați că $\det A(1)=3$.

b) Verificați dacă $A(n)\cdot A(m)=A(n+m)$.

c) Arătați că $A(-100)\cdot A(-99)\cdot A(-98)\cdot\ldots\cdot A(99)\cdot A(100)=A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-3$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2+X.

c) Arătați că $(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2=2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f.

1.*a)*	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=$	2p
	$=3+0+0-0-0-0=3$	3p
b)	$A(n)\cdot A(m)=\begin{pmatrix}1 & 3^{n+m}-1 & 0\\ 0 & 3^{n+m} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$	3p
	$=A(n+m)$	2p
c)	$A(-100)\cdot A(-99)\cdot A(-98)\cdots A(99)\cdot A(100)=$	2p
	$=A(-100-99-\cdots+99+100)=A(0)$	3p
2.*a)*	$f(1)=1^3+1^2-3$	3p
	$=-1$	2p
b)	Câtul este X	3p
	Restul este -3	2p
c)	$x_1+x_2+x_3=-1,\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=0$	2p
	$(x_1+x_2)^2+(x_2+x_3)^2+(x_3+x_1)^2=2(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=2$	3p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+e^x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x)\geq x+2$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

a) Arătați că $\int_0^1\left(x^2-x+1\right)f(x)\,dx=0$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

c) Arătați că $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\int_0^t x^2 f(x)\,dx}{t^2}=1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de punc

1.a)	$f'(x)=(1)'+\left(e^x\right)'=$	
	$=e^x$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$	3p
	dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$g'(0)=0$, $g'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,0)$ și $g'(x)>0$ pentru orice $x\in(0,\infty)$, unde	3p
	$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-x-2=e^x-x-1$	3p
	$g(x)\geq g(0)\Rightarrow g(x)\geq 0\Rightarrow f(x)\geq x+2$ pentru orice număr real x	2p
2.a)	$\int_0^1\left(x^2-x+1\right)f(x)dx=\int_0^1(2x-1)dx=$	2p
	$=\left(x^2-x\right)\Big\|_0^1=1-1=0$	3p
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\ln(x^2-x+1)\Big\|_0^1=$	3p
	$=\ln 1-\ln 1=0$	2p

Subiectul I

1. Calculați z^2 știind că $z=2-3i$.

2. Arătați că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$ nu intersectează axa Ox.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x+3)=\log_2(x+7)$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu conțină cifra 7.

5. În triunghiul ABC, punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor AB, BC și respectiv AC. Arătați că $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

6. Știind că $\operatorname{tg}a=1$ și $a\in\mathbb{R}$, arătați că $\sin a-\cos a=0$.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z^2=(2-3i)^2=4-12i-9=$	2p
	$=-5-12i$	3p
2.	$\Delta=-7$	3p
	$\Delta<0$, deci parabola asociată funcției f nu intersectează axa Ox	2p
3.	$2x+3=x+7$	2p
	$x=4$ care verifică ecuația	3p
4.	72 de numere naturale de două cifre nu conțin cifra 7, deci sunt 72 de cazuri favorabile	2p
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	1p
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{72}{90}=\dfrac{4}{5}$	2p
5.	$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=$	2p
	$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\vec{0}$	3p
6.	$\sin a-\cos a=\cos a(\operatorname{tg} a-1)=$	3p
	$=0$	2p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x & 0\\ 1 & 0 & x\end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

a) Calculați $\det A(2)$.

b) Determinați numerele reale a știind că $\det A(a)=0$.

c) Determinați inversa matricei $A(1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-5x-5y+30$.

a) Calculați $1*1*1$.

b) Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*\ldots*x}_{x\text{ de }2018\text{ ori}}=x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A(2)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{vmatrix}=$	2p
	$=0$	3p
b)	$\det A(a)=a^2-2a$	3p
	$a^2-2a=0 \Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	2p
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \left(A(1)\right)^*=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$	2p
	$\det A(1)=-1$	1p
	$\left(A(1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}$	2p

2.a)	$1*1*1=21*1=-59$	
b)	$(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=$	3p
	$=x*y$, pentru orice numere reale x, y	2p
c)	$(x-5)^{2018}+5=x$	3p
	$\Rightarrow x-5=0$ sau $1 \Rightarrow$	2p
	$x_1=5, x_2=6$	3p 2p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2-x+1}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^{e^e-1}\ln^n(x+1)\,dx$.

a) Calculați I_0.

b) Arătați că $I_1+I_0=e^{e+1}-e$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=\infty$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x)'(x^2-x+1)-x(x^2-x+1)'}{(x^2-x+1)^2}=$	2p
	$=\dfrac{-x^2+1}{(x^2-x+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-x+1}=0$	3p
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=-1$ și $x_2=1$	2p
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$	1p
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$	1p
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	1p
2.a)	$I_1=\int_0^{e-1}(x+1)'\ln(x+1)\,dx=(x+1)\ln(x+1)\Big\vert_0^{e-1}-\int_0^{e-1}dx=$	3p
	$=e\ln e-e+1=1$	2p
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^{e-1}(\ln(x+1)-1)\ln^n(x+1)\,dx$	2p
	Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in[0,e-1]$ avem $\ln(x+1)\ge 0$ și $\ln(x+1)-1\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n$	3p
c)	$I_{n+1}=\int_0^{e-1}(x+1)'\ln^{n+1}(x+1)\,dx=(x+1)\ln^{n+1}(x+1)\Big\vert_0^{e-1}-(n+1)\int_0^{e-1}\ln^n(x+1)\,dx=$	3p
	$=e-(n+1)I_n\Rightarrow I_{n+1}+(n+1)I_n=e$, pentru orice număr natural nenul n	2p

Subiectul I

1. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ dacă $a_2=3$.
2. Aflați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 2x=\log_3(3-x)$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural din mulțimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 7.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$ și $B(2,1)$. Determinați coordonatele punctului M știind că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}$.
6. Arătați că $\sin\dfrac{5\pi}{12}+\cos\dfrac{11\pi}{12}=0$.

(30 de puncte)

1.	$a_1 + a_3 = 2a_2 = 6$ $S_3 = \frac{(a_1+a_3)\cdot 3}{2} = 9$	3p 2p
2.	$x_V = 2$ $y_V = -4$	2p 3p
3.	$2x = 3 - x$ Rezultă $x = 1$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Numerele de două cifre cu produsul cifrelor egal cu 7 sunt 17 și 71 $\Rightarrow$ 2 cazuri favorabile. Numărul de numere naturale de două cifre este 90 $\Rightarrow$ 90 de cazuri posibile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{45}$	2p 1p 2p
5.	$\overrightarrow{AB} = \vec{i} + \vec{j}$ și $\overrightarrow{AM} = (x_M - 1)\vec{i} + (y_M - 0)\vec{j}$ $\overrightarrow{AM} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow x_M = 3,\ y_M = 2$	2p 3p
6.	$\cos\frac{11\pi}{12} = -\cos\frac{\pi}{12} =$ $= -\sin\frac{5\pi}{12} \Rightarrow \sin\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{11\pi}{12} = 0$	2p 3p

Subiectul I

1. Determinați numărul real x pentru care numerele 1, x și 9 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție cu axa Ox a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + 3$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{1+x^2} = 2^5$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 200.

5. Fie dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 6$ și $BC = 8$. Calculați lungimea vectorului $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

6. Calculați sinusul unghiului A al triunghiului ABC, în care $AB = 12$, $BC = 20$ și $5\sin C = 3$.

1.	$x = \frac{1+9}{2}$ $x = 5$	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ sau $x = -3$ Distanța este egală cu 2	3p 2p
3.	$1 + x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = 4$ Rezultă $x = \pm 2$, care verifică ecuația	3p 2p
4.	Sunt 900 de numere cu trei cifre Multiplii lui 200 sunt 200,400,600,800 Probabilitatea este $\frac{4}{900} = \frac{1}{225}$	2p 2p 1p

5.	$\vec{v}=\overrightarrow{AC}$	3p
	$\lvert\vec{v}\rvert=10$	2p
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$	2p
	$\sin A=1$	3p

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare număr real m se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 1 & m\\ 1 & m & 1\\ m+1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(-1))$.

b) Calculați rangul matricei $A(1)$.

c) Determinați numerele raționale m pentru care $\det A(m)=0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă dată de $x\circ y=2xy-7x-7y+28$.

a) Verificați dacă $2(x\circ y)=(2x-7)(2y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.

b) Arătați că $x\circ 4=4\circ x=x$, pentru orice număr real x.

c) Calculați $\frac{1}{2}\circ\frac{2}{2}\circ\frac{3}{2}\circ\ldots\circ\frac{2018}{2}\circ\frac{2019}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(-1))=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=$	2p
	$=-4$	3p
b)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$	1p
	$\det A(1)=0$	1p
	$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1\neq 0$	2p
	Rangul este 2	1p
c)	$\det(A(m))=(m-1)(-m^2-2m+1)$	2p
	$\det(A(m))=0\Leftrightarrow m=1$ sau $m=-1\pm\sqrt{2}$	2p
	Rezultă $m=1$	1p
2.a)	$(2x-7)(2y-7)+7=4xy-14x-14y+56=$	3p
	$=2(x\circ y)$, pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$x\circ 4=8x-7x-28+28=x$, pentru orice număr real x	2p
	$4\circ x=x\Rightarrow x\circ 4=4\circ x=x$, pentru orice număr real x	3p
c)	$a\circ\frac{7}{2}=\frac{7}{2}\circ a=\frac{7}{2}$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$	3p
	$\frac{1}{2}\circ\frac{2}{2}\circ\frac{3}{2}\circ\ldots\circ\frac{2018}{2}\circ\frac{2019}{2}=\frac{7}{2}$	2p

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $M(x)=\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det M(0)$.

b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $4M(x)-(M(x))^2=-5I_3$.

c) Determinați inversa matricei $M(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+X-2$, unde m este număr real.

a) Calculați $f(1)-f(-1)$.

b) Determinați valorile reale ale lui m știind că restul împărțirii polinomului f la $X-1$ este egal cu 2.

c) Determinați numerele reale m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(0))=$	2p
	$=0+8+8-0-0-0=16$	3p
b)	$(M(x))^2=\begin{pmatrix} x^2+8 & 4x+4 & 4x+4 \\ 4x+4 & x^2+8 & 4x+4 \\ 4x+4 & 4x+4 & x^2+8 \end{pmatrix}$	2p
	$4M(x)-(M(x))^2=\begin{pmatrix} 4x-x^2-8 & 4-4x & 4-4x \\ 4-4x & 4x-x^2-8 & 4-4x \\ 4-4x & 4-4x & 4x-x^2-8 \end{pmatrix}$	1p
	Rezultă $4-4x=0$ și $4x-x^2-8=-5$	1p
	Obținem $x=1$	1p
c)	$M(1)\cdot(4I_3-M(1))=-5I_3$	2p
	Matricea $M(1)$ este inversabilă și inversa ei este $\frac{1}{5}(-4I_3+M(1))$	3p
2.a)	$f(1)=-m$,	2p
	$f(-1)=-m-4 \Rightarrow$	2p
	$f(1)-f(-1)=4$	1p
b)	Restul împărțirii lui f la $X-1$ este $f(1) \Rightarrow f(1)=2 \Rightarrow$	3p
	$m=-2$	2p
c)	$x_1+x_2+x_3=m$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$	2p
	$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-2$	1p
	$m^2-2=-1 \Leftrightarrow m=1$ sau $m=-1$	2p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

c) Calculați $\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)^x$.

2. Pentru fiecare număr real t, se consideră numărul $I_t=\int_0^1 xe^{tx}\,dx$.

a) Arătați că $I_{-1}=\frac{e-2}{e}$.

b) Arătați că $I_t\le\frac{e^t}{2}$.

c) Determinați numerele reale t pentru care $t^2 I_t=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x-1)'(x^2+1)-(x-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	2p
	$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	3p
b)	$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$	3p
	$=\frac{1}{2}$	2p
c)	$\lim_{x\to+\infty} xf(x)=1$	1p
	$\lim_{x\to+\infty}\left(xf(x)\right)^{x)}=e^{\lim_{x\to+\infty} x(xf(x)-1)}=$	2p
	$=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-x}{x^2+1}}=\frac{1}{e}$	2p
2.a)	$I_{-1}=\int_0^1 xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}\Big\vert_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx=$	3p
	$=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big\vert_0^1=\frac{e-2}{e}$	2p

b)	$I_t \le \int\limits_0^1 xe^t dx =$	
	$= e^t \frac{x^2}{2}\Big\|_0^1 = \frac{e^t}{2}$	3p
c)	$t^2 I_t = t^2 \int\limits_0^1 xe^{tx} dx = t\int\limits_0^1 x(e^{tx})' dx =$	2p
	$= txe^{tx}\Big\|_0^1 - e^{tx}\Big\|_0^1 = te^t - e^t + 1$	1p
	$t^2 I_t = 1 \Rightarrow (t-1)e^t = 0 \Rightarrow t = 1$	2p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.*a)*	$f'(x) = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$	3p
	$= -\frac{2}{(1+x)^2}$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$	2p
b)	$f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$	2p
	$\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-1, \infty)$	3p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$	2p
		2p

	$\lim\limits_{x\to -1} \frac{1-x}{1+x} = -\infty$	
	Dreptele $y = -1$ şi $x = -1$ sunt asimptotele graficului funcţiei f.	2p
2.*a)*	$I_0 = \int_1^e e^x\, dx =$	2p
	$= e^x\Big\|_1^e = e^e - e$	3p
b)	$I_1 = \int_1^e xe^x\, dx = xe^x\Big\|_1^e - I_0 \Rightarrow$	3p
	$I_1 + I_0 = e^{e+1} - e$	2p
c)	$I_n = \int_1^e x^n e^x dx \ge \int_1^e x^n\, dx =$	2p
	$= \frac{e^{n+1}-1}{n+1}$	1p
	Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$	2p

Subiectul I

1. Calculați partea reală a numărului complex $(3-2i)^2$.

2. Calculați $x_1+x_2+x_1x_2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-3x+1=0$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+1=2\cdot 9^x$.

4. Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Determinați numărul submulțimilor lui A cu două elemente.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, -3)$ și $B(7, 13)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

6. Determinați $\text{ctg}\, x$, știind că $\dfrac{\sin x+2\cos x}{\cos x}=3$.

(30 de puncte)

1.	$(3-2i)^2=9-12i-4$	3p
	Partea reală este egală cu 5	2p
2.	$x_1+x_2=3$	2p
	$x_1x_2=1$	2p
	$x_1+x_2+x_1x_2=4$	1p
3.	$(3^x-1)\left(3^x+\frac{1}{2}\right)=0$	2p
	$\Rightarrow 3^x=1$	2p
	$\Rightarrow x=0$	1p
4.	Mulțimea are 6 elemente	1p
	Numărul submulțimilor cu două elemente este $C_6^2=$	2p
	$=15$	2p
5.	Fie M mijlocul segmentului AB. $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=3$	3p
	$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=5$	2p
6.	$\sin x+2\cos x=3\cos x$	2p
	$\sin x=\cos x$	1p
	$\text{ctg}\, x=1$	2p

SUBIECTUL al II-lea

$\cos x$

Subiectul al II-lea

1. Se notează cu $D(a, b, c)$ determinantul matricei $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $D(1, 2, 3)$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $D(1, 2, x)=2$.

c) Știind că $D(a, b, c)+D(b, c, a)=10$, calculați $D(c, a, b)$.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ și funcția $f:\mathbb{Z}_5\to\mathbb{Z}_5$, $f(x)=x^3+\hat{2}x^2+\hat{2}$.

a) Calculați $f(\hat{1})$.

b) Descompuneți în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$ polinomul $P=X^3+\hat{2}X^2+\hat{2}\in\mathbb{Z}_5[X]$.

c) Arătați că funcția f nu este injectivă.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$D(1,2,3)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=$	2p
	$=18+4+3-2-12-9=2$	3p
b)	$D(1,2,x)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&x\\1&4&x^2\end{vmatrix}$	1p
	$=x^2-3x+2$	2p
	$D(1,2,x)=2 \Leftrightarrow x=0$ sau $x=3$	2p
c)	$D(a,b,c)=D(b,c,a)=D(c,a,b)$	1p
	$D(a,b,c)+D(b,c,a)=10 \Rightarrow D(a,b,c)=5$	2p
	$\Rightarrow D(c,a,b)=5$	2p
2.a)	$f(\hat{1})=\hat{1}+\hat{2}+\hat{2}=$	4p
	$=\hat{0}$	1p
b)	P are rădăcina $\hat{1}$	1p
	$P=(X-\hat{1})(X^2+\hat{3}X+\hat{3})$ este descompunerea cerută, deoarece	2p
	polinomul $X^2+\hat{3}X+\hat{3}$ este ireductibil	2p
c)	$f(\hat{2})=\hat{3}$,	2p
	$f(\hat{4})=\hat{3}$	2p
	deci f nu este injectivă	1p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}}$.

a) Arătați că $f'(x)(x^2+3)=-xf(x)$, pentru orice număr real x.

b) Determinați asimptota spre $+\infty$ la graficul f.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$.

a) Arătați că funcția $F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{1}{2}\ln^2 x-2018$, este o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\displaystyle\int_e^{e^2}\frac{dx}{f(x)}$.

c) Aflați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=e$ și $x=e^2$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\dfrac{-x}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$	3p
	Finalizare	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$	3p
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$	2p
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	1p
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,0]$	2p
	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in[0,+\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$	2p
2.a)	F este derivabilă și $F'(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, pentru orice $x>0$	5p
b)	$\int_e^{e^2} x\ln x dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_e^{e^2}-\dfrac{1}{2}\int_e^{e^2} xdx=$	3p
	$=e^4-\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{4}\left(e^4-e^2\right)=\dfrac{3}{4}e^4-\dfrac{1}{4}e^2$.	2p
c)	Aria este egală cu $\int_e^{e^2}\left\|\dfrac{1}{x\ln x}\right\|dx=\int_e^{e^2}\dfrac{1}{x\ln x}dx$	2p
	$=F(e^2)-F(e)=\dfrac{1}{2}(4-1)=\dfrac{3}{2}$	3p

Subiectul I

1. Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x-1|\leq 4\}$.
2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a dreptelor $y=2x-1$ cu parabola $y=-3x-1$.
3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{1+x}=1+x$.
4. Se consideră mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A, care conțin exact două numere impare.
5. Determinați lungimea segmentului $[AB]$, unde $A(1,-2)$ și $B(3,4)$.
6. Știind că $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=0,6$, calculați $\sin x$.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$-4 \le x-1 \le 4$	
	$-3 \le x \le 5$	2p
	Card $A = 9$	2p
2.	$2x-1=-3x-1$	2p
	$x=0$	1p
	Punctul de intersecție este $(0,-1)$	2p
3.	$1+x=1+3x+3x^2+x^3$	2p
	$x(x^2+3x+2)=0$	1p
	$x_1=0, x_2=-1, x_3=-2$	1p
4.	Alegem 2 numere impare din cele 3 în $C_3^2=3$ moduri	3p
	Alegem un număr par din cele 2 în 2 moduri	2p
	Sunt 6 submulțimi	1p
5.	$AB=\sqrt{(3-1)^2+(4+2)^2}=$	2p
	$=2\sqrt{10}$	3p
6.	$\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-0.36 = 0,64$	2p
	$x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \sin x = 0,8$	3p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+m^2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile lui m pentru care determinantul matricei sistemului este nul.
b) Determinați valorile lui m pentru care rangul matricei sistemului este egal cu 2.
c) Rezolvați sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Q}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy + x + y$.

a) Calculați $1*2*3$.
b) Arătați că legea de compoziție $*$ admite element neutru.
c) Rezolvați în mulțimea numerelor raționale ecuația $x*x*x=-1$.

(30 de puncte)

1.a)	$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(m-1)^2(m+1)$	3p
	$\Rightarrow m = \pm 1$	2p
b)	Conform punctului anterior, $m=\pm 1$	2p
	Pentru $m=1$, rangul este 1	1p
	Pentru $m=-1$, rangul este 2, deci $m=-1$	2p
c)	Pentru $m=1$, rangul este 1	2p
	Pentru $m \ne 1$, rangul este 3	3p
2.a)	$1*2=5$	2p
	$1*2*3=23$	3p
b)	Trebuie să arătăm că există $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	2p
	$x*e=x \Leftrightarrow xe+e=0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, deci $e=0$	3p
c)	$x*x*x=-1+(x+1)^3$	2p
	$x*x*x=-1$ implică $x=-1$	3p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3+x+2$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(-x)}$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției duse din punctul $a(-1, 0)$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq1}$, $I_n=\int_0^1(x-x^2)^n dx$.

a) Calculați I_1.

b) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este monoton.

c) Demonstrați că $4^n I_n\leq 1$, oricare ar fi $n\geq1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1a)	$f(-x)=-x^3-x+2$	2p
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3+x+2}{-x^3-x+2}=-1$	3p
b)	$f'(x)=3x^2+1$	2p
	$f'(x)\geq0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare	3p
c)	$f(-1)=0, f'(-1)=4$	2p
	Ecuația tangentei este $y=4x+4$	3p
2a)	$I_1=\int_0^1(x-x^2)dx=$	1p
	$=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^1=$	3p
	$=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	1p
b)	$I_n-I_{n+1}=\int_0^1(1+x^2-x)(x-x^2)^n dx\geq0$ pentru orice n,	3p
	deoarece $(1-x)+x^2\geq0$ și $(x-x^2)^n\geq0$, deci șirul este descrescător.	2p
c)	$0\leq x-x^2\leq\frac{1}{4}, x\in[0,1]$	2p
	$4^n(x-x^2)^n\leq1, x\in[0,1]$	2p
	Prin integrare rezultă cerința	1p

Subiectul I

1. Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_1+b_2=6$ și $b_2-b_1=2$.

2. Calculați $f(g(f(1)))$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x-1$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=3x$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{5}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^x$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 9.

5. Calculați distanța de la punctul $A(2,2)$ la mijlocul segmentului determinat de punctele $B(2,0)$ și $C(0,2)$.

6. Triunghiul ABC are măsura unghiului A de $120°$, $AB=2$ și $AC=5$. Calculați $\overline{AB}\cdot\overline{AC}$.

SUBIECTUL I		
1.	$b_2 = 4$	2p
	$b_1 = 2$	2p
	$q = 2$	1p
2.	$f(1) = 0$	2p
	$g(0) = 0 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow f(g(f(1))) = -1$	1p
3.	$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^{-x}$	2p
	$x = -x$	2p
	$x = 0$	1p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	2p
	Sunt 9 numere naturale cu suma cifrelor, deci sunt 9 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{10}$	1p
5.	Mijlocul lui BC este $M(1,1)$	2p
	Distanța este $\sqrt{(2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{2}$	3p
6.	$\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$	2p
	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A =$	2p
	$= -5$	1p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră mulțimea, $M = \left\{ A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2 - A = O_2 \right\}$.

a) Arătați că $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M$.

b) Demonstrați că, dacă $A \in M$, atunci $A^{2018} \in M$.

c) Arătați că, dacă matricea $A \in M$, este inversabilă, atunci $A = I_2$.

2. Polinomul $f = (X+1)^{10} - (X-1)^{10}$ are forma algebrică $f = a_9 X^9 + a_8 X^8 + \ldots + a_1 X + a_0$, $a_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1,10}$.

a) Calculați $f(1) \cdot f(-1)$.

b) Calculați a_8.

c) Determinați restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}$	3p
	Așadar $\begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix}\in M$	2p
b)	$(A^{2018})^2 = A^{4036} = (A^2)^{2018} =$	3p
	$= A^{2018}$, deci $A^{2018}\in M$	2p
c)	$A\in M \Rightarrow A(A-I_2)=O_2$. Prin înmulțire cu A^{-1} la stânga rezultă	4p
	$A=I_2$	1p
2.a)	$f(1)=2^{10}$	2p
	$f(-1)=-2^{10} \Rightarrow f(1)\cdot f(-1)=-2^{20}$	3p
b)	a_8 este coeficientul lui X^8, deci este egal cu	1p
	$C_{10}^8 - C_{10}^8(-1)^2 =$	2p
	$=0$	2p
c)	Restul este $r=aX+b\in\mathbb{R}[X]$,	1p
	$f(1)=a+b, f(-1)=-a+b$	2p
	$a=2^{10}, b=0 \Rightarrow r=2^{10}X$	2p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+5$.

a) Calculați $\lim_{x\to 1}\frac{f^2(x)}{(x-1)^2}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f ce este paralelă cu axa Ox.

c) Calculați $\lim_{x\to -\infty}\left(\sqrt{f(x)}+x\right)$.

2. Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=x^2+1$.

a) Calculați $\int_0^1 g(x)dx$.

b) Calculați $\int_0^1 \frac{x^3}{g(x^2)}dx$.

c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, definit prin $I_n=\int_n^{n+1}\frac{g(2x)}{g(x)}dx$, este convergent.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f^2(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}(x-5)^2=$	4p
	$=16$	1p
b)	Derivata $f'(x)=2x-6$ se anulează în 3	3p
	$f(3)=-4$, deci ecuaţia tangentei este $y=-4$	2p
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{f(x)}+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-6x+5}{\sqrt{x^2-6x+5}-x}=$	3p
	$=\frac{6}{1+1}=3$	2p
2.a)	$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{4}{3}$	2p
b)	$\int_0^1\frac{x^3}{g\left(x^2\right)}dx=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{4x^3}{x^4+1}dx-\frac{1}{4}\ln\left(x^4+1\right)\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{1}{4}\ln 2$	2p
c)	$I_n=\int_n^{n+1}\frac{4x^2+1}{x^2+1}dx=\int_n^{n+1}\left(4-\frac{3}{x^2+1}\right)dx=$	3p
	$=4-(3\operatorname{arctg}x)\Big\vert_n^{n+1}=4-3\operatorname{arctg}(n+1)+3\operatorname{arctg}n$, deci şirul este convergent la 4	2p

Subiectul I

1. Calculaţi modulul numărului complex $3-4i$.
2. Fie funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ şi $g(x)=x-1$. Rezolvaţi inecuaţia $f(g(x))\geq$
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+2x+1}=2$.
4. Determinaţi numărul elementelor mulţimii $A=\{3^2,3^5,3^8,\ldots,3^{2018}\}$.
5. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(2,5)$ şi $C(6,-3)$. Calculaţi lungimea medianei corespunzătoare laturii $[BC]$, în triunghiul ABC.
6. Calculaţi $\sin 15°-\cos 75°$.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert 3-4i\rvert = \sqrt{9+16} =$	3p
	$=5$	2p
2.	$f(g(x)) = 2x-1$	3p
	$2x-1 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1$	2p
3.	$\lvert x+1\rvert = 2 \Rightarrow$	2p
	$x=1$ și	1p
	$x=-3$	2p
4.	2, 5, 8,…, 2018 sunt în progresie aritmetică cu rația 3.	2p
	Numărul termenilor este 673.	3p
5.	Mijlocul segmentului $[BC]$ este $M(4,1)$.	3p
	Lungimea medianei este $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.	2p
6.	$\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$, unghiurile fiind complementare. Rezultă că	3p
	$\sin 15^\circ - \cos 75^\circ = 0$	2p

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+az=1 \\ 2ax+2y+(a+1)z=0 \end{cases}$, unde a este parametru real.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.

b) Verificați dacă, pentru $a=1$, sistemul este compatibil.

c) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

2. Fie polinomul $f = X^3 - 3X^2 + X - 2$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați $f(i)$.

b) Determinați restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 3X + 1$.

c) Calculați $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.

SUBIECTUL al II-lea

1.a)	Determinantul este egal cu $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 2a & 2 & a+1 \end{vmatrix} =$	2p
	$=2(a-1)^2$	3p
b)	A treia ecuație este $2x+2y+2z=0$	2p
	Cum prima ecuație este $x+y+z=1$, obținem $2=0$,	2p
	deci sistemul este incompatibil	1p
c)	Pentru $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ sistemul are determinantul nenul.	3p
	Conform teoremei lui Cramer, sistemul are soluție unică	2p
2.a)	$f(i) = -i+3+i-2 =$	3p
	$=1$	2p
b)	Câtul este X	3p
	Restul este $r=-2$.	2p
c)	$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1}{x_1x_2x_3}$, $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1, x_1x_2x_3 = 2$	3p

	Rezutatul este $\frac{1}{2}$	
		2p

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+3)}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x=-3$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin $f(x)=\sqrt{x^2+9}$.

a) Calculați $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx$.

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este crescătoare.

c) Calculați $\int_0^4 xf(x)dx$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}=$	
	$=1$	4p
b)	$\lim\limits_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}=\lim\limits_{x\to-3}\sqrt[3]{\frac{(x-1)^2}{(x+3)^2}}=$	1p
	$=\infty$, de unde	3p
	f nu e derivabilă în -3.	1p
c)	$f'(x)=\frac{(x-1)(3x+5)}{3f^2(x)}, x\in\mathbb{R}-\{1,-3\}$	1p 2p
	f este crescătoare pe $\left(-\infty,-\frac{5}{3}\right]$	
	f este descrescătoare pe $\left[-\frac{5}{3},1\right]$	1p
	f este crescătoare pe $[1,\infty)$	1p
2.a)	$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}dx=\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\Big\|_0^1=$	1p
	$=\ln\left(1+\sqrt{10}\right)-\ln 3$	3p
b)	Dacă funcția F este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=\sqrt{x^2+9}$	2p
	Cum $\sqrt{x^2+9}\geq 0$, rezultă $F'(x)\geq 0$	2p
	F este crescătoare	2p
c)	$\int_0^4 xf(x)dx=\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}dx=\frac{1}{2}\int_3^5\sqrt{y}dy=$	1p
	$=\frac{1}{3}y\sqrt{y}\Big\|_3^5=\frac{5\sqrt{5}-3\sqrt{3}}{3}$	3p 2p

Subiectul I

1. Arătați că numărul $\log_2\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)+\log_2\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)$ este număr natural.

2. Determinați mulțimea valorilor funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x$.

3. Calculați suma pătratelor soluțiilor ecuației $x^2-x-3=0$.

4. Calculați $C_8^3-C_{10}^2$.

5. Determinați coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, unde $A(2,6)$, $B(-2,3)$ și $C(3,-3)$.

6. Calculați $\sin\frac{2018\pi}{3}$.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\log_2\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)+\log_2\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)=\log_2(11-7)=$	3p
	$=2\in\mathbb{N}$	2p
2.	$V(2,-4)$ este vârful parabolei	2p
	$\operatorname{Im} f=[-4,+\infty)$	3p
3.	$x_1+x_2=1, x_1x_2=-3$	2p
		2p
	Suma pătratelor este 7.	1p
4.	$C_8^3=56$	2p
	$C_{10}^2=45$	1p
	Diferența este 11	2p
5.	$x_G=1$	2p
	$y_G=2$	2p
	$G(1,2)$	1p
6.	$\sin\frac{2018\pi}{3}=\sin\left(2\cdot 336\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=$	2p
	$=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	3p

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Calculați $(A+I_3)(A^2-A+I_3)$.

b) Calculați $A^{2018}-A^2$.

c) Determinați inversa matricei A.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=2xy-3x-3y+6$.

a) Calculați $1*2*3$.

b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție.

c) Demonstrați că, dacă $x,y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$, atunci $x*y\in\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A^3=-I_3$	2p
	$(A+I_3)(A^2-A+I_3)=A^3+I_3=$	2p
	$=-I_3+I_3=O_3$	1p
b)	$A^6=I_3$	2p
	$A^{2018}=(A^6)^{336}A^2=A^2$	2p
	$A^{2018}-A^2=O_3$	1p
c)	$A\cdot(-A^2)=I_3$	3p
	A inversabilă și $A^{-1}=-A^2$	2p
2.a)	$1*2=1$	2p
	$1*2*3=1*3=0$	3p
b)	$x*e=x\Rightarrow x(2e-4)-3e+6=0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$	3p
	Elementul neutru este 2	2p
c)	$2(x*y)-3=(2x-3)(2y-3)$	3p
	Cum factorii produsului din membrul drept sunt nenuli, rezultă cerința	2p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x+1}$.

a) Calculați $f'(1)$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq1}$, definit prin $I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{x^2+3}$.

a) Calculați I_1.

b) Calculați I_7+3I_5.

c) Arătați că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ converge la 0.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=1-\frac{2}{(x+1)^2}$	3p
	$f'(1)=\frac{1}{2}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x+1}=0$	3p
	$y=x$ asimptotă oblică spre $+\infty$	2p
c)	$f''(x)=\frac{4}{(x+1)^3}$	3p
	$f''(x)\geq0$	1p
	Funcția este convexă	1p

2.a)	$I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^2+3}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right)\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}$	2p
b)	$I_7+3I_5=\int_0^1 x^5dx=$	3p
	$=\frac{1}{6}$	2p
c)	$x^2+3\geq 1, \forall x\geq 0 \Rightarrow 0\leq\frac{x^n}{x^2+3}\leq x^n, \forall x\in[0,1]\Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow 0\leq I_n\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$	2p
	$\lim_{n\to\infty} I_n=0$	1p

Subiectul I

1. Arătați că $(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2=8$.

2. Calculați produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2-5x+5)=0$.

4. Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 3, 4 și 5.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(3,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta AB.

6. Arătați că $\sin(2\pi-x)+\sin(2\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{3}+1)^2=4+2\sqrt{3}$	2p
	$(\sqrt{3}-1)^2=4-2\sqrt{3}\Rightarrow(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=8$	3p
2.	$f(4)=0$	3p
	$f(1)\,f(2)\,f(3)\,f(4)\,f(5)=0$	2p
3.	$x^2-5x+5=1\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$	2p
	$x_1=1$ și $x_2=4$, care verifică ecuația dată	3p
4.	Cifra unităților este 4	2p
	Numerele sunt 354 și 534, deci se pot forma două astfel de numere	3p
5.	$m_{AB}=1$ și $m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$	3p
	Ecuația dreptei d este $y=-x+3$	2p
6.	$\sin(2\pi-x)=-\sin x$	2p
	$\sin(2\pi+x)=\sin x\Rightarrow\sin(2\pi-x)+\sin(2\pi+x)=-\sin x+\sin x=0$, pentru orice x real	3p

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 4x\\ 0 & 1 & 0\\ x & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(B(0))=1$.

b) Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale x pentru care $B(x)B(x^2+1)=B(x^2+x+1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{3}(x-2)(y-2)+2$.

a) Arătați că $(-3)\circ 2=2$.

b) Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n=5$.

c) Calculați $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2017$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$ $=1+0+0-0-0-0=1$	2p 3p
b)	$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&4x\\0&1&0\\x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&4y\\0&1&0\\y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&4x+4y\\0&2&0\\x+y&0&2\end{pmatrix}=$	3p
	$=2\begin{pmatrix}1&0&4\cdot\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\\frac{x+y}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	2p
c)	$B(x^2+1)B(x)=\begin{pmatrix}4x^3+4x+1&0&4(x^2+x+1)\\0&1&0\\x^2+x+1&0&4x^3+4x+1\end{pmatrix}$, $B(x^2+x+1)=\begin{pmatrix}1&0&4(x^2+x+1)\\0&1&0\\x^2+x+1&0&1\end{pmatrix}$	3p
	$4x^3+4x+1=1\Leftrightarrow x=0$	2p
2.a)	$(-3)\circ 2=\frac{1}{3}(-3-2)(2-2)+2=$	3p
	$=0+2=2$	2p
b)	$n\circ n=\frac{1}{3}(n-2)^2+2$	2p
	$(n-2)^2=9\Leftrightarrow n_1=-1$, care nu convine, și $n_2=5$, care convine	3p
c)	$x\circ 2=2$ și $2\circ y=2$, pentru x și y numere reale	2p
	$1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2017=1\circ 2\circ(3\circ 4\circ 5\circ\ldots\circ 2017)=2\circ(3\circ 4\circ\ldots\circ 2017)=2$	3p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$.

a) Arătați că $f'(x)=-\frac{3}{(x-2)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

b) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.

c) Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $4y=-3x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)e^x$.

a) Arătați că $\int_1^2 \frac{1}{x+1}f(x)dx=e(e-1)$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

c) Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 (x+1)^n f(x)dx$.

Arătați că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e\cdot 2^{n+1}-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot(x-2)-(x+1)\cdot 1}{(x-2)^2}=$	3p
	$=\frac{x-2-x-1}{(x-2)^2}=-\frac{3}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.	2p
b)	$f''(x)=\frac{6}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	3p
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$ deci funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$	2p
c)	$f'(x)=-\frac{3}{4}\Leftrightarrow(x-2)^2=4$	3p
	Cum $x\in(2,+\infty)$, coordonatele punctului sunt $x=4$ și $y=\frac{5}{2}$	2p
2. a)	$\int_1^2\frac{1}{x+1}f(x)dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\|_1^2=$	3p
	$=e^2-e=e(e-1)$	2p
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	3p
	$F(1)=0\Rightarrow c=-e$, deci $F(x)=xe^x-e$	2p
c)	$I_n=\int_0^1(x+1)^{n+1}e^x dx=\left((x+1)^{n+1}e^x\right)\Big\|_0^1-(n+1)\int_0^1(x+1)^n e^x dx=$	3p
	$=2^{n+1}e-1-(n+1)I_{n-1}$, deci $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	2p

Subiectul I

1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+5i$ și $z_2 = 1-5i$. Arătați că numărul $z_1 + z_2$ este real.
2. Calculați $(f \circ g)(2)$, unde $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x-2$ și $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x - 81 = 0$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 11.
5. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y = 4x+5$ și punctul $A(2, 1)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
6. Arătați că $\sin(\pi - x)\cos x + \cos(\pi - x)\sin x = 0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1 + z_2 = (2+5i) + (1-5i) =$	3p
	$= 3$, care este număr real	2p
2.	$g(2) = 4$	2p
	$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 2$	3p
3.	$3^x = 3^4$	2p
	$x = 4$	3p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	1p
	Sunt 9 numere naturale de două cifre divizibile cu 11, deci sunt 9 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$	2p
5.	Dreapta paralelă cu dreapta d are panta egală cu 4	2p
	Ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d este $y = 4x - 7$	3p
6.	$\sin(\pi - x)\cos x + \cos(\pi - x)\sin x = \sin(\pi - x + x) =$	3p
	$= \sin \pi = 0$	2p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

   a) Arătați că $\det B = 0$.

   b) Arătați că $A(x) \cdot B + B \cdot A(x) = 3xB$, pentru orice număr real x.

   c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = A(x^2 + x - 2)$.

2. Se consideră polinomul $f = -X^3 + 2X^2 - 2X + m$, unde m este număr real.

   a) Arătați că $f(1) = m - 1$.

   b) Pentru $m = 1$, demonstrați că $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

   c) Arătați că polinomul f, **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$	2p
	$= 0$	3p
b)	$A \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \end{pmatrix}, B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 2x & 0 & 2x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$	2p
	$A \cdot B(x) + B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3x & 0 \\ 3x & 0 & 3x \\ 0 & 3x & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ x & 0 & x \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix} = 3xB$, pentru orice număr real x	3p
c)	$A(x)A(x)A(x) = \begin{pmatrix} 4x^3 & 0 & 4x^3 \\ 0 & x^3 & 0 \\ 4x^3 & 0 & 4x^3 \end{pmatrix}, A(x^2+x-2) = \begin{pmatrix} x^2+x-2 & 0 & x^2+x-2 \\ 0 & x^2+x-2 & 0 \\ x^2+x-2 & 0 & x^2+x-2 \end{pmatrix}$	3p
	$4x^3 = x^2+x-2 = x^3, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = 0$	2p
2.a)	$f(1) = -1^3 + 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1m =$	2p
	$= m - 1$	3p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 2, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2, x_1x_2x_3 = 1$	2p
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = \frac{(x_1+x_2+x_3)(x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2)}{x_1x_2x_3} = \frac{2 \cdot 2}{1} = 4$	3p
c)	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 2^2 - 2 \cdot 2 = 0$	2p
	Dacă f ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, contradicție cu $x_1 + x_2 + x_3 = 2$	3p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = -\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2+x+1)^2}, x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x))^x$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 3x$.

a) Arătați că $\int_0^1 (f(x) + 3x)dx = e - 1$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = e - 4$.

c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{\pi}{2}(e^2 - 7)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+1)(x^2-x+1)-(2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2-x+1)^2}=$	3p
	$=-\frac{2x^2-2}{(x^2-x+1)^2}=-\frac{2(x-1)(x+1)}{(x^2-x+1)^2}, x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$f(0)=1, f'(0)=2$	2p
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=2x+1$	3p
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x))^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2x}{x^2-x+1}\right)^x=$	2p
	$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-x+1}}=e^2$	3p
2.a)	$\int_0^1(f(x)+3x)dx=\int_0^1 e^x dx=$	2p
	$=e^x\Big\|_0^1=e-1$	3p
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=e^x-\frac{3}{2}x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	2p
	$F(1)=e-\frac{3}{2}+c\Rightarrow c=-\frac{1}{2}$, deci $F(x)=e^x-\frac{3}{2}\cdot x^2-\frac{1}{2}$	3p
c)	$V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)dx=\pi\int\limits_0^1(e^x-3x)^2dx=\pi\int\limits_0^1(e^{2x}-6xe^x+9x^2)dx=$	2p
	$=\pi\left(\frac{1}{2}e^{2x}-6(x-1)e^x+9\frac{x^3}{3}\right)\Big\|_0^1=\frac{\pi(e^2-7)}{2}$	3p

Subiectul I

1. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_1=1$ și $a_3=5$.
2. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2a-x$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^{4-x}=3^{2x+2}$.
4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 5.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(0,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 2.
6. Se consideră triunghiul MNP, cu $MN=5$, $MP=12$ și $PN=13$. Arătați că $\sin N=\frac{12}{13}$.

(30 de puncte)

SUBIECTUL I

1.	$2r = a_3 - a_1 = 5 - 1 = 4 \Rightarrow r = 2$	3p
	$a_4 = 5 + 2 = 7$	2p
2.	$f(1) = 3 \Leftrightarrow 2a - 1 = 3$	3p
	$a = 2$	2p
3.	$3^{3(4-x)} = 3^{2x+2} \Leftrightarrow 12 - 3x = 2x + 2$	3p
	$x = 2$	2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	1p
	Sunt 2 numere naturale de două cifre cu produsul cifrelor 5, deci sunt 2 cazuri favorabile	2p
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{2}{90} = \frac{1}{45}$	2p
5.	$y - y_M = 2(x - x_M)$	2p
	$y - 1 = 2x \Rightarrow y = 2x + 1$	3p
6.	$13^2 = 5^2 + 12^2$, deci triunghiul MNP este dreptunghic în M	2p
	$\sin N = \frac{MP}{PN} = \frac{12}{13}$	3p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 & 3x \\ 0 & 1 & 0 \\ -2x & 0 & 1+3x \end{pmatrix}$, unde x este număr real..

a) Arătați că $\det(A(1)) = 2$.

b) Arătați că $A(x)A(y) = A(xy + x + y)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x) = A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + X - m$, unde m este număr real.

a) Arătați că $f(0) = -m$.

b) Pentru $m = 1$, arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 si x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}-1&0&3\\0&1&0\\-2&0&4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}-1&0&3\\0&1&0\\-2&0&4\end{vmatrix}=$	2p
	$=-4+0+0-(-6)-0-0=2$	3p
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}(1-2x)(1-2y)-6xy&0&(1-2x)3y+3x(1+3y)\\0&1&0\\-2x(1-2y)-(1+3x)2y&0&-6xy+(1+3x)(1+3y)\end{pmatrix}=$	3p
	$=\begin{pmatrix}1-2(xy+x+y)&0&3(xy+x+y)\\0&1&0\\-2(xy+x+y)&0&1+3(xy+x+y)\end{pmatrix}=A(xy+x+y)$, pentru orice x și y reale	2p
c)	$A(x)A(x)A(x)=A((x+1)^3-1)$, pentru orice număr real x	3p
	$(x+1)^3-1=7\Leftrightarrow x=1$	2p
2.a)	$f(0)=0^3-2\cdot 0^2+0-m=$	3p
	$=0+0+0-m=-m$	2p
b)	$x_1^3+x_2^3+x_3^3=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-(x_1+x_2+x_3)+3=5=5x_1x_2x_3$	3p
	$x_1+x_2+x_3=2,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1,\ x_1x_2x_3=1$	2p
c)	$x_1\in\mathbb{Z}$ și $f(x_1)=0\Leftrightarrow m=x_1(x_1-1)^2$	2p
	Deoarece m este prim, obținem $(x_1-1)^2=1\Leftrightarrow x_1=0$, care nu convine, sau $x_1=2$, pentru care $m=2$.	3p

SUBIECTUL al III-lea

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+\sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x)=-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că derivata funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x+1)$.

a) Arătați că $\displaystyle\int_0^{e-1}\frac{dx}{x+1}=1$.

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=e-1$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că $\displaystyle\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}\left(f(x)\right)^n dx=\frac{1}{2018}$.

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x)=-1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=$	3p
	$=-1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	3p
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f''(x)=\frac{x'\sqrt{x^2+1}-x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$	3p
	$f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.	2p
2.a)	$\int\limits_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big\vert_0^{e-1}=$	3p
	$=\ln e-\ln 1=1$	2p
b)	$A=\int\limits_0^{e-1}\lvert f(x)\rvert dx=\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx=(x+1)\ln(x+1)\Big\vert_0^{e-1}-\int\limits_0^{e-1}(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx=$	3p
	$=e-x\Big\vert_1^e=e-e+1=1$	2p
c)	$\int\limits_0^{e-1}\frac{1}{x+1}(f(x))^n dx=\int\limits_0^{e-1}\frac{1}{x+1}\ln^n(x+1)\,dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x+1)\Big\vert_0^{e-1}=\frac{1}{n+1}$	3p
	$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2018}\Leftrightarrow n=2017$	2p

Subiectul I

1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_1=1$ și $a_3=2015$.

2. Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-7x)=\log_3 8$.

4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(3,6)$ și $C(0,4)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.

6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=2$, $B=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2r = a_3 - a_1 = 2015 - 1 = 2014$	3p
	$r = 1007$	2p
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4) =$	3p
	$= 2 \cdot 4 + 1 = 9$	2p
3.	$x^2 - 7x = 8 \Leftrightarrow x^2 - 7x - 8 = 0$	3p
	$x_1 = -1$ și $x_2 = 8$, care verifică ecuația.	2p
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	2p
	Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ de numere.	3p
5.	$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow x_D = 0$	3p
	$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow y_D = 1$	2p
6.	$A = \frac{\pi}{2}$	2p
	$BC = 4$	3p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 1 & a+3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0)) = 1$.

b) Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a-1) - 2A(a-1) + I_3 = O_3$, unde $A^2(a-1) = A(a-1)A(a-1)$.

c) Arătați că $A(2) + A(4) + A(6) + \ldots + A(1000) = 500A(501)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 4X^2 + mX - 2$, unde m este număr real.

a) Arătați că $f(0) = -2$.

b) Determinați numărul real m pentru care $x_1 = x_2 + x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Pentru $m = 8$, arătați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=$	2p
	$=1+0+0-0-0-0=1$	3p
b)	$A^2(a-1)=\begin{pmatrix}1&2a&a^2+4a+2\\0&1&2a+4\\0&0&1\end{pmatrix},\quad 2A(a-1)=\begin{pmatrix}2&2a&2a+2\\0&2&2a+4\\0&0&2\end{pmatrix}$	2p
	$A^2(a-1)-2A(a-1)+I_3=\begin{pmatrix}0&0&a^2+2a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1p
	$\begin{pmatrix}0&0&a^2+2a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow a^2+2a=0\Leftrightarrow a_1=-2$ și $a_2=0$	2p
c)	$A(2)+A(1000)=2A(501),\ A(4)+A(908)=2A(501),\ldots,\ A(500)+A(502)=2A(501)$	3p
	$A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(1000)=250\cdot 2A(501)=500A(51)$	2p
2.a)	$f(0)=0^3+4\cdot 0^2+m\cdot 0-2=$	3p
	$=-2$	2p

b)	$x_1+x_2+x_3=-4,\ x_1=x_2+x_3\Leftrightarrow x_1=-2$	
	$f(-2)=0\Leftrightarrow -2m+6=0\Leftrightarrow m=3$	2p
c)	$f=X^3+4X^2+10X-2,\ x_1+x_2+x_3=-4$ și $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$	3p
	Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă	2p
	polinomul *f* ar avea toate rădăcinile reale, am obține $x_1=x_2=x_3=0$, contradicție cu $f(0)=-2$	3p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x(x^2-4x+4)$.

a) Arătați că $f'(x)=e^x(x^2-2x),\ x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.

c) Demonstrați că, pentru orice $x\in(-\infty,2]$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul *n*, se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x^4)^n\,dx$.

a) Arătați că $I_1=\frac{4}{5}$.

b) Arătați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul *n*.

c) Demonstrați că $I_{n+1}=\frac{4(n+1)}{4n+5}I_n$, pentru orice număr natural nenul *n*.

MATEMATICĂ - M1

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. *a)*	$f'(x)=e^x(x^2-4x+4)+e^x(2x-4)=$	3p
	$=e^x(x^2-4x+4+2x-4)=e^x(x^2-2x),\ x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=0$ și $x_2=2$	2p
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,0]$	1p
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,2]$	1p
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	1p
c)	$f(x)\leq f(0)$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$	3p
	Cum $f(0)=4$, obținem $e^x(x-2)^2\leq 4$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$	2p
2. *a)*	$I_1=\int_0^1(1-x^4)dx=\left(x-\frac{x^5}{5}\right)\Big\|_0^1=$	3p
	$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$	2p
b)	$I_{n+1}-I_n=\int_0^1(-x^4)(1-x^4)^n\,dx$, pentru orice număr natural nenul n.	2p
	Pentru orice număr natural nenul n și orice $x\in[0,1]$ au loc inegalitățile $-x^4\leq 0$ și $(1-x^4)^n\geq 0$, deci $I_{n+1}\leq I_n$	3p
c)	$I_{n+1}=\int_0^1 x'(1-x^4)^{n+1}dx=x(1-x^4)^{n+1}\Big\|_0^1-\int_0^1 x\cdot(n+1)(1-x^4)^n(-4x^3)\,dx=$	
	$=4(n+1)\int_0^1 x^4(1-x^4)^n\,dx=-4(n+1)\int_0^1(1-x^4-1)(1-x^4)^n\,dx=-4(n+1)(I_{n+1}-I_n)$,	2p
	deci $I_{n+1}=\frac{4(n+1)}{4n+5}I_n$, pentru orice numar natural nenul n.	3p

Subiectul I

1. Calculați partea reală a numărului complex $z=\frac{3-2i}{2+3i}$.

2. Determinați numărul real a, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-a$, are graficul tangent axei Ox.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+5\cdot 4^x-24=0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, aceasta să aibă un singur element număr impar.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,2)$ și $N(1,4)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.

6. Arătați că $(\sin x-\sin(\pi+x))^2+(\cos x+\cos(2\pi+x))^2=4$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z=\frac{(2-3i)(3-2i)}{4+9}=-\frac{13i}{13}=-i$	3p
	Partea reală a numărului z este egală cu 0	2p
2.	$\Delta=1+4a$	2p
	$1+4a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$	3p
3.	$4^x+5\cdot 4^x-24=0 \Leftrightarrow 6\cdot 4^x=24$	3p
	$x=1$	2p
4.	Sunt $C_3^1\cdot C_4^1=12$ cazuri favorabile	2p
	Sunt $C_7^2=21$ cazuri posibile	1p
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$	2p
5.	Mediatoarea d trece prin punctul $P(2,3)$, care este mijlocul segmentului MN	2p
	$m_{MN}=-1 \Rightarrow m_d=1$	1p
	Ecuația dreptei d este $y=x+1$	2p
6.	$\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\cos(2\pi+x)=\cos x$	2p
	$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4(\sin^2 x+\cos^2 x)=4$, pentru orice număr real x	3p

(30 de puncte)

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x)+I_3)=0$.

c) Arătați că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

SUBIECTUL al II-lea

1.a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\-2&0&0\end{pmatrix}=$	3
	$=2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=2A(0)$	2
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(x)+I_3)=\begin{vmatrix}1&x&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=1+x$	3
	$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$	2
c)	$aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-b&0\\0&0&-b\\-b&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&c\\c&0&0\\0&c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$	2
	$\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$	1
	$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0$, pentru orice a, b și c pozitive	2

2.a)	$x * y = xy - 6x - 6y + 36 + 6 =$	2p
	$= x(y-6) - 6(y-6) + 6 = (x-6)(y-6) + 6$, pentru orice numere întregi x și y	3p
b)	Elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ “ este 7	1p
	x e simetrizabil dacă există $x' \in \mathbb{Z}$ astfel încât $x * x' = x' * x = 7$, de unde $x' = 6 + \frac{1}{x-6}$	2p
	Cum x' este număr întreg, obținem $x = 5$ sau $x = 7$	2p
c)	$x * 6 = 6$ și $6 * y = 6$ pentru orice numere întregi x și y	2p
	6 este divizor al lui 2016	1p
	2016 are 36 divizori naturali, legea „ $*$ “ este asociativă, deci $d_1 * d_2 * \ldots * d_{36} = 6$	2p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + \sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că $f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Arătați că derivata funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1)$.

a) Arătați că $\int_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} = 1$.

b) Calculați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = e - 1$.

c) Determinați numărul natural nenul n, știind că $\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\left(f(x)\right)^n dx = \frac{1}{2018}$.

	(30 de puncte)	
1.a)	$f'(x)=-1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'=$	3p
	$=-1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=-1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$	2p
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+\sqrt{x^2+1})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0$	3p
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f''(x)=\frac{x'\sqrt{x^2+1}-x(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1}=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$	3p
	$f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția f' este crescătoare pe $\mathbb{R}$.	2p
2.a)	$\int\limits_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx=\ln(x+1)\Big\|_0^{e-1}=$	3p
	$=\ln e-\ln 1=1$	2p
b)	$A=\int\limits_0^{e-1}\|f(x)\|dx=\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)\,dx=(x+1)\ln(x+1)\Big\|_0^{e-1}-\int\limits_0^{e-1}(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}dx=$	3p
	$=e-x\Big\|_1^e=e-e+1=1$	2p

c)	$\int\limits_0^{e-1}\frac{1}{x+1}(f(x))^n dx=\int\limits_0^{e-1}\frac{1}{x+1}\ln^n(x+1)\,dx=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}(x+1)\Big\|_0^{e-1}=\frac{1}{n+1}$	3p
	$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2018}\Leftrightarrow n=2017$	2p

Subiectul I

1. Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, știind că $a_1=1$ și $a_3=2015$.
2. Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,4]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-7x)=\log_3 8$.
4. Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,3)$, $B(3,6)$ și $C(0,4)$. Determinați coordonatele punctului D, știind că $ABCD$ este paralelogram.
6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC în care $AB=2$, $B=\frac{\pi}{6}$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2r=a_3-a_1=2015-1=2014$	3p
	$r=1007$	2p
2.	Valoarea maximă a funcției f este $f(4)=$	3p
	$=2\cdot 4+1=9$	2p
3.	$x^2-7x=8 \Leftrightarrow x^2-7x-8=0$	3p
	$x_1=-1$ și $x_2=8$, care verifică ecuația.	2p
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	2p
	Ultima cifră se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot 4\cdot 3=60$ de numere.	3p
5.	$x_A+x_C=x_B+x_D \Rightarrow x_D=0$	3p
	$y_A+y_C=y_B+y_D \Rightarrow y_D=1$	2p
6.	$A=\frac{\pi}{2}$	2p
	$BC=4$	3p

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1&a+1&a+2\\0&1&a+3\\0&0&1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Determinați numerele reale a, știind că $A^2(a-1)-2A(a-1)+I_3=O_3$, unde $A^2(a-1)=A(a-1)A(a-1)$.

c) Arătați că $A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(1000)=500A(501)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=$	2p
	$=1+0+0-0-0-0=1$	3p
b)	$A^2(a-1)=\begin{pmatrix}1&2a&a^2+4a+2\\0&1&2a+4\\0&0&1\end{pmatrix}$, $2A(a-1)=\begin{pmatrix}2&2a&2a+2\\0&2&2a+4\\0&0&2\end{pmatrix}$	2p
	$A^2(a-1)-2A(a-1)+I_3=\begin{pmatrix}0&0&a^2+2a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	1p
	$\begin{pmatrix}0&0&a^2+2a\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \Leftrightarrow a^2+2a=0 \Leftrightarrow a_1=-2$ și $a_2=0$	2p
c)	$A(2)+A(1000)=2A(501)$, $A(4)+A(908)=2A(501)$, ..., $A(500)+A(502)=2A(501)$	3p
	$A(2)+A(4)+A(6)+\ldots+A(1000)=250\cdot 2A(501)=500A(51)$	2p
2.a)	$f(0)=0^3+4\cdot 0^2+m\cdot 0-2=$	3p
	$=-2$	2p

b)	$x_1+x_2+x_3=-4,\ x_1=x_2+x_3 \Leftrightarrow x_1=-2$	2p
	$f(-2)=0 \Leftrightarrow -2m+6=0 \Leftrightarrow m=3$	3p
c)	$f=X^3+4X^2+10X-2,\ x_1+x_2+x_3=-4$ şi $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=8$	2p
	Cum $x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=16-16=0$, dacă polinomul f ar avea toate rădăcinile reale, am obţine $x_1=x_2=x_3=0$, contradicţie cu $f(0)=-2$	3p

2. Pe mulţimea numerelor întregi se defineşte legea de compoziţie asociativă şi cu element neutru $x*y=xy-6x-6y+42$.

a) Arătaţi că $x*y=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere întregi x şi y.

b) Determinaţi elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziţie „ $*$ “.

c) Calculaţi $d_1*d_2*\ldots*d_{36}$, unde $d_1,d_2,\ldots,d_{36}$ sunt divizorii naturali ai lui 2016.

2.*a)*	$x*y=xy-6x-6y+36+6=$	2p
	$=x(y-6)-6(y-6)+6=(x-6)(y-6)+6$, pentru orice numere întregi x şi y	3p
b)	Elementul neutru al legii de compoziţie „ $*$ “ este 7	1p
	x e simetrizabil dacă există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x*x'=x'*x=7$, de unde $x'=6+\dfrac{1}{x-6}$	2p
	Cum x' este număr întreg, obţinem $x=5$ sau $x=7$	2p
c)	$x*6=6$ şi $6*y=6$ pentru orice numere întregi x şi y	2p
	6 este divizor al lui 2016	1p
	2016 are 36 divizori naturali, legea „ $*$ “ este asociativă, deci $d_1*d_2*\ldots*d_{36}=6$	2p

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x+1-\ln(x+2)$.

a) Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-1,+\infty)$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-f(x)-\ln 2}{x}$.

c) Demonstraţi că $\ln(x+2)\le x+1$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 f(x)dx$.

b) Arătaţi că $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)+x^2f(x)-1}{x^4+1}dx=\dfrac{\pi}{8}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}\int\limits_2^x f(t)dt$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. *a)*	$f'(x)=(x+1)'-\left(\ln\left(x+2\right)\right)'=$	2p
	$=1-\dfrac{1}{x+2},\ x\in(-2,+\infty)$	3p
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-f(x)-\ln 2}{x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x+2)-\ln 2}{x}=$	2p
	$=\dfrac{1}{3}$	3p
c)	$f'(-1)=0,\ f'(x)<0$ pentru orice $x\in(-2,-1)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$	3p
	$f(x)\geq f(-1)\Rightarrow \ln(x+2)\leq x+1$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$	2p
2. *a)*	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1\dfrac{x+1}{x^2+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\vert_0^1+\operatorname{arctg} x\Big\vert_0^1=$	3p
	$=\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$	2p
b)	$\int\limits_0^1\dfrac{f(x)+x^2f(x)-1}{x^4+1}dx=\int\limits_0^1\dfrac{x}{x^4+1}dx=$	2p
	$=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(x^2)\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{8}$	3p
c)	Din regula lui l'Hospital pentru cazul $\dfrac{0}{0}$, limita cerută este egală cu:	3p
	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\int\limits_2^x f(t)dt\right)'=\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\dfrac{3}{4}$	2p

Subiectul I

1. Calculați partea reală a numărului complex $z=\dfrac{3-2i}{2+3i}$.

2. Determinați numărul real a, știind că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-a$, are graficul tangent axei Ox.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x}+5\cdot 4^x-24=0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu două elemente ale mulțimii $A=\{2,3,4,5,6,7,8\}$, aceasta să aibă un singur element număr impar.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(3,2)$ și $N(1,4)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MN.

6. Arătați că $(\sin x-\sin(\pi+x))^2+(\cos x+\cos(2\pi+x))^2=4$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z=\frac{(2-3i)(3-2i)}{4+9}=-\frac{13i}{13}=-i$	3p
	Partea reală a numărului z este egală cu 0	2p
2.	$\Delta=1+4a$	2p
	$1+4a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{1}{4}$	3p
3.	$4^x+5\cdot 4^x-24=0 \Leftrightarrow 6\cdot 4^x=24$	3p
	$x=1$	2p
4.	Sunt $C_3^1\cdot C_4^1=12$ cazuri favorabile	2p
	Sunt $C_7^2=21$ cazuri posibile	1p
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$	2p
5.	Mediatoarea d trece prin punctul $P(2,3)$, care este mijlocul segmentului MN	2p
	$m_{MN}=-1 \Rightarrow m_d=1$	1p
	Ecuația dreptei d este $y=x+1$	2p
6.	$\sin(\pi+x)=-\sin x$, $\cos(2\pi+x)=\cos x$	2p
	$(2\sin x)^2+(2\cos x)^2=4(\sin^2 x+\cos^2 x)=4$, pentru orice număr real x	3p

(30 de puncte)

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(A(x)+I_3)=0$.

c) Arătați că $\det\left(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a, b și c.

SUBIECTUL al II-lea

1.a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-2\\-2&0&0\end{pmatrix}=$	3p
	$=2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\-1&0&0\end{pmatrix}=2A(0)$	2p
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(x)+I_3)=\begin{vmatrix}1&x&0\\0&1&-1\\-1&0&1\end{vmatrix}=1+x$	3p
	$1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$	2p
c)	$aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&0&0\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&-b&0\\0&0&-b\\-b&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&c\\c&0&0\\0&c&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{pmatrix}$	2p
	$\det(aI_3-bA(-1)+cA(-1)\cdot A(-1))=\begin{vmatrix}a&b&c\\c&a&b\\b&c&a\end{vmatrix}=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=$	1p
	$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right)\geq 0$, pentru orice a, b și c pozitive	2p

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică, cu $a_5 + a_{11} = 20$. Calculați a_8.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = 2x + a$. Determinați valorile lui a pentru care $f \circ g = g \circ f$.

3. Rezolvați în mulțimea $(0, +\infty)$ ecuația $x^2 + 9^{\log_3 x} = 8$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă un număr prim de elemente?

5. Fie $m \in \mathbb{R}$ și vectorii $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + m^2\vec{j}$. Arătați că unghiul făcut de vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ este ascuțit.

6. Arătați că $\sin x + \sqrt{3}\cos x \leq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul I

1. $a_5 + a_{11} = a_1 + 4r + a_1 + 10r = 2a_1 + 14r = 2(a_1 + 7r) = 2a_8$. Deci $a_8 = 10$.

2. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 2 = 2(2x + a) + 2 = 6x + 3a + 2$ și $(g \circ f)(x) = 6x + 4 + a$. Rezultă că $3a + 2 = a + 4$, deci $a = 1$. **3.** Pentru $x > 0$, avem $9^{\log_3 x} = x^{\log_3 9} = x^2$, deci ecuația se scrie $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4$, deci $x = 2$, deoarece $x > 0$. **4.** Numărul submulțimilor nevide este $2^5 - 1 = 31$. Numărul submulțimilor cu 2, 3 sau 5 elemente este $C_5^2 + C_5^3 + C_5^5 = 21$. Probabilitatea este $\frac{21}{31}$.

5. $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{2 + m^2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} > 0$, deci unghiul vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este ascuțit.

6. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right) = 2\left(\sin x \cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M = \left\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid X^2 = 3X\right\}$.

a) Arătați că $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \in M$.

b) Dacă $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M$, arătați că $a + d \in \{0, 3, 6\}$.

c) Arătați că, dacă $X, Y \in M$ și $X + Y \in M$, atunci $XY = -YX$.

2. Pe mulțimea $(0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{xy}{x + y}$.

a) Arătați că legea „*“ este asociativă.

b) Arătați că legea „*“ **nu** are element neutru.

c) Rezolvați ecuația $x * x * x * x = 5$, $x \in (0, \infty)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Fie $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$. Cum $A^2=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 6\\ -6 & -3\end{pmatrix}=3A$, rezultă că $A \in M$.

b) Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M$. Dacă $\det(X) \neq 0$, rezultă că X e inversabilă şi, din $X^2 = 3X$, rezultă $X = 3I_2$, deci $a + d = 3 + 3 = 6$. Dacă $\det(X) = 0$, atunci $X^2 = (a + d)X$. Cum $X^2 = 3X$ rezultă că $(a+d)X = 3X$, dacă $(a + d - 3)X = O_2$.
Obţinem $a + d - 3 = 0$ sau $X = O_2$. Rezultă că $a + d = 3$ sau $a + d = 0$, deci $a + d \in \{0, 3, 6\}$.

c) Dacă $X,Y \in M$, rezultă că $X^2+Y^2=3(X+Y)$. Cum $X+Y\in M$, obţinem: $(X+Y)^2=3(X+Y)$, deci $(X+Y)^2=X^2+Y^2$. Rezultă $X^2+Y^2+XY+YX=X^2+Y^2$, deci $XY=-YX$.

2. *a)* $x*y=\dfrac{xy}{x+y}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^{-1}$, $x,\ y \in (0,\ \infty)$. Avem $(x*y)*z=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)^{-1} * z=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^{-1}$ şi $x*(y*z)=x*\left(\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^{-1}=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)^{-1}$, deci legea „*" este asociativă.

b) Dacă $e \in (0, \infty)$ ar fi element neutru al legii „*", atunci $1 * e = 1$, deci $\dfrac{e}{e+1}=1$, de unde $e = e + 1$.
Rezultă $0 = 1$, fals. Deci „*" nu are element neutru.

c) $x*x*x*x=\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\right)^{-1}=\left(\dfrac{4}{x}\right)^{-1}=\dfrac{x}{4}$. Ecuaţia devine $\dfrac{x}{4}=5$, deci $x = 20$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcţia $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}-2x$.

a) Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

b) Arătaţi că f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că $f(e^x) < f(x + 1)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$ şi $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+4}{\sqrt{x^2+2x+4}+x}=1$, deci dreapta de ecuaţie $y = -x + 1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}-2=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}-2=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+3}}-2<1-2=-1<0$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, deci f este strict descrescătoare.

c) Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x-x-1$. Cum $g'(x)=e^x-1$ şi $g'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,0)$; $g'(x)>0$ pentru $x\in(0,\infty)$, din monotonia lui g rezultă că $g(x)>g(0), \forall x\in\mathbb{R}^*$, deci $e^x>x+1$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^*$. Cum f este strict descrescătoare, rezultă că $f(e^x)<f(x+1), \forall x\in\mathbb{R}^*$.

2. *a)*

$$I_1=\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=\int_0^\pi (e^x)'\cos x\,dx=e^x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi e^x\sin x=-e^\pi-1+\int_0^\pi e^x\sin x\,dx=-e^\pi-1+e^x\sin x\Big|_0^\pi-$$

$$-\int_0^\pi e^x\cos x\,dx=-e^\pi-1-I_1$$. Rezultă că $2I_1=-e^\pi-1$, deci $I_1=-\dfrac{e^\pi+1}{2}$.

b) $I_n=\displaystyle\int_0^\pi e^x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)'dx=\frac{e^x\sin nx}{n}\Big|_0^\pi-\int_0^\pi e^x\frac{\sin x}{n}\,dx=-\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x\sin nx\,dx$, de unde rezultă concluzia.

c) Din punctul anterior avem $|I_n|==\dfrac{1}{n}\left|\displaystyle\int_0^\pi e^x\sin nx\,dx\right|\le\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x|\sin nx|\,dx\le\frac{1}{n}\int_0^\pi e^x dx\le\frac{1}{n}(e^\pi-1)$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}$, $A,B\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Calculaţi $\det(A-B)$.

b) Calculaţi inversa matricei AB.

c) Rezolvaţi ecuaţia $\det(A+xB)=0, x\in\mathbb{R}$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=3xy+3x+3y+2,\ x,y\in\mathbb{Z}$.

a) Arătaţi că mulţimea $H=\{3k+2\mid k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu legea „*“.

b) Decideţi dacă „*“ are element neutru.

c) Rezolvaţi ecuaţia $(x*x)*x=8, x\in\mathbb{Z}$.

1. *a)* $A-B=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-4\\-2&5\end{pmatrix}$. Determinantul este egal cu 7.

b) $AB=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3\\1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&8\\4&-9\end{pmatrix}$. Cum $\det(AB)=-5\ne0$, rezultă că AB este inversabilă şi

$$(AB)^{-1}=\frac{1}{\det(AB)}\cdot(AB)^*=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-9&-8\\-4&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{5}&\frac{8}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

c) $A + xB = \begin{pmatrix} 2-x & -1+3x \\ -1+x & 3-2x \end{pmatrix}$, deci $\det(A + xB) = (2x - 3)(x - 2) - (3x - 1)(x - 1) = 2x^2 - 7x + 6 - 3x^2 + 4x - 1 = -x^2 - 3x + 5$. Avem $\det(A + xB) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5 = 0$ cu soluțiile $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{29}}{2}$.

2. *a)* Avem $x * y = 3(x + 1)(y + 1) - 1$, $x, y \in \mathbb{Z}$. Fie $x, y \in H$, $x = 3k + 2$, $y = 3p + 2$, $k, p \in \mathbb{Z}$. Rezultă că $x * y = 3(3k + 3)(3p + 3) - 1 = 27(k + 1)(p + 1) - 1 = 3s - 1$ unde $s = 9(k + 1)(p + 1)$. Cum $x * y = 3(s - 1) + 2$ și $s - 1 \in \mathbb{Z}$, rezultă că $x * y \in H$. ***b)*** Dacă legea „$*$“ ar admite elementul neutru $e \in \mathbb{Z}$, atunci $1 * e = 1$, deci $6(e + 1) - 1 = 1$, de unde $3(e + 1) = 1$. Rezultă că 3 divide 1, fals. Deci „$*$“ nu are element neutru. ***c)*** Avem $(x * x) * x = [3(x + 1)^2 - 1] * x = 9(x + 1)^3 - 1$. Atunci $(x * x) * x = 8 \Leftrightarrow 9(x + 1)^3 - 1 = 8 \Leftrightarrow (x + 1)^3 = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică de numere reale, cu proprietatea că $a_1 + a_2 + a_3 = 2$ și $a_4 + a_5 + a_6 = 16$. Determinați rația progresiei.

2. Fie $f : (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln \frac{x-3}{x+3}$. Arătați că f este funcție impară.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt{3x-2} = 1-2x$.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}$ pentru care $n! + (n+1)! < 840$.

5. Fie $\overline{u} = 2\overline{i} - 3\overline{j}$ și $\overline{v} = 4\overline{i} + \overline{j}$. Calculați $\left| 3\overline{u} - \overline{v} \right|$.

6. Fie $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, cu $\sin x = -\frac{5}{12}$. Calculați $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Subiectul I

1. Fie q rația progresiei. Atunci $a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2)$ și $a_4 + a_5 + a_6 = a_1(q^3 + q^4 + q^5) = a_1q^3(1 + q + q^2)$. Obținem $\frac{a_1q^3(1+q+q^2)}{a_1(1+q+q^2)} = 8$, deci $q^3 = 8$, de unde $q = 2$.

2. $f(-x) = \ln \frac{-x-3}{-x+3} = \ln \frac{x+3}{x-3} = \ln\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^{-1} = -\ln \frac{x-3}{x+3} = -f(x)$, $\forall x \in D_f$, deci f este impară.

3. Sistemul de condiții $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases}$ conduce la $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cap \left[\frac{2}{3}, \infty\right) = \varnothing$, deci ecuația nu are soluții.

4. Dacă $n \geq 5$, rezultă că $n! + (n + 1)! \geq 5! + 6! = 120 + 720 = 840$, deci orice valoare a lui n care verifică ipoteza aparține mulțimii $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Dacă $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, atunci $n! + (n + 1) \leq 4! + 5! = 24 + 120 < 840$, deci soluțiile sunt 0, 1, 2, 3 și 4. **5.** $3\overline{u} - \overline{v} = 3(2\overline{i} - 3\overline{j}) - (4\overline{i} + \overline{j}) = 2\overline{i} - 10\overline{j}$. Atunci $\left| 3\overline{u} - \overline{v} \right| = \sqrt{4+100} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. **6.** Din $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, rezultă $\cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$. Cum $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, avem $\cos x < 0$, deci $\cos x = -\frac{12}{13}$. Rezultă că $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = -5$.

ubiectul al II-lea

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} x\, f\left(\frac{1}{x}\right)$.

b) Studiați derivabilitatea funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt[3]{f(x)}$, în punctul $x=0$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(f(-1)+f(-2)+\ldots+f(-n)+n\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $n\geq 1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_n\leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n\geq 1$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} n(I_{n+1}+I_{n-1})$.

Subiectul al III-lea

1. a) $\lim\limits_{x\to\infty} xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{e^x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}=+\infty$. Rezultă că g nu e derivabilă în 0 și $g'(0)=\infty$.

c) $f(-1)+f(-2)+\ldots+f(-n)+n=\frac{1}{e}-1+\frac{1}{e^2}-1+\ldots+\frac{1}{e^n}-1+n=\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\ldots+\frac{1}{e^n}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1-\frac{1}{e^n}}{1-\frac{1}{e}}$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{e^n}=0$, rezultă că limita cerută este $\frac{1}{e-1}$.

2. a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$.

b) Fie $x\in[0,1]$. Atunci $\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}$, deci $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\leq 1$. Cum $\frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}\leq x^n$ pentru orice $x\in[0,1]$, rezultă că $I_n\leq\int_0^1 x^n dx$. Cum $\int_0^1 x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$, rezultă concluzia.

c) $I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int_0^1 x^n\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\int_0^1 x^n(\sqrt{x^2+1})'\,dx=x^n\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^1-\int_0^1 nx^{n-1}\sqrt{x^2+1}\,dx=$

$=\sqrt{2}-n\int_0^1 x^{n-1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{2}-n\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\sqrt{2}-n(I_{n+1}+I_{n-1})$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty}I_{n+1}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}n(I_{n+1}+I_{n-1})=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}-I_{n+1})=\sqrt{2}$.

Subiectul I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z=\frac{2}{1+i}$.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-4x+a$. Determinați $a\in\mathbb{R}$ știind că mulțimea imaginilor lui f este intervalul $[3,\infty)$.

3. Rezolvați ecuația $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}, x\in[0,2\pi)$.

4. Determinați numărul funcțiilor pare $f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\{1,2,3\}$.

5. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Calculați $|\overline{AB}+\overline{AC}|$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4$, $AC=6$ și $A=\frac{\pi}{3}$. Calculați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC.

Subiectul I

1. *a)* $z=\frac{2(1-i)}{2}=1-i\Rightarrow \operatorname{Re}z=1$.

2. Cum $\operatorname{Im}f=\left[-\frac{\Delta}{4a},\infty\right)=\left[f\left(-\frac{b}{2a}\right),\infty\right)=\left[f(2),\infty\right)=\left[a-4,\infty\right)$, rezultă $a-4=3\Leftrightarrow a=7$.

3. $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{4}\in\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}$

.

Rezultă că mulțimea soluțiilor ecuației este $\left\{(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+k\pi\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\cap[0,2\pi)=\left\{\frac{5\pi}{12},\frac{13\pi}{12}\right\}$.

4. Deoarece $f(-1)=f(1)$ și $f(-2)=f(2)$, rezultă că numărul cerut este egal cu numărul funcțiilor de la $\{0,1,2\}$ în $\{1,2,3\}$, deci $3^3=27$.

5. Prelungim semidreapta $(DC$ cu $CC'=DC$. Cum $ACC'B$ este paralelogram rezultă că $\overline{AB}+\overline{AC}=2\,\overline{AM}$, unde M este mijlocul lui BC. Atunci $\left|\overline{AB}+\overline{AC}\right|=\left|2\,\overline{AM}\right|$. unde M este mijlocul lui BC. Atunci $\left|\overline{AB}+\overline{AC}\right|=\left|2\,\overline{AM}\right|=2AM=2\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\sqrt{5}$.

6. $S_{ABC}=\frac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\frac{24\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$. Din teorema cosinusului rezultă că $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos A=16+36-24=28$, deci $BC=2\sqrt{7}$. Obținem $h_A=\frac{2\,S_{ABC}}{BC}=\frac{12\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=6\sqrt{\frac{3}{7}}$.

Subiectul al II-lea

Subiectul al II-lea

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ şi matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $\det(A)$.

b) Arătaţi că $\operatorname{rang}(A) = 1$ dacă şi numai dacă $a = b = c$.

c) Arătaţi că, dacă a, b, c sunt numere întregi şi $\det(A) \neq 0$, atunci A^{-1} **nu** are toate elementele întregi.

2. Fie $\varepsilon = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$ şi legea „*" definită pe $\mathbb{C}$ prin $z_1 * z_2 = z_1 z_2 + \varepsilon z_1 + \varepsilon z_2 - 1$.

a) Arătaţi că $z_1 * z_2 = (z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon) - \varepsilon$, oricare ar fi $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

b) Demonstraţi că mulţimea $\mathbb{C} \setminus \{-\varepsilon\}$ este grup în raport cu legea „*".

c) Fie A punctul de afix $-\varepsilon$ şi H mulţimea afixelor punctelor cercului de centru A şi rază 1. Arătaţi că H este subgrup al grupului definit la punctul *b)*.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 \end{vmatrix} =$
$= (b-a)(c-a)(c^2+ac-b^2-ab) = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$.

b) Dacă $\operatorname{rang}(A) = 1$ rezultă că $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & c \end{vmatrix} = 0$, dacă $b - a = c - a = 0$, de unde $a = b = c$. Pentru $a = b = c$, rezultă $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ a^3 & a^3 & a^3 \end{pmatrix}$. Cum toţi minorii de ordinul 2 sunt 0 şi $A \neq O_3$, rezultă $\operatorname{rang}A = 1$.

c) Presupunem că A^{-1} are toate elementele întregi. Cum $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_3 = 1$ şi $\det A \in \mathbb{Z}$, rezultă că $\det A \in \{-1, 1\}$. Atunci $c - b,\ c - a,\ b - a \in \{-1, 1\}$. Obţinem $a = b$ sau $a = c$ sau $b = c$, deci $\det(A) = 0$, fals.

2. *a)* Cum ε este soluţia ecuaţiei $x^2 - x + 1 = 0$, rezultă că $\varepsilon^2 - \varepsilon = -1$, deci $(z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon) - \varepsilon =$ $= z_1z_2 + \varepsilon z_1 + \varepsilon z_2 + \varepsilon^2 - \varepsilon = z_1z_2 + \varepsilon z_1 + \varepsilon z_2 - 1 = z_1 * z_2$.

b) Fie $G = \mathbb{C} \setminus \{-\varepsilon\}$ şi $z_1, z_2 \in G$. Cum $z_1 + \varepsilon \neq 0$, $z_2 + \varepsilon \neq 0$ rezultă că $(z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon) \neq 0$, deci $z_1 * z_2$ $\in G$. Rezultă că „*" este lege bine definită pe G. Vom verifica axiomele grupului:

- Avem $(z_1 * z_2) * z_3 = [(z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon) - \varepsilon] * z_3 = (z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon)(z_3 + \varepsilon) - \varepsilon$ şi $z_1 * (z_2 * z_3) = z_1 * [(z_2$ $+ \varepsilon)(z_3 + \varepsilon) - \varepsilon] = (z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon)(z_3 + \varepsilon) - \varepsilon = (z_1 * z_2) * z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in G$, deci legea „*" e asociativă.

• $e \in G$ este element neutru $\Leftrightarrow z * e = e * z = z, \forall z \in G \Leftrightarrow (z + \varepsilon)(e + \varepsilon) - \varepsilon = z, \forall z \in G \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (z + \varepsilon)(e + \varepsilon) = z + \varepsilon, \forall z \in G \Leftrightarrow e + \varepsilon = 1 \Leftrightarrow e = 1 - \varepsilon$. Cum $1 - \varepsilon \in G$, rezultă că $e = 1 - \varepsilon$ este elementul neutru al legii „*".

• Fie $z \in G$, z este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists z' \in G$ astfel încât $z * z' = z' * z = e \Leftrightarrow (z + \varepsilon)(z' + \varepsilon) - \varepsilon = 1 - \varepsilon$
$\Leftrightarrow (z + \varepsilon)(z' + \varepsilon) = 1$. Cum $z + \varepsilon \neq 0$ rezultă că $z' = -\varepsilon + \frac{1}{z+\varepsilon} \in G$, deoarece $\frac{1}{z+\varepsilon} \neq 0$. Rezultă că toate elementele G sunt simetrizabile.

c) Avem $H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \varepsilon| = 1\}$. Fie $z_1, z_2 \in H$. Atunci $|(z_1 * z_2) + \varepsilon| = |(z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon) - \varepsilon + \varepsilon| = |(z_1 + \varepsilon)(z_2 + \varepsilon)| = |z_1 + \varepsilon|\,|z_2 + \varepsilon| = 1$, deci $z_1 * z_2 \in H$. Fie $z \in H$. Din punctul ***b)*** rezultă că $z' = -\varepsilon + \frac{1}{z+\varepsilon}$, de unde $|z' + \varepsilon| = \left|\frac{1}{z+\varepsilon}\right| = \frac{1}{|z+\varepsilon|} = 1$. Obținem că $z' \in H$, deci H este subgrup al lui G.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \arcsin x$.

a) Arătați că f este strict descrescătoare.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$.

c) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

2. Fie $f: (-2, 2) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{2-x}{2+x}$.

a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul lui f, axa Ox și dreptele $x = 0, x = 1$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$.

Subiectul al III-lea

1. a) $f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}\ (\sqrt{1-x^2}+1)}$, $x\in(-1,1)$.

Cum $f'(x)\le 0$, $\forall x\in(-1,1)$ și $f'=0\Leftrightarrow x=0$, rezultă că f este strict descrescătoare pe $(-1,1)$. Cum f este continuă în 1 și -1, rezultă că f este strict descrescătoare pe $[-1,1]$.

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arcsin x}{x^3}$. Aplicăm teorema lui l'Hospital în cazul $\frac{0}{0}$. Cum $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{3\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+1)}=-\frac{1}{6}$ rezultă că limita cerută este $-\frac{1}{6}$.

c) $f''(x)=\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=-\left((1-x^2)^{-1/2}\right)'=\frac{1}{2}\cdot(1-x^2)^{-3/2}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$. Rezultă că $f''(x)>0$ pentru $x\in(-1,0)$ și $f''(x)<0$ pentru $x\in(0,1)$. Cum f este continuă în 0, rezultă că 0 este unicul punct de inflexiune a graficului lui f.

2. a) $A=\int_0^1|f(x)|\,dx$. Cum $\frac{2-x}{2+x}\le 1$ pentru $x\in[0,1]$ rezultă că $f(x)\le 0$ pentru $x\in[0,1]$, deci

$A=-\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\ln(2+x)\,dx-\int_0^1\ln(2-x)\,dx=\int_0^1 x'\ln(2+x)\,dx-\int_0^1 x'\ln(2-x)\,dx=$

$=x\ln(2+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x\,dx}{x+2}-x\ln(2-x)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{x\,dx}{x-2}=\ln 3+\int_0^1 x\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\ln 3+\int_0^1\frac{4x}{x^2-4}dx=$

$=\ln 3+2\ln\left|x^2-4\right|\Big|_0^1=\ln 3+2\ln\frac{3}{4}=\ln\frac{27}{16}$.

b) Cum $f(-x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)^{-1}=-\ln\frac{2-x}{2+x}=-f(x)$, $\forall x\in(-2,2)$, rezultă că f este impară, deci $\int_{-1}^1 f(x)\,dx=0$.

c) Aplicând teorema lui l'Hospital în cazul $\frac{0}{0}$ obținem $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2-x}{2+x}}{2x}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{-2x}{2+x}\right)}{-\frac{2x}{2+x}}\cdot\frac{-1}{2+x}=-\frac{1}{2}$. Deci limita cerută este $-\frac{1}{2}$.

Subiectul I

1. Câte elemente are mulţimea $(\log_2 5, \log_2 9) \cap \mathbb{Z}$?

2. Determinaţi imaginea funcţiei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\sin x \cdot \cos x = \dfrac{1}{4}$, $x \in [0, 2\pi)$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de 4 cifre, acesta să fie multiplu de 5?

5. Fie $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$ şi $C(-3, 4)$. Determinaţi $\cos(\widehat{ABC})$.

6. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Arătaţi că $AB + AC = 2(R + r)$.

Subiectul I

1. Cum $2 = \log_2 4 < \log_2 5 < \log_2 8 = 3 < \log_2 9 < \log_2 16 = 4$, rezultă că mulţimea dată are un singur element, $x = 3$. **2.** Avem $y \in \text{Im}f \Leftrightarrow \exists\, x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\dfrac{x}{x^2+1} = y \Leftrightarrow$ ecuaţia $yx^2 - x + y = 0$ are soluţii reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, deci $\text{Im}\, f = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$.

3. Avem succesiv: $\sin x \cos x = \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \in \left\{(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, deci $x \in \left\{(-1)^k \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. Cum $x \in [0, 2\pi)$, obţinem soluţiile $\left\{\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{5\pi}{12}, \dfrac{13\pi}{12}, \dfrac{17\pi}{12}\right\}$.

4. Numărul numerelor naturale de 4 cifre este $9 \cdot 10^3$, iar cel al multiplilor de 5 din această mulţime este $9 \cdot 10^2 \cdot 2$. Probabilitatea este $\dfrac{1}{5}$. **5.** Avem $\overrightarrow{BA}(3, 2)$ şi $\overrightarrow{BC}(-2, 3)$. Cum $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -6 + 6 = 0$, rezultă $\cos(\widehat{ABC}) = 0$. **6.** Fie $AB = 2c$, $AC = 2b$, $BC = 2a$. Atunci $R = a$ şi $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{2bc}{a+b+c}$. Avem:

$$2(R+r) = 2\left(a + \frac{2bc}{a+b+c}\right) = 2\frac{a^2+ab+ac+2bc}{a+b+c} = 2\frac{b^2+c^2+ab+ac+2bc}{a+b+c} = 2\frac{(b+c)^2+a(b+c)}{a+b+c} =$$
$$= 2(b+c) = AB + AC.$$

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

a) Determinaţi rangul matricei A.

b) Arătaţi că $A^{2012} = A$.

c) Arătaţi că $(I_2 + 3A)^n = I_2 + (4^n - 1)A$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulţimea $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ se defineşte legea $(x, y) * (z, t) = (xz + 2yt,\ xt + yz)$. Notăm cu $G = \left\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a^2 - 2b^2 = 1\right\}$.

a) Arătaţi că G este parte stabilă a lui $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ în raport cu legea „$*$".

b) Arătaţi că $(1, 0)$ este element neutru al legii „$*$" pe G.

c) Demonstraţi că G este mulţime infinită.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A) = 0$. Cum $A \neq O_2$ rezultă că $\operatorname{rang}(A) = 1$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = A$. Vom demonstra prin inducție că $A^n = A, \forall n \geq 1$. Cum $P(1)$ și $P(2)$ sunt
adevărate, presupunem că $A^n = A$. Atunci $A^{n+1} = A^n \cdot A = A \cdot A = A^2 = A$, deci $P(n)$ este adevărată $\forall n \geq$
1. În concluzie $A^{2012} = A$.

c) Cum $I_2 \cdot (3A) = (3A) \cdot I_2$, folosind binomul lui Newton obținem $(I_2 + 3A)^n =$
$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot I_2^{n-k} \cdot (3A)^k = I_2 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k \cdot 3^k \cdot A = I_2 + A\left(1 + \sum_{k=1}^{n} C_n^k 3^k - 1\right) = I_2 + A[(1+3)^n - 1] =$
$= I_2 + (4^n - 1)A$.

2. *a)* Fie (a, b) și $(x, y) \in G$. Atunci $(a, b) * (x, y) = (ax + 2by, ay + bx)$. Cum $\alpha = ax + 2by \in \mathbb{Z}$, $\beta =$
$ay + bx \in \mathbb{Z}$ și $\alpha^2 - 2\beta^2 = (ax + 2by)^2 - 2(ay + bx)^2 = a^2x^2 + 4b^2y^2 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 = (a^2 - 2b^2)(x^2 -$
$2y^2) = 1 \cdot 1 = 1$ rezultă că $(a, b) * (x, y) \in G$. Cum $(1, 0) \in G$ rezultă că $G \neq \varnothing$ și de aici concluzia.
b) Din $(a, b) * (1, 0) = (a, b) = (1, 0) * (a, b)$, $\forall (a, b) \in G$, rezultă că „$*$" are pe G elementul neutru $(1,$
$0)$. *c)* Fie $x_1 = (3, 2)$. Cum $9 - 2 \cdot 4 = 1$ rezultă că $x_1 \in G$. Notăm cu $x_2 = x_1 * x_1$, $x_3 = x_2 * x_1$ și inductiv $x_{n+1} =$
$x_n * x_1$. Cum „$*$" este lege pe G rezultă că $x_n \in G, \forall n \geq 1$. Dacă $x_n = (a_n, b_n)$, atunci cum $x_{n+1} = (a_n, b_n) * (3,$
$2) = (3a_n + 4b_n, 2a_n + 3b_n)$ rezultă că $a_{n+1} = 3a_n + 4b_n$ și $b_{n+1} = 2a_n + 3b_n$. Cum $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, rezultă că
$a_n,$
$b_n \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq 1$ și $a_{n+1} > a_n$. Rezultă $x_n \neq x_m\ \forall n \neq m$, deci mulțimea $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este infinită.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Fie A punctul d

Subiectul al III-lea

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{x}{3}$, și k un număr natural impar, $k \geq 3$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 3$, de pe grafic.

b) Arătați că funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$, nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

c) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit astfel: $x_0 = 1$ și $x_{n+1} = f(x_n)$. Calculați $\lim_{n \to \infty} x_n$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se notează $I_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{x^2 + 1}\,dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că șirul (I_n) este monoton și mărginit.

c) Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$.

1. *a)* Fie A punctul de pe graficul lui f, de abscisa 3. Cum $f(3) = 27 + 1 = 28$, rezultă că A are
coordonatele $(3, 28)$. Cum $f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{3}$ și $f'(3) = 27 + \frac{1}{3} = \frac{82}{3}$, rezultă că ecuația tangentei în A
este $y - 28 = \frac{82}{3}(x - 3)$. Deci, ecuația tangentei este $82x - 3y - 162 = 0$.

b) Avem $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[k]{f(x)}-\sqrt[k]{f(0)}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[k]{x^3+\frac{x}{3}}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[k]{\dfrac{x^3+\frac{x}{3}}{x^k}}=\lim\limits_{x\to0}\sqrt[k]{\dfrac{x^2+\frac{1}{3}}{x^{k-1}}}=+\infty$, deoarece $k-1$ este număr par; rezultă că $g'(0)=\infty$, deci g nu e derivabilă în 0.

c) Deoarece $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{3}>0\ \ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă că f este strict crescătoare. Arătăm prin inducție că șirul $(x_n)_{n\geq1}$ este strict crescător. Avem $x_1=1+\dfrac{1}{3}>x_0=1$. Presupunem că $x_n>x_{n-1}$. Cum f este strict crescătoare, rezultă că $f(x_n)>f(x_{n-1})$, deci $x_{n+1}>x_n$. Dacă $(x_n)_n$ e mărginit, atunci $x_n\to l\in\mathbb{R}$. Cum $x_{n+1}=x_n^3+\dfrac{x_n}{3}$, rezultă că $l=l^3+\dfrac{l}{3}\Leftrightarrow 3l^3=2l\ \Leftrightarrow\ l\in\left\{-\sqrt{\dfrac{2}{3}},0,\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right\}$. Deoarece $(x_n)_n$ este strict crescător, rezultă că $x_n<l,\ \forall n\in\mathbb{N}$, deci $x_n<\sqrt{\dfrac{2}{3}}<1$, $\forall n\geq0$, fals. Deci $(x_n)_n$ este nemărginit și fiind crescător, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

2. *a)* $I_1=\displaystyle\int_0^1 x\cdot\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 2x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)^{1/2}\cdot(x^2+1)'\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}(x^2+1)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

b) Cum $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_0^1(x^{n+1}\sqrt{x^2+1}-x^n\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\sqrt{x^2+1}\,(x-1)\,\mathrm{d}x\leq0$, deoarece $x^n\sqrt{x^2+1}\geq0$ și $x-1\leq0,\ \forall x\in[0,1]$, rezultă că șirul $(I_n)_{n\geq1}$ este descrescător, deci mărginit superior. Cum $x^n\sqrt{x^2+1}\geq0,\ (\forall)x\in[0,1]$ rezultă că $I_n\geq0,\ \forall n\geq1$, deci șirul $(I_n)_n$ este mărginit.

c) Cum $0\leq x^n\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}\,x^n,\ \forall x\in[0,1],\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, avem $0\leq I_n\leq\displaystyle\int_0^1\sqrt{2}x^n\,\mathrm{d}x=\sqrt{2}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}}{n+1}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{n+1}=0$, din teorema cleștelui rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului $z=(3-4i)^2$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}$ și funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+a$. Determinați valorile lui a pentru care $f=f^{-1}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$, ecuația $\sin x=\cos 2x$.

4. Câte numere naturale de trei cifre au cel puțin o cifră impară?

5. Fie dreptele d_1 și d_2 de ecuații $x-3y+1=0$ și respectiv $3x+y+2=0$, a un număr real și P punctul de coordonate $(0,a)$. Determinați valorile lui a știind că P este egal depărtat de d_1 și d_2.

6. Triunghiul ABC are aria egală cu $\sqrt{3}$, latura AB egală cu 2 și unghiul $A=\dfrac{\pi}{3}$. Calculați BC.

Subiectul I

1. Avem $|z| = |3-4i|^2 = 5^2 = 25$.

2. $f = f^{-1} \Leftrightarrow (f \circ f)(x) = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x+a) = x \Leftrightarrow x + a + a = x, \forall x \in \mathbb{R}$, de unde $a = 0$.

3. Ecuația se scrie $\sin x = 1 - 2\sin^2 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ sau $\sin x = -1$, deci $x \in \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Numărul numerelor naturale de trei cifre este 900, iar numărul celor cu toate cele trei cifre pare este 100. Deci numărul cerut este 800.

5. $d(P,d_1) = \frac{|-3a+1|}{\sqrt{10}}$, iar $d(P,d_2) = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$. Atunci $d(P, d_1) = d(P, d_2) \Leftrightarrow |-3a+1| = |a+2| \Leftrightarrow -3a+1 = a+2$ sau $-3a+1 = -a-2 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{4}$ sau $a = \frac{3}{2}$. Deci $a \in \left\{-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right\}$.

6. Avem $\sqrt{3} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} \Leftrightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{\sin A} = 2$, deci triunghiul ABC este echilateral. Rezultă $BC = 2$.

1. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $\operatorname{rang}(B) = 2$, pentru orice valoare reală a lui m.
b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care $\det(AB) = 0$.
c) Determinați $X \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{Z})$ astfel încât $X \cdot A = (1 \quad 2 \quad 8)$.

2. Fie a un număr real și legea „$*$" definită pe $\mathbb{R}$, $x * y = xy + ax + y$.

a) Arătați că există un unic $e \in \mathbb{R}$ astfel încât $e * x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care legea „$*$" are element neutru.
c) Pentru $a = 1$, rezolvați ecuația $(x * x) * (x * x) = 15$, $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. ***a)*** Cum $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{C})$ și $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, rezultă că rangul lui B este 2, $\forall m \in \mathbb{R}$.

b) $AB = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2+m & 7 \end{pmatrix}$. Atunci $\det(AB) = 11 + 2m$. Rezultă că $m = -\dfrac{11}{2}$.

c) Fie $X = (a\ b)$; $X \cdot A = (1\ 2\ 8) \Leftrightarrow a + 2b = 1, b = 2, -2a + b = 8 \Leftrightarrow a = -3, b = 2 \Rightarrow X = (-3\ 2)$.

2. ***a)*** Avem $e * x = x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow ex + ae + x = x, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e(x+a) = 0, (\forall) x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 0$. Deci singurul număr cu proprietatea din enunț este 0.

b) Legea „$*$" are element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x * e = e * x = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xe + ax + e = x$ și $ex + ae + x = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(e + a - 1) + e = 0$ și $ex + ae = 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 0$ și $e + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

c) Pentru $a = 1$ avem $x * y = xy + x + y = (x+1)(y+1) - 1$. Atunci $(x * x) * (x * x) = 15 \Leftrightarrow ((x+1)^2 - 1) * ((x+1)^2 - 1) = 15 \Leftrightarrow (x+1)^4 - 1 = 15 \Leftrightarrow (x+1)^4 = 16 \Leftrightarrow x + 1 = 2$ sau $x + 1 = -2$, deci $x = 1$ sau $x = -3$.

Subiectul al III-lea

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f : \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right) \to [1, \infty)$, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$.

a) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x = 0$.

b) Arătați că f este bijectivă.

c) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează cu x_n unicul număr real din intervalul $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $f(x_n) = n$. Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \displaystyle\int_1^e x \ln^n x \, dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

1. ***a)*** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x^2}$. Aplicând teorema lui l'Hôspital, cazul $\dfrac{0}{0}$, obținem: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{2x\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{2x\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2}=0$, deci f este derivabilă în 0 și $f'(0) = 0$.

b) Pentru $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ avem $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg} x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}=\dfrac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2 x}$.

Fie $g:\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $g(x) = 2x - \sin 2x$. Cum $g'(x) = 2 - 2\cos 2x = 2(1 - \cos 2x) > 0$, $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, rezultă că g este strict crescătoare pe $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, deci $g(x)>\lim\limits_{t\searrow 0}g(t)=0$, $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Cum $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $f'(0) = 0$ rezultă că f este strict crescătoare pe $[0, \dfrac{\pi}{2})$, deci este injectivă. Deoarece $f(0) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\pi/2}f(x)=\infty$, din continuitatea lui f rezultă că $\operatorname{Im} f = [1, \infty)$, deci f este surjectivă.

c) Cum $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\infty$ și f este continuă și inversabilă rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}f^{-1}(x)=\dfrac{\pi}{2}$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}f^{-1}(n)=\dfrac{\pi}{2}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{\pi}{2}$.

2. ***a)*** $I_1=\displaystyle\int_1^e x\ln\,\mathrm{d}x=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x\,\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,\mathrm{d}x=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\,\Big|_1^e=\frac{1+e^2}{4}$.

b) $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_1^e x\ln^n x(\ln x-1)\,\mathrm{d}x\le 0$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deoarece $0 \le \ln x \le 1$, $\forall x \in [1, e]$. Rezultă că $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător, deci mărginit superior. Cum $x\ln^n x\ge 0$, $\forall x \in [1, e]$, obținem $I_n \ge 0$, $\forall n \ge 1$, deci șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este mărginit.

c) $I_{n+1}=\displaystyle\int_1^e x\ln^{n+1}x\,\mathrm{d}x=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln^{n+1}x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln^{n+1}x\,\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot(n+1)\ln^n x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{e^2}{2}-\frac{n+1}{2}\int_1^e x\ln^n x\,\mathrm{d}x=$
$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$, deci $I_n=\dfrac{e^2}{n+1}-\dfrac{2}{n+1}\cdot I_{n+1}$. Cum șirul $(I_n)_n$ este mărginit și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

1. Determinați numărul elementelor mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\left[\frac{x+1}{2}\right]=3\right\}$.

2. Fie funcția bijectivă $f:(1,\infty)\to[2,\infty)$, $f(x)=x^2-2x+3$. Determinați f^{-1}.

3. Rezolvați ecuația $\arccos x+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi$, $x\in[-1,1]$.

4. Care este probabilitatea ca alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$, aceasta să conțină elementul 1?

5. Determinați numerele reale a și b știind că punctul $A(1,2)$ este punctul de intersecție a dreptelor de ecuații $2x+ay=4$ și respectiv $x-y=b$.

6. Fie $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $\text{ctg}x-\text{tg}x=4$. Calculați tg $2x$.

Subiectul I

1. Avem $\left[\frac{x+1}{2}\right]=3\Leftrightarrow 3\le\frac{x+1}{2}<4\Leftrightarrow 5\le x<7\Rightarrow A=[5,7)\cap\mathbb{Z}=\{5,6\}$, deci A are două elemente.
2. Fie $y\in[2,\infty)$. Atunci $f(x)=y\Leftrightarrow x^2-2x+3=y\Leftrightarrow x^2-2x+3-y=0$. Cum $\Delta=4y-8\ge0$, rezultă că $x=1\pm\sqrt{y-2}$. Cum $x\in[1,\infty)$ obținem $f^{-1}(y)=1+\sqrt{y-2}$. Ca urmare, inversa funcției f este $f^{-1}:[2,\infty)\to[1,\infty)$, $f^{-1}(x)=1+\sqrt{x-2}$. **3.** Ecuația se scrie $\arccos x+\frac{2\pi}{3}=\pi\Leftrightarrow\arccos x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow$ $\Rightarrow x=\cos\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. **4.** Numărul submulțimilor lui A este $2^5=32$, iar numărul submulțimilor care conțin elementul 1 este egal cu numărul submulțimilor lui $B=\{2,3,4,5\}$, adică $2^4=16$. Probabilitatea cerută este $\frac{1}{2}$. **5.** Cum $A\in d_1$ rezultă că $2+2a=4$, deci $a=1$. Din $A\in d_2$ rezultă că $b=1-2=-1$.
6. $\text{ctg}\,x-\text{tg}\,x=4\Leftrightarrow\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=4\Leftrightarrow\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x\cos x}=4\Leftrightarrow\frac{2\cos2x}{\sin2x}=4\Leftrightarrow\text{ctg}\,2x=2\Leftrightarrow\text{tg}\,x=\frac{1}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie permutarea $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&2\end{pmatrix}\in S_5$.

a) Determinați inversiunile permutării 5.

b) Determinați numărul de elemente ale mulțimii $\{\sigma^k\mid k\in\mathbb{Z}\}$.

c) Fie $i\in\{2,3,4,5\}$ și τ transpoziția $(1\ i)$. Arătați că $\sigma\tau\neq\tau\sigma$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+2012}$.

a) Dați exemplu de două numere reale x și y astfel încât $x*y$ este număr natural.

b) Arătați că $\mathbb{R}$ este grup în raport cu legea „*".

c) Arătați că grupul $(\mathbb{R},*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R},+)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Inversiunile lui σ sunt (2, 5), (3, 5) și (4, 5).

b) Avem $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ și $\sigma^4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = e$. Fie $k, c \in \mathbb{Z}$ și $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ astfel încât $k = 4c + r$. Atunci $\sigma^k = \sigma^{4c+r} = (\sigma^4)^c \cdot \sigma^r = \sigma^r$, deci $A = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$.
În concluzie, A are 4 elemente.

c) Presupunem că $\sigma\tau = \tau\sigma$. Atunci $(\sigma\tau)(1) = (\tau\sigma)(1) \Rightarrow \sigma(\tau(1)) = \tau(\sigma(1)) \Rightarrow \sigma(i) = \tau(1) \Rightarrow \sigma(i) = i$, fals pentru ca singurul punct fix al lui τ este 1, iar $i \geq 2$.

2. *a)* De exemplu, $x = y = -\sqrt[3]{\frac{2012}{2}}$. Atunci $x^3 = y^3 = -1006$ și $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2012} = 0 \in \mathbb{N}$.

b) Din enunț, „*" este lege pe $\mathbb{R}$. Pentru asociativitate, fie $x, y, z \in \mathbb{R}$ și avem $(x * y) * z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + 2012} * z = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 + 4024} = x * (y * z)$.
Deoarece $x * \sqrt[3]{-2012} = \sqrt[3]{-2012} * x = \sqrt[3]{x^3 - 2012 + 2012} = x$ rezultă că $e = -\sqrt[3]{2012}$ este elementul neutru al legii „*". Fie $x \in \mathbb{R}$; din $x * x' = x' * x = e$ se obține $x' = -\sqrt[3]{4024 + x^3} \in \mathbb{R}$, deci toate elementele lui $\mathbb{R}$ sunt simetrizabile. Ca urmare, $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

c) Fie $f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}, *)$, $f(x) = \sqrt[3]{x - 2012}$. Cum $f(x) * f(y) = \sqrt[3]{x - 2012} * \sqrt[3]{y - 2012} = \sqrt[3]{x + y - 2012} = f(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ și f este bijectivă, rezultă că f este izomorfism.

2. Pe $(0, \infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = \sqrt{x^{\log_3 y}}$.

a) Arătați că dacă $x * y = 1$, atunci $x = 1$ sau $y = 1$.

b) Demonstrați că mulțimea $G = (0, \infty) \setminus \{1\}$ este grup în raport cu legea „*".

c) Rezolvați ecuația $x * x * x = 3$, $x \in (0, \infty)$.

2. Observăm că putem scrie $x*y=x^{\frac{1}{2}\log_3 y}=x^{\log_9 y}=\left(9^{\log_9 x}\right)^{\log_9 y}=9^{\log_9 x\cdot\log_9 y}$.

a) $x*y=1 \Leftrightarrow 9^{\log_9 x\cdot\log_9 y}=1 \Leftrightarrow \log_9 x\cdot\log_9 y=0 \Leftrightarrow \log_9 x=0$ sau $\log_9 y=0 \Leftrightarrow x=1$ sau $y=1$.

b) Cum $x*y=9^{\log_9 x\cdot\log_9 y}>0$, $\forall x,\ y>0$, din punctul *a)* rezultă că $x*y\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ pentru orice $x,y\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, deci „*“ este lege de compoziție bine definită pe $G=(0,\infty)\setminus\{1\}$. Verificăm în continuare axiomele grupului.

• Asociativitatea: pentru orice $x,y,z\in(0,\infty)\setminus\{1\}$ avem $(x*y)*z=x*(y*z)$, deoarece:

$$(x*y)*z=9^{\log_9 x\cdot\log_9 y}*z=9^{\log_9\left(9^{\log_9 x\cdot\log_9 y}\right)\cdot\log_9 z}=9^{\log_9 x\cdot\log_9 y\cdot\log_9 z}$$

și $x*(y*z)=x*9^{\log_9 y\cdot\log_9 z}=9^{\log_9 x\cdot\log_9\left(9^{\log_9 y\cdot\log_9 z}\right)}=9^{\log_9 x\cdot\log_9 y\cdot\log_9 z}$.

• Existența elementului neutru: Cum $x*9=9^{\log_9 x\cdot\log_9 9}=x$ și $9*x=9^{\log_9 9\cdot\log_9 x}=x$, pentru orice $x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, rezultă că 9 este element neutru al legii „*“.

• Simetrizabilitatea elementelor: Fie $x\in(0,\infty)\setminus\{1\}$. Cum $x*x'=x'*x=e \Leftrightarrow 9^{\log_9 x\cdot\log_9 x'}=9 \Leftrightarrow (x')^{\log_9 x}=9 \Leftrightarrow x'=9^{\frac{1}{\log_9 x}}=9^{\log_x 9}\in(0,\infty)\setminus\{1\}$, rezultă că toate elementele din G sunt simetrizabile.

c) $x*x*x=3 \Leftrightarrow 9^{\log_9^3 x}=3 \Leftrightarrow \log_9^3 x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_9 x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Leftrightarrow x=9^{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-2\frac{x-1}{x+1}$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

b) Arătați că graficul funcției f nu are asimptotă spre $+\infty$.

c) Arătați că $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}<\frac{1}{2}\ln(n+1)$, pentru oricare $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{1+e^x}$.

a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul lui f, axa Ox și dreptele $x=0$, $x=1$.

b) Calculați $\int_{-1}^{1}x^2 f(x)\,dx$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} n\int_{-1}^{1}x^{2n}f(x)\,dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geq 0$, $\forall x\in[1,\infty)$. Cum $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[1,\infty)$.

b) $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, deci graficul lui f nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$. Cum $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, rezultă că graficul lui f nu are asimptotă oblică spre $+\infty$.

c) Din punctul *a)* rezultă că $f(x)>f(1)=0$, $\forall x\in(1,\infty)$, deci $\frac{1}{2}\ln x>\frac{x-1}{x+1}$, $\forall x\in(1,\infty)$. Rezultă că $\frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}>\frac{\frac{x}{y}-1}{\frac{x}{y}+1}=\frac{x-y}{x+y}$, pentru orice $x,y\in(0,\infty)$, $x>y$. Atunci $\frac{1}{2}\ln\frac{k+1}{k}>\frac{1}{2k+1}$, $\forall k\geq 1$, deci

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{|\ln x|}{x}$.

a) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0=1$.
b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.
c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are exact trei soluții.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-e^{-x}$.

a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x=-1$, respectiv $x=0$.
b) Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție convexă.
c) Calculați $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Deoarece $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln x}{x}, & x\in(0,1)\\ \dfrac{\ln x}{x}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$ avem $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x-1}{x^2}, & x\in(0,1)\\ \dfrac{1-\ln x}{x}, & x\in(1,\infty)\end{cases}$, deci f este derivabilă pe $(0,\infty)\setminus\{1\}$. Cum $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0=f(1)$, rezultă că f este continuă în $x_0=1$. Aplicăm corolarul lui Lagrange și obținem $\lim\limits_{x\nearrow1}f'(x)=-1$, deci $f_s'(1)=-1$ și $\lim\limits_{x\searrow1}f'(x)=1$, deci $f_d'(1)=1$. Rezultă că f nu e derivabilă în $x_0=1$.

b) Punctele de extrem ale lui f sunt 1 și e, așa cum se observă din tabloul de variație al lui f de mai jos:

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$- -$	$- - -$	$\mid$	$+ + +$	0	$- - - - -$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

c) Deoarece $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\infty$, $f(1)=0$, $f(e)=\dfrac{1}{e}$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, din continuitatea lui f rezultă că ecuația $f(x)=m$ are trei soluții reale $\Leftrightarrow$ $m\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$.

2. *a)* $A=\int_{-1}^{0}|\,f(x)\,|\,\mathrm{d}x$. Cum $f(x)=e^x-\dfrac{1}{e^x}=\dfrac{e^{2x}-1}{e^x}<0$ pentru $x\in[-1,0]$, rezultă că $|\,f(x)\,|=-f(x)$, $\forall x\in[-1,0]$, deci $A=\int_{-1}^{0}(e^{-x}-e^x)\,\mathrm{d}x=-(e^{-x}+e^x)\Big|_{-1}^{0}=e^{-1}+e-2$.

b) Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F''(x)=f'(x)=e^x+e^{-x}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci F este funcție convexă.

c) Cu teorema lui l'Hospital: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\cdot\int_0^x f(t)dt=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x\cdot e^x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=1$.

Testul 7

Subiectul I

1. Arătați că numărul $(1+\sqrt{2})\left\{2012+\sqrt{2}\right\}$ este număr natural, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului x.

2. Dreptele $x=1$ și $x=2$ sunt axe de simetrie ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Arătați că funcția f este periodică.

3. Rezolvați ecuația $2(\cos x-\sin x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

4. Care este probabilitatea ca alegând unul din numerele A_5^0, A_5^1, A_5^2, A_5^3, A_5^4, A_5^5, el să fie număr impar?

5. În triunghiul ABC notăm cu M mijlocul laturii BC și cu N mijlocul laturii AC. Arătați că $3\,\overline{AB}=2\,\overline{AM}-2\,\overline{BN}$.

6. Fie $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, cu $\sin x=\dfrac{5}{13}$. Calculați ctg$2x$.

Subiectul I

1. Avem $(1+\sqrt{2})\{2012+\sqrt{2}\}=(1+\sqrt{2})\{\sqrt{2}\}=(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-[\sqrt{2}])=(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)=1\in\mathbb{N}$. **2.** Deoarece $f(1-x)=f(1+x)$ și $f(2-x)=f(2+x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$ rezultă că $f(x+2)=f(2-x)=f(1-(x-1))=f(1+x-1)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci f este periodică, de perioadă 2. **3.** Ecuația se scrie $\cos^2 x-\sin^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}$. Cum $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow 2x\in[0,\pi]$, deci $2x=\frac{\pi}{3}$. Rezultă $x=\frac{\pi}{6}$.

4. Pentru $k\geq 2$ avem $A_5^k=\frac{5!}{(5-k)!}=5\cdot 4\cdot\ldots\cdot(6-k)$, care este număr par. Cum $A_5^0=1$ și $A_5^1=5$, probabilitatea cerută este $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. **5.** Avem $2\overline{AM}-2\overline{BN}=\overline{AB}+\overline{AC}-(\overline{BA}+\overline{BC})=2\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{CB}=2\overline{AB}+\overline{AB}=3\overline{AB}$. **6.** Cum $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, avem $\cos x<0$. Din $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ rezultă $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}=-\sqrt{1-\frac{25}{169}}=-\frac{12}{13}$. Atunci $\text{ctg } 2x=\frac{\cos 2x}{\sin 2x}=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=-\frac{119}{120}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare $m\in\mathbb{Q}$ se notează cu $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ m & 1 & -1\\ 0 & m & 1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A(m))$, $m\in\mathbb{Q}$.

b) Arătați că $A(m)$ este inversabilă, oricare ar fi $m\in\mathbb{Q}$.

c) Calculați $(A(0))^n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det A(m)=-3m^2-m+1$.

b) $\det A(m)=0\Leftrightarrow 3m^2+m-1=0\Leftrightarrow m\in\left\{\frac{-1-\sqrt{13}}{6},\frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right\}$. Cum $m\in\mathbb{Q}$, rezultă $\det A(m)\neq 0$, deci $A(m)$ este inversabilă, pentru orice $m\in\mathbb{Q}$.

c) $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=I_3+B$, unde $B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Deoarece $B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ și $B^3=O_3$, rezultă că $B^k=O_3$ pentru orice $k\geq 3$. Ținând cont că $I_3\cdot B=B\cdot I_3$, avem:

$$(A(0))^n=(I_3+B)^n=I_3+C_n^1 B+C_n^2 B^2=I_3+nB+\frac{n(n-1)}{2}\cdot B^2=\begin{pmatrix}1 & 2n & -n^2-2n\\ 0 & 1 & -n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Subiectul I

1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $2z^2 + z + 2 = 0$. Calculați $|z|$.

2. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + 2x + 3$, este monotonă.

3. Rezolvați ecuația $4^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 9^x = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, știind că numărul funcțiilor strict monotone $f: \{1, 2\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ este egal cu 20.

5. Aflați coordonatele simetricului punctului $A(1, 2)$ față de punctul $B(0, 3)$.

6. Triunghiul dreptunghic ABC are $m(\sphericalangle A) = 90°$, $m(\sphericalangle B) = 30°$ și raza cercului circumscris egală cu 6. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

Testul 8

Subiectul I

1. Ecuația $2z^2 + z + 2 = 0$ are soluțiile z și $\bar{z}$. Cum $z \cdot \bar{z} = 1$, rezultă că $|z|^2 = 1$, deci $|z| = 1$.

2. Dacă $a \neq 0$, atunci f este funcție de gradul II care nu este funcție monotonă. Pentru $a = 0$, $f(x) = 2x + 3$, deci f este strict crescătoare.

3. Ecuația se scrie $\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1\right)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ sau $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2$, deci soluțiile sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = \log_{2/3} 2$.

4. Numărul funcțiilor strict monotone este $2C_n^2$. Atunci $2C_n^2 = 20 \Leftrightarrow C_n^2 = 10 \Leftrightarrow n(n-1) = 20$, deci $n = 5$.

5. Dacă A' este simetricul lui A față de B, atunci $x_{A'} = -1$ și $y_{A'} = 4$, deci $A'(-1, 4)$.

6. $BC = 2R = 12$ și $AC = 6$. Cum $AB = \sqrt{144 - 36} = 6\sqrt{3}$, rezultă că perimetrul ΔABC este $18 + 6\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ și funcția $f: S_4 \to S_4$, $f(x) = \sigma \cdot x$.

a) Arătați că σ este permutare impară.

b) Fie $x \in S_4$. Arătați că $f(x)$ este permutare pară dacă și numai dacă x este permutare impară.

c) Arătați că, indiferent de ordinea factorilor, produsul celor 24 de permutări din S_4 este diferit de σ.

2. Fie $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+4x & 0 & 8x \\ 0 & 0 & 0 \\ -x & 0 & 1-2x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \right\}$.

a) Arătați că $A(x) \cdot A(y) \in G$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Arătați că funcția $f: (\mathbb{R}^*, \cdot) \to (G, \cdot)$, $f(x) = A\left(\frac{x-1}{2}\right)$, este izomorfism de grupuri.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Inversiunile lui σ sunt $(1, 2)$, $(1, 3)$ și $(2, 3)$. Cum $m(\sigma) = 3$, rezultă că σ este permutare impară.

b) $\varepsilon(f(x)) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(\sigma x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(x) = 1 \Leftrightarrow \varepsilon(x) = -1$ ceea ce demonstrează echivalența din enunț.

c) Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow \sigma x = \sigma y \Rightarrow x = y$, deci f este funcție injectivă. Fie p numărul permutărilor pare din S_4 și q numărul celor impare. Deoarece f este injectivă și duce orice permutare pară în una impară, rezultă că $p \leq q$. Cum f este injectivă și duce orice permutare impară în una pară, rezultă $q \leq p$. Obținem $p = q = \frac{24}{2} = 12$. Deci oricum înmulțim permutările din S_4 obținem o permutare pară, deci produsul este diferit de σ.

2. *a)* Notând $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $F = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, avem $A(x) = E + xF$. Cum $E^2 = E, F^2 = 2F$ și $EF = FE = F$, avem $A(x) \cdot A(y) = (E + xF)(E + yF) = E + (x + y + 2xy)F = A(2xy + x + y)$, care aparține lui G, deoarece $2xy + x + y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(y + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$, pentru orice $x, y \neq -\frac{1}{2}$.

b) Din punctul *a)* înmulțirea matricelor este lege pe G. Înmulțirea matricelor este asociativă și $A(x) \cdot A(0) = A(0) \cdot A(x) = A(x)$, deci $A(0) \in G$ este element neutru. Fie $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$; atunci $A(x)$ este simetrizabilă dacă și numai dacă există $x' \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ astfel încât $A(x) \cdot A(x') = A(x') \cdot A(x) = A(0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A(2xx' + x + x') = A(0) \Leftrightarrow x'(2x + 1) = -x \Leftrightarrow x' = -\frac{x}{2x+1} \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Deci, $A(x)$ este element simetrizabil în G și $(A(x))' = A\left(-\frac{x}{2x+1}\right)$.

c) Avem $f(x) \cdot f(y) = A\left(\frac{x-1}{2}\right)A\left(\frac{y-1}{2}\right) = A\left(2\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = A\left(\frac{xy-1}{2}\right) = f(xy)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}^*$, deci f este morfism.

Injectivitatea: dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $f(x) = f(y) \Rightarrow A\left(\frac{x-1}{2}\right) = A\left(\frac{y-1}{2}\right) \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x = y$. Surjectivitatea: Fie $A \in G$. Atunci există $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ astfel încât $A = A(x)$. Cum $2x + 1 \neq 0$ și $f(2x + 1) = A\left(\frac{2x+1-1}{2}\right) = A(x) = A$, deci f este surjectivă. În consecință, f este izomorfism.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x}{x+1}$.

a) Arătați că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim_{x\to\infty} x\,f(x)$.

c) Arătați că $-\frac{1}{x}<f(x)<-\frac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $0\leq I_n\leq\frac{\sqrt{3}}{4n+2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Cum $x>0$, avem $f(x)=\ln x-\ln(x+1)$, deci $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}>0$, $\forall x\in(0,\infty)$.
Rezultă că f este strict crescătoare.

b) $\lim_{x\to\infty} x\,f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x-\ln(x+1)}{\frac{1}{x}}$. Aplicăm teorema lui l'Hospital în cazul $\frac{0}{0}$.

Cum $\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}$, rezultă că limita cerută este -1.

c) Fie $x>0$. Din teorema lui Lagrange aplicată funcției $g:[x,x+1]\to\mathbb{R}$, $g(t)=\ln t$ rezultă că $\exists\, c\in(x,x+1)$ astfel încât $\ln(x+1)-\ln x=g'(c)=\frac{1}{c}\in\left(\frac{1}{x+1},\frac{1}{x}\right)$. Atunci $\ln\frac{x}{x+1}\in\left(-\frac{1}{x},-\frac{1}{x+1}\right)$,
deci $-\frac{1}{x}<f(x)<-\frac{1}{x+1}$.

2. *a)* $I_1=\int_0^1 x^2\sin x\,dx=\int_0^1 x^2(-\cos x)'\,dx=-x^2\cos x\Big|_0^1+2\int_0^1 x\cos x\,dx=-\cos1+2\int_0^1 x(\sin x)'\,dx=$
$=-\cos1+2x\sin x\Big|_0^1-2\int_0^1\sin x\,dx=-\cos1+2\sin1+2\cos x\Big|_0^1=2\sin1+\cos1-2$.

b) Avem $0\leq\sin x\leq\sin1<\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\forall x\in[0,1]$, deci $0\leq\int_0^1 x^{2n}\sin x\,dx\leq\int_0^1\frac{\sqrt{3}}{2}x^{2n}\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big|_0^1=$
$=\frac{\sqrt{3}}{4n+2}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Folosind criteriul majorării, din punctul anterior rezultă că $\lim_{n\to\infty} I_n=0$.

Subiectul I

1. Determinați numărul natural n astfel încât $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = 625$.

2. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^5 - 2x^3 + 3$, **nu** este injectivă.

3. Rezolvați ecuația $\cos^2 x + \cos^2 2x = 1$, $x \in [0, \pi]$.

4. Câte funcții $f : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ au $f(1) \neq f(2)$?

5. Fie $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overline{u} = \overline{i} + 5\,\overline{j}$ și $\overline{v} = 2\,\overline{i} + m\,\overline{j}$ sunt coliniari. Arătați că $|\,\overline{v}\,| = 2\sqrt{26}$.

6. Calculați aria unui triunghi echilateral înscris într-un cerc de rază 1.

Testul 9

Subiectul I

1. Avem $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1) = \sum_{k=0}^{n}(2k + 1) = 2\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n + 1) + n + 1 = (n + 1)^2$. Relația din enunț devine $(n + 1)^2 = 625 \Leftrightarrow n + 1 = 25 \Leftrightarrow n = 24$.
2. Avem $f(x) = x^3(x^2 - 2) + 3$. Cum $f(0) = f(\sqrt{2}) = 3$, rezultă că f nu este injectivă.
3. Ecuația este echivalentă cu $\frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$ $\cos 3x \cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = 0$ sau $\cos x = 0$. Cum $\cos 3x = 0$, $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow 3x \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right\} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$, iar $\cos x = 0, x \in [0, \pi] \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$, rezultă că soluțiile sunt $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.
4. Numărul total de funcții este 5^3, iar numărul de funcții pentru care $f(1) = f(2)$ este 5^2. Rezultă că numărul cerut este $5^3 - 5^2 = 100$. **5.** Cum $\overline{u}$ și $\overline{v}$ sunt coliniari, rezultă că $2 = \frac{m}{5}$, deci $m = 10$. Atunci $|\,v\,| = \sqrt{4 + m^2} = \; = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. **6.** Fie l latura triunghiului echilateral. Din teorema sinusului rezultă că $l = 2R\sin\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$. Deci $S = \frac{l^3}{4R} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid 2A^2 + A + I_2 = O_2\}$.

a) Arătați că matricea $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

b) Demonstrați că orice matrice din M este inversabilă.

c) Arătați că mulțimea M are o infinitate de elemente.

2. Fie $(S_4, \cdot)$ grupul permutărilor de grad 4 și $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Determinați ordinul permutării σ în grupul S_4.

b) Arătați că mulțimea $H = \{\tau \in S_4 \mid \tau \text{ permutare pară}\}$ este subgrup al grupului S_4.

c) Arătați că dacă $f : (S_4, \cdot) \to (S_4, \cdot)$ este morfism de grupuri, atunci $f(\sigma) \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Subiectul al II-lea

1. a) Fie $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Atunci $2X^2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, de unde $2X^2+X+I_2=O_2$, deci $X\in M$.

b) Avem $A\in M\Leftrightarrow 2A^2+A=-I_2\Leftrightarrow A(2A+I_2)=-I_2$. Rezultă $\det(A)\cdot\det(2A+I_2)=1$, deci $\det(A)\neq 0$. În consecință, A este inversabilă.

c) $A\in M\Leftrightarrow A^2+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}I_2=O_2$. Din teorema lui Hamilton-Cayley este suficient să găsim o infinitate de matrice $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $a+d=-\frac{1}{2}$ și $ad-bc=\frac{1}{2}$. Alegem, de exemplu $a=-\frac{1}{2}$, $d=0$, $b\in\mathbb{R}^*$ și $c=-\frac{1}{2b}$. Matricele $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & b\\ -\frac{1}{2b} & 0\end{pmatrix}$, cu $b\in\mathbb{R}^*$, aparțin lui M.

2. a) Avem $\sigma^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=e$, deci ordinul lui σ este 2.

b) Fie $\tau_1, \tau_2\in H$. Cum $\varepsilon(\tau_1\tau_2)=\varepsilon(\tau_1)\cdot\varepsilon(\tau_2)=1$, rezultă că $\tau_1\tau_2$ este pară, deci $\tau_1\tau_2\in H$. Fie $\tau\in H$. Cum $\varepsilon(e)=\varepsilon(\tau\cdot\tau^{-1})=\varepsilon(\tau)\cdot\varepsilon(\tau^{-1})=\varepsilon(\tau^{-1})$ rezultă că $\varepsilon(\tau^{-1})=\varepsilon(e)=1$, deci τ^{-1} este pară, de unde $\tau^{-1}\in H$. Deci H este subgrup al grupului S_4.

c) Fie $f: S_4\to S_4$ un morfism de grupuri. Dacă $f(\sigma)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$, atunci $e=f(e)=f(\sigma^2)=$
$=f^2(\sigma)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 4 & 2 & 3\end{pmatrix}$, fals. Deci $f(\sigma)\neq\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

a) Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ a graficului funcției f.
b) Arătați că f este strict descrescătoare.
c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)}{2}+\frac{f(2)}{3}+\ldots+\frac{f(n)}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$.

2. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{-x^2}$, și șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n=\int_1^n f(x)dx$.

a) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.
b) Arătați că șirul $(I_n)_n$ este monoton și mărginit.
c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x} \cdot x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1 \cdot \ln e = 1$, deci dreapta $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$.

b) $f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}$, $x \in (0, \infty)$. Cum $f''(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, rezultă că f' e strict crescătoare. Dar $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$, deci $f'(x) < 0$, $\forall x \in (0, \infty)$, adică f este strict descrescătoare.

c) Avem $\frac{f(k)}{k+1} = \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k$, deci $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1)$. Atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(\ln(n+1))^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln(\ln(n+1))}$. Cu teorema lui l'Hospital, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(\ln(x+1))}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(x+1)\cdot\ln(x+1)} = 0$, de unde rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln(n+1))}{n} = 0$. Ca urmare, limita cerută este 1.

2. *a)* $\int_0^1 x\, f(x)\,dx = \int_0^1 x\, 2^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{-1} 2^t\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} 2^t\,dt = \frac{1}{2}\frac{2^t}{\ln 2}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{4\ln 2}$.

b) Avem $I_{n+1} - I_n = \int_1^{n+1} f(x)\,dx - \int_1^n f(x)\,dx = \int_n^{n+1} f(x)\,dx$. Cum $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, rezultă că $I_{n+1} - I_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Deoarece $0 \leq I_n = \int_1^n 2^{-x^2}\,dx \leq \int_1^n 2^{-x}\,dx = -\frac{2^{-x}}{\ln 2}\Big|_1^n = \frac{1}{\ln 2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{2\ln 2}$, rezultă că șirul $(I_n)_n$ este mărginit.

c) Din teorema de medie, există $c_n \in [n, n+1]$ astfel încât $\int_n^{n+1} f(x)\,dx = f(c_n)(n+1-n) = f(c_n)$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} f(c_n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-c_n^2} = \lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x^2} = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,dx = 0$.

Subiectul I

1. Arătați că $\log_2 3 > 1{,}5$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$. Determinați numărul punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_x(x^2 + 2) = \log_x 3x$.

4. Într-o clasă sunt 20 de fete și 10 băieți. Câte echipe mixte din 3 fete și 2 băieți se pot forma cu elevii din clasă?

5. Fie punctul $A(1, 2)$ și dreapta d de ecuație $x - y - 3 = 0$. Determinați coordonatele piciorului perpendicularei din A pe d.

6. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC. Arătați că $\sin B > \cos C$.

Subiectul I

1. Cum $3^2 > 2^3$ rezultă că $3 > 2^{1,5}$. Deci $\log_2 3 > 1,5$. **2.** $f(x)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^2-3=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-3)$ $=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$, rezultă că graficul lui f taie axa Ox în două puncte. **3.** Pentru $x>0$, $x\neq 1$ ecuația este echivalentă cu $x^2-3x+2=0$, ecuație care are soluțiile $x_1=1$ și $x_2=2$. Cum $x\neq 1$, ecuația are soluția unică $x=2$.

4. Numărul este $C_{20}^3 \cdot C_{10}^2$. **5.** Fie $M(\alpha,\beta)$ piciorul perpendicularei din A pe d. Cum $m_d \cdot m_{AM} = -1$, rezultă că $\dfrac{\beta-2}{\alpha-1}=-1$, deci $\alpha+\beta=3$. Deoarece $M(\alpha,\beta)\in d$, avem $\alpha-\beta=3$, deci $\alpha=3$ și $\beta=0$.

6. Avem $B+C=\pi-A>\dfrac{\pi}{2}$, deci $\dfrac{\pi}{2}>B>\dfrac{\pi}{2}-C$. Cum funcția sin este strict crescătoare pe $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ rezultă că $\sin B > \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)=\cos C$.

Subiectul al II-lea

1. Fie $M=\{A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid A^2=A^t\}$, unde A^t este transpusa matricei A.

a) Arătați că matricea $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ aparține lui M.

b) Dacă $A\in M$ și A este inversabilă, calculați $\det(A)$.

c) Dacă $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M$ și $\det(A)=0$, arătați că $a^2+b^2-a=0$.

2. Fie mulțimea $G=\{f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f_a(x)=ax+3(1-a),\ a\in\mathbb{R}^*\}$.

a) Arătați că $f_a\circ f_b=f_{ab}$, $\forall a,b\in\mathbb{R}^*$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

c) Determinați $a\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $(f_a\circ f_a\circ f_a)(x)=8x-21$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Subiectul al III-lea

Subiectul al II-lea

1. a) Fie $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. Cum $A^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=A=A^t$, rezultă $A\in M$.

b) $A\in M \Rightarrow \det(A^2)=\det(A^t)\Rightarrow \det^2(A)=\det(A)$. Cum $\det(A)\neq 0$, rezultă că $\det(A)=1$.

c) Fie $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M$ cu $\det(A)=0$. Cum $A^2=(a+d)A=A^t$, rezultă că $(a+d)a=a$ și $(a+d)d=d$, deci $(a+d)^2=a+d$. Dacă $a+d=0$, atunci $A^t=0$, deci $a=b=0$ și $a^2+b^2-a=0$. Dacă $a+d=1$, atunci $A=A^t$. Rezultă $b=c$ și $d=1-a$. Cum $ad-bc=0$ obținem $a(1-a)-b^2=0$, deci $a^2+b^2-a=0$.

2. a) $(f_a\circ f_b)(x)=af_b(x)+3(1-a)=a\big(bx+3(1-b)\big)+3(1-a)=abx+3(1-ab)=f_{ab}(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Cum $f_a\circ f_b$ și f_{ab} au același domeniu de definiție și același domeniu de valori, rezultă $f_a\circ f_b=f_{ab}$.

b) Cum $a\neq 0$, $b\neq 0 \Rightarrow ab\neq 0$, din punctul *a)*, deci compunerea funcțiilor este lege bine definită pe G. Compunerea funcțiilor este asociativă, are element neutru, deoarece $f_a\circ f_1=f_1\circ f_a=f_a$, $\forall a\in\mathbb{R}^*$, și, pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$, $f_a\circ f_{\frac{1}{a}}=f_{\frac{1}{a}}\circ f_a=f_1$. Ca urmare, $(G,\circ)$ este grup.

c) $f_a\circ f_a\circ f_a=f_{a^3}$. Atunci $f_{a^3}(x)=8x-21 \Leftrightarrow a^3x+3(1-a^3)=8x-21$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $a^3=8$ și $3(1-a^3)=-21$, condiții îndeplinite pentru $a=2$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1,2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$.

a) Determinați ecuațiile asimptotelor verticale ale graficului funcției f.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{1}{x}}$.

c) Rezolvați ecuația $f''(x)=0,\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^x}{t^2+2}\,dt$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Arătați că $f(x+2)+2f(x)=\dfrac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x>0$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}x\,f(x)$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Cum f este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, studiem limitele laterale ale funcției f în punctele 1 și 2. Avem $\lim\limits_{x\nearrow 1}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 1}f(x)=-\infty$ și, respectiv, $\lim\limits_{x\nearrow 2}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\searrow 2}f(x)=+\infty$, deci dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ sunt asimptotele verticale ale graficului funcției f.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{y\downarrow 0}y^y=\lim\limits_{y\downarrow 0}e^{y\ln y}=e^{\lim\limits_{y\to 0}y\ln y}=1$, deoarece

$\lim\limits_{y\downarrow 0}y\ln y=\lim\limits_{y\downarrow 0}\dfrac{\ln y}{y^{-1}}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{y\downarrow 0}\dfrac{\frac{1}{y}}{-y^{-2}}=\lim\limits_{y\downarrow 0}(-y)=0$.

c) $f(x)=\dfrac{2x}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{4}{x-2}-\dfrac{2}{x-1}$. Rezultă că $f''(x)=4\left(\dfrac{2}{(x-2)^3}-\dfrac{1}{(x-1)^3}\right)$. Avem $f''(x)=0$ $\Leftrightarrow\dfrac{2}{(x-2)^3}=\dfrac{1}{(x-1)^3}\Leftrightarrow\left(\dfrac{x-2}{x-1}\right)^3=2\Leftrightarrow\dfrac{x-2}{x-1}=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt[3]{2}-2}{\sqrt[3]{2}-1}$.

2. *a)* $f(1)=\displaystyle\int_0^1\frac{t}{t^2+2}\,dt=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(t^2+2)'}{t^2+2}\,dt=\frac{1}{2}\ln(t^2+2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

b) $f(x+2)+2f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^{x+2}+2t^x}{t^2+2}\,dt=\int_0^1 t^x\,dt=\frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_0^1=\frac{1}{x+1}$.

c) Cum $f(x+1)-f(x)=\displaystyle\int_0^1\frac{t^x(t-1)}{t^2+2}\,dt\le 0$, rezultă $f(x+1)\le f(x),\ \forall x>0$. Folosind acest lucru, avem: $3f(x+2)\le f(x+2)+2f(x)\le 3f(x)$, de unde, conform *b)*, rezultă $3f(x+2)\le\dfrac{1}{x+1}\le 3f(x)$, $\forall x>0$. Obținem $\dfrac{1}{3(x+1)}\le f(x)\le\dfrac{1}{3(x-1)}$, de unde $\dfrac{x}{3(x+1)}\le xf(x)\le\dfrac{x}{3(x-1)}$, pentru orice $x>1$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3(x-1)}=\dfrac{1}{3}$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}x\,f(x)=\dfrac{1}{3}$.

Subiectul I

1. Fie $z \in \mathbb{C}$, cu $|z| = |z - 1|$. Calculați partea reală a lui z.

2. Fie funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$ și $g(x) = -x^2 + 4x + a$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care imaginile celor două funcții au exact un element în comun.

3. Rezolvați ecuația $2^{3x} + 1 = 3^{2x}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Câte submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ conțin elementul 1?

5. Fie punctele $A(-1, 3)$ și $B(0, 4)$. Determinați coordonatele simetricului lui B față de A.

6. Calculați aria triunghiului echilateral de latură 3.

Subiectul I

1. Fie $z = a + ib$. Atunci $a^2 + b^2 = (a-1)^2 + b^2 \Leftrightarrow 2a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$. 2. $\operatorname{Im} f = \left[-\frac{\Delta}{4a}, \infty\right) = [2, \infty)$, $\operatorname{Im} g = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right] = (-\infty, a+4]$. Atunci $|\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g| = 1 \Leftrightarrow a + 4 = 2 \Leftrightarrow a = -2$.

3. Ecuația se scrie $8^x + 1 = 9^x \Rightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x = 1$. Cum funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(\frac{8}{9}\right)^x + \left(\frac{1}{9}\right)^x$ este strict descrescătoare, deci injectivă și $f(1) = 1$, rezultă că ecuația are soluția unică $x = 1$.

4. Există A_4^2 submulțimi ordonate cu trei elemente care conțin elementul 1 pe prima poziție. Analog pentru submulțimile care conțin elementul 1 pe pozițiile 2 și 3. Numărul cerut este $3A_4^2 = 36$.

5. Fie B' simetricul lui B față de A. Atunci: $\frac{x_{B'} + x_B}{2} = x_A$ și $\frac{y_{B'} + y_B}{2} = y_A$. Rezultă că $x_{B'} = 2x_A - x_B = -2$ și $y_{B'} = 2y_A - y_B = 2$. 6. Aria este egală cu $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculați rangul matricei $A^2 - I_3$.
b) Determinați numerele reale a și b astfel încât $A^2 = aA + bI_3$.
c) Determinați inversa matricei A.

2. Pe mulțimea $G = (1, \infty)$ definim legea $x * y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y - x^2 - y^2 + 5}$.

a) Arătați că $x * y = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1}$, oricare ar fi $x, y \in (1, \infty)$.

b) Demonstrați că G este grup în raport cu legea „*".

c) Demonstrați că funcția $f : (0, \infty) \to (1, \infty)$, $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, este izomorfism de la grupul $((0, \infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Avem $A^2 - I_3 = 16\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $A^2 - I_3 \neq O_3$ şi toţi minorii de ordinul doi sunt nuli, rezultă că rangul cerut este 1.

b) $A^2 = aA + bI_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 17 & 16 & 16 \\ 16 & 17 & 16 \\ 16 & 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+b & 2a & 2a \\ 2a & 3a+b & 2a \\ 2a & 2a & 3a+b \end{pmatrix}$, de unde $2a = 16$ şi $3a + b = 17$, ceea ce conduce la $a = 8$ şi $b = -7$.

c) $A^2 = 8A - 7I_3 \Leftrightarrow A^2 - 8A = -7I_3 \Leftrightarrow A(A - 8I_3) = -7I_3 \Leftrightarrow A^{-1} = -\frac{1}{7}A + \frac{8}{7}I_3$.

2. *a)* $\sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)+1} = \frac{1}{2}\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)+4} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2y^2 - x^2 - y^2 + 5} = x * y$, $\forall\, x, y \in (1, \infty)$;

b) Din ipoteză „$*$“ este lege de compoziţie pe $(1, \infty)$. Verificăm axiomele grupului:

• Asociativitatea: pentru orice $x, y, z \in (1, \infty)$, avem: $(x * y) * z = \left(\sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)+1}\right) * z =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{\frac{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{16}+1}$, şi $x * (y * z) =$

$x * \sqrt{\frac{1}{4}(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)\cdot\frac{1}{4}(y^2-1)(z^2-1)+1} = \sqrt{\frac{(x^2-1)(y^2-1)(z^2-1)}{15}+1}$, deci legea „$*$“ este asociativă.

• Element neutru: $e \in (1, \infty)$ este element neutru dacă şi numai dacă $x * e = e * x = x$, $\forall\, x \in (1, \infty) \Leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(e^2-1)+1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-1)(e^2-1) = x^2 - 1$, $\forall x \in (1, \infty) \Leftrightarrow e^2 = 5 \Leftrightarrow e = \sqrt{5} \in (1, \infty)$.

• Simetrizabilitatea elementelor. Fie $x \in (1, \infty)$; x este simetrizabil dacă există $x' \in (1, \infty)$ astfel încât

Subiectul al III-lea

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2} - 1 - x^2$.

a) Scrieţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

b) Arătaţi că $2f(x) \geq x^4$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Studiaţi derivabilitatea în punctul $x = 0$ a funcţiei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[4]{f(x)}$.

2. Fie şirul $I_n = \int_0^1 (x^2 + 2x + 2)^n \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Calculaţi I_1.

b) Arătaţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton crescător.

c) Arătaţi că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$ şi calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)I_n - 2I_{n-1}}{5^n}$.

$x * x' = x' * x = e \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}(x^2-1)(x'^2-1)+1} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{1}{4}(x^2-1)(x'^2-1) = 4 \Leftrightarrow x'^2 = 1+\frac{16}{x^2-1}$, de unde $x' = \sqrt{1+\frac{16}{x^2-1}} > 1$, deci toate elementele din G sunt simetrizabile. Rezultă că $(G, *)$ este grup.

c) $f(x) * f(y) = \sqrt{\frac{1}{2}(f^2(x)-1)(f^2(y)-1)+1} = \sqrt{\frac{1}{2}\cdot 2x \cdot 2y - 1} = \sqrt{2xy-1} = f(x\cdot y),\ \forall x, y \in (0,\infty)$, deci f este morfism de grupuri. Deoarece f este strict crescătoare, rezultă că f este injectivă. Cum f este continuă, crescătoare, $\lim\limits_{x\searrow 0} f(x) = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, rezultă că $\operatorname{Im} f = (1, \infty)$, deci f este surjectivă.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Punctul de pe grafic de abscisă $x_0 = 1$ are coordonatele $A(1, f(1))$, deci $(1, e-2)$. Cum $f'(x) = 2xe^{x^2} - 2x$, rezultă că panta tangentei este $f'(1) = 2e - 2$. Ecuația tangentei este $y - e + 2 = 2(e-1)(x-1)$.

b) Inegalitatea $2f(x) \geq x^4$ este echivalentă cu $e^{x^2} - 1 - x^2 \geq \frac{x^4}{2} \Leftrightarrow e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} \geq 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. Fie $g: [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2}$. Cum $g'(t) = e^t - 1 - t$ și $g''(t) = e^t - 1 \geq 0$, $\forall t \in [0, \infty)$ rezultă că g' este strict crescătoare, deci $g'(t) \geq g'(0) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$. Rezultă că g este crescătoare, deci $g(t) \geq g(0) = 0$, $\forall t \in [0, \infty)$.

c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt[4]{f(x)}}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sqrt[4]{\frac{f(x)}{x^4}}$. Cum, din teorema lui l'Hospital cazul $\frac{0}{0}$ avem $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2}{x^4} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1 - y}{y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{2y} = \frac{1}{2}$, rezultă că $g'_d(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, iar $g'_s(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \left(-\sqrt[4]{\frac{f(x)}{x^4}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$, deci g nu este derivabilă în $x_0 = 0$.

2. *a)* $I_1 = \int_0^1 (x^2+2x+2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x^2+2x+2)^n (x+1)^2\,dx \geq 0$, de unde concluzia.

c) Avem $I_n = \int_0^1 (x^2+2x+2)^n\,dx \geq \int_0^1 2^n\,dx = 2^n$, deci $\lim\limits_{x\to\infty} I_n = \infty$.

$$I_n = \int_0^1 (x+1)'(x^2+2x+2)^n\,dx = (x+1)(x^2+2x+2)^n\Big|_0^1 - 2n\int_0^1 (x+1)^2(x^2+2x+2)^{n-1}\,dx = 2\cdot 5^n - 2^n -$$

$$-2n\int_0^1 (x^2+2x+2-1)(x^2+2x+2)^{n-1}\,dx = 2\cdot 5^n - 2^n - 2n I_n + 2nI_{n-1}.$$

Rezultă că $(2n+1)I_n - 2I_{n-1} = 2\cdot 5^n - 2^n$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{5^n} = 0$, rezultă că limita cerută este 2.

Subiectul I

1. Arătați că numărul $\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+3}$ este număr natural.

2. Fie $f:\{-2,-1,0,1,2\}\to\mathbb{R}$ o funcție impară.
Calculați $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.

3. Rezolvați ecuația $\sqrt[5]{1-x}=x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 16 submulțimi cu un număr impar de elemente.

5. Fie punctele $A(-1, 0)$, $B(2, -3)$ și $C(3, -2)$. Scrieți ecuația înălțimii din A a triunghiului ABC.

6. Arătați că $\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos^2 70^\circ=\frac{3}{2}$.

Subiectul I

1. Numărul este $\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{7}}{2}=1\in\mathbb{N}$. **2.** Cum $f(-0)=-f(0)$, rezultă că $f(0)=0$, deci produsul este 0. **3.** Notăm $\sqrt[5]{1-x}=t$. Ecuația devine $t=-t^5 \Leftrightarrow t(t^4+1)=0 \Leftrightarrow t=0$. Deci $x=1$ este unica soluție a ecuației. **4.** Dacă mulțimea are n elemente, atunci $2^{n-1}=16$, deci $n=5$. **5.** Fie h înălțimea din A. Cum panta dreptei BC este 1 rezultă că panta lui h este -1. Ecuația lui h este $y=x+1$. **6.** Avem $\cos^2 10^\circ+\cos^2 50^\circ+\cos^2 70^\circ=\frac{1+\cos 20^\circ}{2}+\frac{1+\cos 100^\circ}{2}+\frac{1+\cos 140^\circ}{2}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 20^\circ+\cos 100^\circ+\cos 140^\circ)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(2\cos 60^\circ\cos 40^\circ+\cos 140^\circ)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 40^\circ+\cos 140^\circ)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 40^\circ-\cos 40^\circ)=\frac{3}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M=\{X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\mid X^4=O_2\}$ și $A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

a) Verificați dacă $A\in M$.

b) Arătați că dacă $X\in M$, atunci $X^2=O_2$.

c) Arătați că ecuația $Y^2=A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe intervalul $(2,\infty)$ se consideră legea de compoziție asociativă $x*y=(x-2)^{\ln(y-2)}+2$.

a) Arătați că legea de compoziție „*“ are element neutru.

b) Determinați elementele nesimetrizabile din intervalul $(2,\infty)$, în raport cu legea „*“.

c) Rezolvați ecuația $x*x*x*x=5,\ x\in(2,\infty)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = O_2$. Rezultă $A^4 = O_2$, deci $A \in M$.

b) Fie $X \in M$. Atunci $O = \det(O_2) = \det(X^4) = \det^4(X)$, deci $\det(X) = 0$. Din teorema lui Hamilton Cayley, rezultă că $X^2 = \mathrm{tr}(X) \cdot X$, deci $X^4 = \mathrm{tr}(X) \cdot X^3 = \mathrm{tr}^2(X) \cdot X^2 = \mathrm{tr}^3(X) \cdot X$. Atunci $\mathrm{tr}^3(X) \cdot X = O_2$, deci $\mathrm{tr}(\mathrm{tr}^3(X) \cdot X) = \mathrm{tr}(O_2)$, de unde $\mathrm{tr}^4(X) = 0$. Rezultă că $\mathrm{tr}(X) = 0$, deci $X^2 = O_2$.

c) Fie $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o soluție a ecuației $Y^2 = A$; atunci $Y^4 = A^2 = O_2$. Rezultă că $Y \in M \Rightarrow Y^2 = O_2 \Rightarrow A = O_2$, fals. Deci ecuația nu are soluții.

2. *a)* $u \in (2, \infty)$ este element neutru al legii „$*$" $\Leftrightarrow x * u = u * x = x, \forall x \in (2, \infty) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x-2)^{\ln(u-2)} + 2 = x$, $\forall x \in (2, \infty) \Leftrightarrow (x-2)^{\ln(u-2)} = x-2$, $\forall x \in (2, \infty) \Leftrightarrow \ln(u-2) = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow u - 2 = e \Leftrightarrow u = e + 2 \in (2, \infty)$. Cum $(e+2) * x = e^{\ln(x-2)} + 2 = x - 2 + 2 = x$, $\forall x \in (2, \infty)$, rezultă că $u = e + 2$ este element neutru.

b) $x \in (2, \infty)$ este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists x' \in (2, \infty)$ astfel încât $x * x' = x' * x = u \Leftrightarrow (x'-2)^{\ln(x-2)} = e + 2$.

Dacă $x \neq 3$, atunci $\ln(x-2) \neq 0$ și $x' = 2 + (e+2)^{\frac{1}{\ln(x-2)}} \in (2, \infty)$, deci toate elementele diferite de 3 sunt simetrizabile. Dacă $x = 3$, atunci $(x'-2)^{\ln(3-2)} = 1 \neq e + 2$, deci $x = 3$ nu este simetrizabil.

c) Avem $x * x * x = ((x-2)^{\ln(x-2)} + 2) * x = (x-2)^{\ln^2(x-2)} + 2$ și $x * x * x * x = (x-2)^{\ln^3(x-2)} + 2$.
Ecuația se scrie $(x-2)^{\ln^3(x-2)} = 3 \Leftrightarrow \ln^4(x-2) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x-2) = \pm\sqrt[4]{\ln 3} \Leftrightarrow x - 2 = e^{\pm\sqrt[4]{\ln 3}}$. Obținem $x_1 = 2 + e^{\sqrt[4]{\ln 3}} > 2$ și $x_2 = 2 + e^{-\sqrt[4]{\ln 3}} > 2$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x - 1$.

a) Arătați că funcția f este bijectivă.

b) Determinați asimptotele graficului funcției $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Arătați că funcția f este convexă.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

a) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = 0$ și $x = \pi$.

b) Calculați $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

c) Calculați $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x (f(t) - 1)\,dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x) = e^x + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ deci f este strict crescătoare, și, în consecință, este injectivă. Cum f este continuă, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, rezultă că $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = 0 \in \mathbb{R}$ și $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = 0 \in \mathbb{R}$, deci dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $\pm\infty$. Apoi, $\lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = \lim\limits_{x \searrow 0}\left(e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} - 1\right) = \infty$ și $\lim\limits_{x \nearrow 0} g(x) = -\infty$, deci dreapta $x=0$ este asimptotă verticală. Cum g este continuă pe $\mathbb{R}^*$, nu există alte asimptote verticale.

c) $f''(x)=e^x>0$, de unde concluzia.

2. *a)* Aria $=\int_0^{\pi}|f(x)|\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx=\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\int_1^0\frac{dt}{1+t^2}=2\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arctg} t\,\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$.

b) Cu schimbarea de variabilă $t=\sin x, dt=\cos x dx$ avem: $I=\int_0^{\pi/2}f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}\,dt=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$.

c) Din teorema lui l'Hospital, cazul $\frac{0}{0}$ avem $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x(f(t)-1)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{3x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1-\sin^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-2\sin x\cos x}{6x}=-\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot(1+2\cos x)=-\frac{1}{2}.$$

Subiectul I

1. Câte numere raționale conține mulțimea $\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},...,\sqrt{2012}\}$?

2. Fie funcția bijectivă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x+2$. Calculați $(f^{-1}\circ f^{-1})(2)$.

3. Rezolvați ecuația $\sin x+\sqrt{3}\cos x=0$, $x\in[0,2\pi)$.

4. Câte permutări ale mulțimii $\{1,2,3,4,5\}$ au pe prima poziție un număr par?

5. Demonstrați egalitatea: $C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3=C_7^4$.

6. În triunghiul ABC are loc relația $\sin A=2\sin B\cos C$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul I

rezultă că numărul cerut este egal cu numărul

1. Cum pentru $k\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt{k}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k$ este pătrat perfect, rezultă că numărul cerut este egal cu numărul pătratelor perfecte cuprinse între 1 și 2012. Cum $44^2=1976<2012<2025=45^2$, rezultă că există 44 pătrate perfecte, deci mulțimea are 44 de elemente numere raționale. **2.** $f(0)=2$ implică $f^{-1}(2)=0$, iar $f(-1)=0$ implică $f^{-1}(0)=-1$. Ca urmare, $(f^{-1}\circ f^{-1})(2)=f^{-1}(f^{-1}(2))=f^{-1}(0)=-1$.

3. Avem $\sin x=-\sqrt{3}\cos x\Leftrightarrow\frac{\sin x}{\cos x}=-\sqrt{3}\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}$, $x\in[0,2\pi)\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$.

4. Există 4! permutări care au pe prima poziție numărul 2 și 4! permutări care au pe prima poziție numărul 4. Există deci $2\cdot 4!=48$ permutări cu proprietatea din enunț. **5.** Prin calcul direct, sau folosind relația $C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}$, avem: $C_3^3+C_4^3+C_5^3+C_6^3=C_4^4+C_5^4-C_4^4+C_6^4-C_5^4+C_7^4-C_6^4=C_7^4$.

6. Avem $2\sin B\cos C=\sin A=\sin(\pi-(B+C))=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$. Obținem $\sin B\cos C-\cos B\sin C=0$, deci $\sin(B-C)=0$. Cum $B-C\in(-\pi,\pi)$, rezultă $B-C=0$, deci $B=C$ și, în consecință, triunghiul ABC este isoscel.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$ și $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că orice matrice din mulțimea M, diferită de O_2, este inversabilă.

b) Arătați că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ și $AX = XA$, atunci $X \in M$.

c) Rezolvați ecuația $X^2 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

2. Fie mulțimea $G = \{f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f_k(x) = 3^k x + 2 \cdot 3^k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Să se arate că $f_k \circ f_p = f_{k+p}$, oricare ar fi $k, p \in \mathbb{Z}$.

b) Să se arate că G este grup în raport cu operația de compunere a funcțiilor.

c) Să se arate că mulțimea $H = \{f_{3k} \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este subgrup al grupului $(G, \circ)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \in M$, $X \neq O_2$. Atunci $\det(X) = a^2 - 2b^2$. Dacă $\det(X) = 0$, atunci $2b^2 = a^2$. Pentru $b = 0$ obținem $a = 0$, deci $X = O_2$ fals, iar pentru $b \neq 0$ rezultă că $\frac{a^2}{b^2} = 2$, deci $\left|\frac{a}{b}\right| = \sqrt{2}$, fals pentru că $\sqrt{2}$ este număr irațional. Obținem $\det(X) \neq 0$, deci X este inversabilă.

b) Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Atunci $AX = XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ 4a+3c & 4b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a+4b & 2a+3b \\ 3c+4d & 2c+3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3a + 2c = 3a + 4b$ și $3b + 2d = 2a + 3b \Leftrightarrow c = 2b$ și $a = d \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ cu $a, b \in \mathbb{Q}$, deci $X \in M$. *c)* Fie X o soluție. Cum $AX = X^2 \cdot X = X^3 = X \cdot X^2 = XA \Rightarrow$

$X \in M \Rightarrow X = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$. Atunci $X^2 = \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & 2ab \\ 4ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix}$. Cum $X^2 = A \Rightarrow a^2+2b^2 = 3$ și $ab = 1$ $\Rightarrow a^2 - 3ab + 2b^2 = 0 \Rightarrow (a-b)(a-2b) = 0 \Rightarrow a = b$ sau $a = 2b$. Dacă $a = b$, atunci $a^2 = 1$, deci $a = b = 1$ sau $a = b = -1$. Dacă $a = 2b$, atunci $2b^2 = 1$, deci $b = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Obținem matricele $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $X_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Cum $X_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = A$ și $X_2^2 = (-X_1)^2 = X_1^2 = A$ rezultă că soluțiile ecuației sunt X_1 și X_2.

2. ***a)*** Avem $(f_k \circ f_p)(x) = (f_k(f_p(x)) = 3^k \cdot f_p(x) + 2 \cdot 3^k - 2 = 3^k(3^p x + 2 \cdot 3^p - 2) + 2 \cdot 3^k - 2 =$ $= 3^{k+p}x + 2 \cdot 3^{k+p} - 2 = f_{k+p}(x)$. Cum $f_k \circ f_p$ și f_{k+p} au același codomeniu și același domeniu de definiție, rezultă că $f_k \circ f_p = f_{k+p}$.

b) Cum $k + p \in \mathbb{Z}$, $\forall k, p \in \mathbb{Z}$, din punctul a) rezultă că operația de compunere a funcțiilor este lege pe G. Cum compunerea funcțiilor este asociativă, $f_k \circ f_0 = f_0 \circ f_k = f_k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ și $f_k \circ f_{-k} = f_{-k} \circ = f_k = f_0$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ rezultă că operația de compunere are element neutru, $f_0 \in G$ și orice funcție $f_k \in G$ este inversabilă cu $f_k^{-1} = f_{-k} \in G$. Rezultă că $(G, \circ)$ este grup.

c) Fie $f, g \in H$. Atunci $f = f_{3k}$ și $g = f_{3p}$ cu $k, p \in \mathbb{Z}$. Cum $f \circ g^{-1} = f_{3k} \circ f_{3p}^{-1} = f_{3k} \circ f_{-3p} = f_{3k-3p} =$ $= f_{3(k-p)} \in H$, rezultă că H este subgrup al lui G.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(x+1)$.

a) Calculați f'.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

c) Determinați numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\geq 1}$, $I_n = \int_0^1 x^n \sin x \, dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\sin 1 - \cos 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty} I_n$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+(1+x)^2}=\frac{(x+1)^2-x^2}{(1+x^2)(2+2x+x^2)}=\frac{2x+1}{(1+x^2)(2+2x+2x^2)}$.

b) Cum $f'(x)<0$ pentru $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$, $f'(x)>0$, $\forall x\in\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$ și $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, din monotonia lui f rezultă că $x_0=-\frac{1}{2}$ este unicul punct de extrem (minim) a lui *f*.

c) Avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0$ și $f\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. Din tabelul de variație a lui *f* rezultă:

– pentru $m\in\left(-\infty,-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)\cup[0,\infty)$ ecuația nu are soluții;

– pentru $m=-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ ecuația are o soluție;

– pentru $m\in\left(-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2},0\right)$ ecuația are două soluții.

2. *a)* $I_1=\int_0^1 x\sin x\,dx=\int_0^1 x(-\cos x)'\,dx=-x\cos x\Big|_0^1+\int_0^1\cos x\,dx=-\cos 1+\sin x\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1$.

b) Fie $n\geq 3$. Avem $I_n=\int_0^1 x^n\sin x\,dx=\int_0^1 x^n(-\cos x)'\,dx=-x^n\cos x\Big|_0^1+n\int_0^1 x^{n-1}\cos x\,dx=$

$=-\cos 1+n\int_0^1 x^{n-1}(\sin x)'\,dx=-\cos 1+nx^{n-1}\sin x\Big|_0^1-n(n-1)\int_0^1 x^{n-2}\sin x\,dx=-\cos 1+n\sin 1-$

$-n(n-1)I_{n-2}$, deci $I_n+n(n-1)I_{n-2}=n\sin 1-\cos 1$.

c) Deoarece $0\leq I_n=\int_0^1 x^n\sin x\,dx\leq\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Subiectul I

1. Determinați partea reală a numărului complex $z=\frac{1+i}{1-2i}+\frac{1+2i}{1-i}$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[2x]-[x]-\left[x+\frac{1}{2}\right]$. Calculați $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. Rezolvați ecuația $4^x=2^{\frac{1}{x}}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

4. Determinați numerele naturale n, $n\geq 2$ pentru care $C_n^1+2C_n^2=16$.

5. Fie punctele $A(1,2)$ și $G(3,4)$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, determinați coordonatele mijlocului BC.

6. Triunghiul ABC are $BC=10$ și raza cercului circumscris $R=5$. Calculați $\cos A$.

Subiectul I

1. Avem $z = \frac{(1+i)(1+2i)}{5} + \frac{(1+2i)(1+i)}{2} = \frac{7}{10}(1+i)(1+2i) = \frac{7}{10}(-1+3i)$, deci $\text{Re}(z) = -\frac{7}{10}$.

2. $f\left(\frac{1}{2}\right) = [1] - \left[\frac{1}{2}\right] - [1] = 0$.

3. Ecuația este echivalentă cu $2^{2x} = 2^{\frac{1}{x}} \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$, deci soluțiile sunt $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. $C_n^1 + 2C_n^2 = 16 \Leftrightarrow n + n(n-1) = 16 \Leftrightarrow n^2 = 16$, $n \geq 2$, deci $n = 4$.

5. Fie M mijlocul lui $[BC]$. Avem $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_B + x_C = 3x_G - x_A = 8 \Rightarrow x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = 4$ și, analog, $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_B + y_C = 3y_G - y_A = 10 \Rightarrow y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = 5$, deci $M(4, 5)$.

6. Din teorema sinusului avem $\frac{BC}{\sin A} = 2R$, deci $\sin A = 1$. Atunci $\cos A = 0$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2b \\ b & 1 & -a \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile reale ale lui a și b pentru care $\det(A) = -6$.
b) Arătați că, pentru orice valori reale ale lui a și b, rangul matricei A este cel puțin 2.
c) Fie $M = \{X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid \det(X) = 1\}$. Rezolvați ecuația $AX = -\sqrt[3]{6}\, I_3$, $X \in M$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x * y = xy + 3x + 3y + 7$.

a) Arătați că legea „*" este comutativă.

b) Calculați $\frac{(1*2)*3}{1*(2*3)}$.

c) Arătați că legea „*" nu are element neutru.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A) = \begin{vmatrix} a & 1 & 2b \\ b & 1 & -a \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4a + 2b^2 + a^2 - 4b = (a+2)^2 + 2(b-1)^2 - 6$. Avem $\det(A) = -6$ dacă și numai dacă $(a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$ și $b = 1$.

b) Fie $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = a$ și $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = a + 4$. Cum $\Delta_2 - \Delta_1 = 4 \neq 0$ rezultă că Δ_1 și Δ_2 nu pot fi simultan zero, deci $\text{rang}(A) \geq 2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

c) Fie $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ o soluție. Atunci $\det(AX) = \det(-\sqrt[3]{6}I_3)$, deci $\det(A) \cdot \det(X) = -6$. Cum $\det(X) = 1$, rezultă că $\det(A) = -6$, deci $a = -2$ și $b = 1$. Deci, dacă $a \neq -2$ sau $b \neq 1$ rezultă că ecuația nu are soluții. Dacă $a = -2$, $b = 1$, atunci $AX = -\sqrt[3]{6}I_3 \Leftrightarrow X = -\sqrt[3]{6} \cdot A^{-1} = -\sqrt[3]{6}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = -\sqrt[3]{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -4 & -8 & 6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

2. *a)* Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Cum $x*y = xy + 3x + 3y + 7 = yx + 3y + 3x + 7 = y*x$, legea „*" este comutativă.

b) $(1*2)*3 = 18*3 = 124$, iar $1*(2*3) = 1*28 = 122$ rezultă că $\frac{(1*2)*3}{1*(2*3)} = \frac{124}{122} = \frac{62}{61}$.

c) Legea „$*$" are element neutru $\Leftrightarrow \exists e \in \mathbb{R}$ astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow xe + 3x + 3e + 7 = x$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x(e+2) + 3e + 7 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e + 2 = 0$ și $3e + 7 = 0 \Leftrightarrow e = -2$ și $e = -\frac{7}{3}$, fals.

Deci legea „$*$" nu are element neutru.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x - 1$.

a) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1, e+2)$.

b) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \left(f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) + \frac{3n^2 + 5n}{2} \right)$.

c) Arătați că funcția este injectivă.

2. Fie $f : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

a) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} \, dx$.

b) Calculați $\int_{-1}^1 f^{101}(x) \, dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^1 x^3 f^n(x) \, dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Cum $f'(x) = e^x + 3$ și $f'(1) = e + 3$, rezultă că ecuația tangentei în punctul $A(1, e+2)$ la graficul funcției f este $y - e - 2 = (e+3)(x-1)$.

b) Avem $f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) = e^{-1} - 3 \cdot 1 - 1 + e^{-2} - 3 \cdot 2 - 1 + \ldots + e^{-n} - 3n - 1 = e^{-1} + e^{-2} + \ldots + e^{-n} - 3(1 + 2 + \ldots + n) - n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n} - \frac{3n(n+1)}{2} - n = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n} - \frac{n(3n+5)}{2}$,

deci $\lim\limits_{n \to \infty} \left(f(-1) + f(-2) + \ldots + f(-n) + \frac{n(3n+5)}{2} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \ldots + \frac{1}{e^n} \right) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^n - 1}{\frac{1}{e} - 1} = \frac{1}{e-1}$.

c) Derivata este strict pozitivă, deci funcția este strict crescătoare, de unde concluzia.

2. *a)* $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arctg} x \, dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$.

b) $f^{101}(-x) = \operatorname{arctg}^{101}(-x) = -\operatorname{arctg}^{101} x = -f^{101}(x)$, deci funcția de sub integrală este impară. Rezultă că integrala cerută este 0.

c) Cum $0 \le \operatorname{arctg} x \le \frac{\pi}{4}$ $\forall x \in [0, 1]$, rezultă că $0 \le x^3 \operatorname{arctg}^n x \le x^3 \left(\frac{\pi}{4} \right)^n \le \left(\frac{\pi}{4} \right)^n$, $\forall x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$.

Obținem $0 \le \int_0^1 x^3 f^n(x) \, dx \le \left(\frac{\pi}{4} \right)^n$ și cum $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{\pi}{4} \right)^n = 0$, rezultă că limita cerută este 0.

Subiectul I

1. Câte numere raționale conține mulțimea $\left\{ \sqrt[n]{1024} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x + a, a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care f este impară.

3. Rezolvați ecuația $\log_2 \frac{4^x + 2}{3} = x, x \in \mathbb{R}$.

4. Câte funcții $f: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ sunt?

5. Fie punctele $A(1, 3)$, $B(-3, 5)$ și $M(-1, a)$, $a \in \mathbb{R}$. Determinați valorile reale ale lui a pentru care M se află pe mediatoarea segmentului $[AB]$.

6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor a, b și c. Dacă $R = 4$ și $r = 1$, calculați $\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}$.

Subiectul I

1. $\sqrt[n]{1024} = \sqrt[n]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{n}} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \mid 10 \Leftrightarrow n \in \{2, 5, 10\}$. Deci mulțimea conține 3 numere raționale.

2. $f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x^3 - x + a = -x^3 - x - a, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0$. **3.** Ecuația devine $\frac{4^x + 2}{3} = 2^x \Leftrightarrow 4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0 \Leftrightarrow (2^x - 1)(2^x - 2) = 0 \Leftrightarrow 2^x = 1$ sau $2^x = 2$. Soluțiile sunt $x_1 = 0$ și $x_2 = 1$.

4. Sunt 4^3 funcții. **5.** Fie T mijlocul segmentului AB. Atunci $T(-1, 4)$. Cum panta dreptei AB este $-\frac{1}{2}$, rezultă că panta mediatoarei este 2. Atunci mediatoarea are ecuația $y - 4 = 2(x + 1)$, $M(-1, a)$ se află pe mediatoare $\Leftrightarrow a - 4 = 0 \Leftrightarrow a = 4$. Sau, $AM = MB \Leftrightarrow \sqrt{4 + (3 - a)^2} = \sqrt{4 + (5 - a)^2} \Leftrightarrow (3 - a)^2 = (5 - a)^2 \Leftrightarrow 9 - 6a + a^2 = 25 - 10a + a^2 \Leftrightarrow 4a = 16 \Leftrightarrow a = 4$.

6. Avem $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = \frac{a + b + c}{abc} = \frac{2p}{abc} = \frac{2}{r} \cdot \frac{pr}{abc} = \frac{2}{r} \cdot \frac{S}{abc} = \frac{2}{r} \cdot \frac{S}{4RS} = \frac{1}{2rR} = \frac{1}{8}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie numerele întregi a, b și matricea $A = \begin{pmatrix} a^2 & a^2 + 1 & a^2 + 2 \\ b^2 - 1 & b^2 & b^2 + 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A)$.

b) Arătați că $\operatorname{rang}(A) \geq 2$, oricare ar fi numerele întregi a și b.

c) Arătați că dacă $\operatorname{rang}(A) = 2$, atunci $a = 0$ și $|b| = 1$.

2. Pe mulțimea $G = (-2, 2)$ se definește legea de compoziție $x * y = \frac{4(x + y)}{4 + xy}$.

a) Rezolvați ecuația $x * x = x, x \in (-2, 2)$.

b) Arătați că G este grup în raport cu legea „$*$".

c) Arătați că funcția $f: (0, \infty) \to (-2, 2)$, $f(x) = \frac{2(x - 1)}{x + 1}$, este izomorfism de la grupul $((0, \infty), \cdot)$ la grupul $(G, *)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A)=\begin{vmatrix} a^2 & a^2+1 & a^2+2 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2-b^2+1 & a^2-b^2+1 & a^2-b^2+1 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}==$

$(a^2-b^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b^2-1 & b^2 & b^2+1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=(a^2-b^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b^2-1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=a^2-b^2+1$.

b) $\Delta_1=\begin{vmatrix} a^2 & a^2+1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=a^2-1$ și $\Delta_2=\begin{vmatrix} a^2+1 & a^2+2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=2a^2$. Cum $\Delta_2-2\Delta_1=2$ rezultă că Δ_1 și Δ_2 nu pot fi simultan 0, deci $\text{rang}(A)\geq 2$.

c) Din punctul *b)* avem $\text{rang}(A)=2\Leftrightarrow \det(A)=0\Leftrightarrow b^2-a^2=1\Leftrightarrow (b-a)(b+a)=1\Leftrightarrow b-a=b+a=1$ sau $b-a=b+a=-1\Leftrightarrow a=0$ și $b=1$ sau $a=0$ și $b=-1\Leftrightarrow a=0$ și $|b|=1$.

2. *a)* $x*x=x\Leftrightarrow \dfrac{8x}{4+x^2}=x\Leftrightarrow 8x=4x+x^3\Leftrightarrow x(x^2-4)=0,\ x\in(-2,2)\Leftrightarrow x=0$.

b) Din ipoteză, „$*$" este lege pe $G=(-2,2)$. Verificăm axiomele grupului:

• asociativitatea: $(x*y)*z=\dfrac{4(x+y)}{4+xy}*z=\dfrac{4\left(\dfrac{4(x+y)}{4+xy}+z\right)}{4+\dfrac{4(x+y)}{4+xy}\cdot z}=\dfrac{4(x+y+z)+xyz}{4+xy+xz+yz},\quad \forall x,y,z\in(-2,2)$,

iar $x*(y*z)=x*\dfrac{4(y+z)}{4+yz}=\dfrac{4\left(x+\dfrac{4(y+z)}{4+yz}\right)}{4+x\cdot\dfrac{4(y+z)}{4+yz}}=\dfrac{4(x+y+z)+xyz}{4+xy+xz+yz}$, deci legea „$*$" este asociativă.

• elementul neutru: $x*0=0*x=\dfrac{4x}{4}=x$, $\forall x\in(-2,2)$, deci $e=0$ este elementul neutru al legii „$*$".

• simetrizabilitatea elementelor: fie $x\in(-2,2)$; atunci x este simetrizabil $\Leftrightarrow \exists\, x'\in(-2,2)$ astfel încât $x*x'=x'*x=0\Leftrightarrow \dfrac{4(x+x')}{4+xx'}=0\Leftrightarrow x+x'=0\Leftrightarrow x'=-x\in(-2,2)$. Așadar, toate elementele sunt simetrizabile, rezultă că $(G,*)$ e grup.

c) $f(x)*f(y)=\dfrac{4\left(\dfrac{2(x-1)}{x+1}+\dfrac{2(y-1)}{y+1}\right)}{4+4\dfrac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}}=2\dfrac{(x-1)(y+1)+(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)+(x-1)(y-1)}=2\dfrac{2xy-2}{2xy+2}=\dfrac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$,

$\forall x,y\in(0,\infty)$, deci f este morfism. Cum $f(x)=\dfrac{2(x+1)-4}{x+1}=2-\dfrac{4}{x+1}$, rezultă că f este strict crescătoare, deci injectivă. Deoarece f este continuă, crescătoare, $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-2$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=2$, rezultă că $\text{Im}f=(-2,2)$, deci f este surjectivă.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$.

a) Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției f.

b) Studiați derivabilitatea funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |f(x)|$, în punctul $x_0 = -2$.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, și notăm cu $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Determinați aria suprafeței mărginite de graficul funcției f, axa Ox și dreptele $x = -1, x = 1$.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

c) Arătați că $2n\, I_{n+1} - (2n-1)\, I_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Avem $f'(x) = 3x^2 + 6x$ și $f''(x) = 6x + 6$, $x \in \mathbb{R}$. Analizând semnul lui f'', rezultă că $x = -1$ este unicul punct de inflexiune.

b) $\dfrac{g(x) - g(-2)}{x - (-2)} = \dfrac{|x^3 + 3x^2 - 4|}{x+2} = \dfrac{|(x+2)(x^2 + x - 2)|}{x+2} = \dfrac{|(x+2)^2(x-1)|}{x+2} = (x+2)|x-1| \Rightarrow \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{g(x) - g(-2)}{x+2} = 0$,

de unde rezultă că funcția g este derivabilă în $x_0 = -2$ și $g'(-2) = 0$.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{f(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x^3 + 3x^2 - 4}{x^3} \right)^{\frac{1}{x}} \cdot x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$, deoarece, aplicând teorema lui l'Hospital, cazul $\dfrac{\infty}{\infty}$, avem $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

2. *a)* $A = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left| \frac{1}{1+x^2} \right| \mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2 \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$.

b) $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^1 (f^{n+1}(x) - f^n(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f^n(x)(f(x) - 1)\,\mathrm{d}x$. Deoarece $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$, rezultă că $f^n(x) \cdot (f(x) - 1) \leq 0$, $\forall x \in [0,1]$, deci $I_{n+1} - I_n \leq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este descrescător, deci mărginit superior. Cum $I_n = \displaystyle\int_0^1 f^n(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă că șirul $(I_n)_n$ este mărginit inferior, deci este convergent.

c) $I_n = \displaystyle\int_0^1 x' \cdot (x^2+1)^{-n}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{(x^2+1)^n} \Bigg|_0^1 + n\int_0^1 x \cdot (x^2+1)^{-n-1} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x =$

$= \dfrac{1}{2^n} + 2n\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2^n} + 2n\, I_n - 2n\, I_{n+1}$. Rezultă că $2n\, I_{n+1} - (2n-1)\, I_n = \dfrac{1}{2^n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Subiectul I

1. Determinați numărul natural n pentru care $8(1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{2n}) = 6\,560$.

2. Determinați mulțimea valorilor întregi ale lui a pentru care graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^2 + ax + 1$ nu taie axa Ox.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+2}=5$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie cubul unui număr prim?

5. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $5\overline{AM}=2\overline{AB}+3\overline{AC}$. Calculați $\frac{BM}{MC}$.

6. Triunghiul ABC are $AC^2+AB^2+AB\cdot AC=BC^2$. Determinați măsura unghiului A.

biectul al II-lea

Testul 16

Subiectul I

1. Cum $1+3^2+3^4+...+3^{2n}=\frac{9^{n+1}-1}{8}$, relația din enunț devine $9^{n+1}-1=6560 \Leftrightarrow 9^{n+1}=6561 \Leftrightarrow 9^n=9^4 \Leftrightarrow n=3$. **2.** Deoarece $\Delta=a^2-4$, iar $G_f \cap Ox=\varnothing \Leftrightarrow \Delta<0$. Obținem $a \in \{-1, 0, 1\}$.

3. Cum funcția $f:[-2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+2}$ este strict crescătoare, deci injectivă și $f(7)=5$ rezultă că ecuația are soluția unică $x=7$. **4.** Cum $3^3<100\le 5^3<7^3\le 999<11^3$, rezultă că există 2 cuburi de numere prime având 3 cifre. Cum există 900 de numere naturale de 3 cifre, rezultă că probabilitatea este $\frac{1}{450}$. **5.** Avem $5\overline{AM}=2(\overline{AM}+\overline{MB})+3(\overline{AM}+\overline{MC})$, deci $\overline{O}=2\overline{MB}+3\overline{MC}$. Cum $\overline{MB}=-\frac{3}{2}\overline{MC} \Rightarrow \left|\overline{MB}\right|=\frac{3}{2}\left|\overline{MC}\right|$, deci $\frac{BM}{MC}=\frac{3}{2}$. **6.** Cum $AB^2+AC^2+AB\cdot AC=BC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$ rezultă $\cos A=-\frac{1}{2}$, deci $m(\hat{A})=120^\circ$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M=\left\{A\in M_2(\mathbb{C}) \middle| A^3=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right\}$.

   a) Arătați că rangul lui A este 2, oricare ar fi $A\in M$.

   b) Arătați că, pentru orice $A\in M$, ecuația $X^2=A$ nu are soluție în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   c) Arătați că dacă $A\in M$, atunci matricea $A-I_2$ este inversabilă.

2. Considerăm inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ unde $x*y=x+y+2$ și $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

   a) Determinați elementul neutru al legii „$*$".

   b) Arătați că inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ nu are divizori ai lui zero.

   c) Arătați că funcția $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(x)=x-2$, este morfism de la inelul $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ la inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Dacă $A \in M$, atunci $\det^3(A) = \det(A^3) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$, deci $\det(A) \neq 0$. Rezultă $\operatorname{rang}(A) = 2$.

b) Fie $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu $X^2 = A$, $A \in M$. Atunci $\det^2(X) = \det(X^2) = \det(A) = -4$, fals pentru că $\det^2(X) \geq 0$. Deci ecuația $X^2 = A$ nu are soluții în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

c) Dacă $A \in M$, atunci $A^6 = 4I_2 \Leftrightarrow A^6 - I_2 = 3I_2 \Leftrightarrow (A - I_2)(A^5 + A^4 + A^3 + A^2 + A + I_2) = 3I_2$, de unde rezultă că $A - I_2$ este inversabilă.

2. *a)* Fie $e \in \mathbb{Z}$ elementul neutru al legii „$*$". Atunci $x*e = e*x = x, \forall x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + e + 2 = x \Leftrightarrow e = -2$.

b) Fie $x, y \in \mathbb{Z}$ cu $x \circ y = -2$. Atunci $xy + 2x + 2y + 2 = -2$, deci $(x+2)(y+2) = 0$, de unde $x = -2$ sau $y = -2$. Rezultă că inelul $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ nu are divizori ai lui zero.

c) $f(x) * f(y) = x + y - 2 = f(x+y), f(x) \circ f(y) = f(x \cdot y), x, y \in \mathbb{Z}$, deci funcția este morfism de inele.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

a) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 1$.

b) Determinați asimptota graficului funcției f la ∞.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} x f(x)$.

2. Fie funcția $f: (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.

a) Determinați primitiva F a funcției f, cu $F(0) = 0$.

b) Calculați $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1}\, dx$.

c) Calculați $\displaystyle\int_0^{\pi/4} f(\operatorname{tg} x)\, dx$.

Subiectul al III-lea

1. a) Pentru $x \neq 1$ avem $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{\sqrt{(1-x^2)^2} \cdot (x^2+1)} = \dfrac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)}$.

Obținem $f'(x) = \dfrac{2}{1+x^2}$ pentru $x \in [0, 1)$ și $f'(x) = \dfrac{-2}{1+x^2}$ pentru $x \in (1, \infty)$. Cum f este derivabilă pe $[0, \infty) \setminus \{1\}$, este continuă în $x_0 = 1$ și $\lim\limits_{x \uparrow 1} f'(x) = 1$, deci $f'_s(1) = 1$ și $\lim\limits_{x \downarrow 1} f'(x) = -1$, deci $f'_d(1) = -1$.

Rezultă că f nu e derivabilă în $x_0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \arcsin 0 = 0 \Rightarrow y = 0$ este asimptota la graficul funcției.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} x\, f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{x}}$. Cum $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f'(x)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2$, din teorema lui l'Hospital, cazul $\dfrac{0}{0}$, rezultă că limita cerută este 2.

2. *a)* $F \in \int f(x)\,dx = \int (1+x)' \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - \int dx = (1+x)\ln(1+x) - x + C$. Rezultă că $F(x) = (1+x)\ln(1+x) + c$. Cum $0 = F(0) = c$, rezultă $F(x) = (1+x)\ln(1+x)$.

b) $\int\limits_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}\,dx = \int\limits_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x+1}\,dx = \int\limits_0^1 \ln(1+x) \cdot (\ln(1+x))'\,dx = \dfrac{1}{2}\ln^2(1+x)\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}\ln^2 2$.

c) Avem $f\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)\right) = f\left(\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1-\mathrm{tg}x}{1+\mathrm{tg}x}\right) = \ln\dfrac{2}{1+\mathrm{tg}x} = \ln 2 - \ln(1+\mathrm{tg}\,x) = \ln 2 - f(\mathrm{tg}\,x)$. Cu substituția $y = \dfrac{\pi}{4} - x$ avem $\int\limits_0^{\pi/4} f(\mathrm{tg}\,x) = -\int\limits_{\pi/4}^0 f\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right)\right)dy = \int\limits_0^{\pi/4} f\left(\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - y\right)\right)dy =$

$= \int\limits_0^{\pi/4} (\ln 2 - f(\mathrm{tg}\,y))\,dy = \dfrac{\pi}{4}\ln 2 - \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}\,y)\,dy$. Rezultă că $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} f(\mathrm{tg}(x))\,dx = \dfrac{\pi}{8}\ln 2$.

Subiectul I

1. Determinați numerele reale x pentru care $[x-1] = \{x\}$.

2. Determinați inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \to (3, \infty)$, $f(x) = 2^x + 3$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos x = \mathrm{tg}x$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, el să îndeplinească condiția $C_7^k < C_7^{k+1}$?

5. Fie $a \in \mathbb{R}$ și vectorii $\overline{u} = \overline{i} + 3\overline{j}$, $\overline{v} = 3\overline{i} + a\overline{j}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\overline{u} + \overline{v}$ și $\overline{u} - \overline{v}$ sunt perpendiculari.

6. Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 4$, $BC = 5$ și $AC = 7$. Calculați $\sin A$.

Subiectul I

1. Avem $[x-1] = \{x\} \in [0, 1)$, deci $[x-1] = \{x\} = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$ şi $0 \le x - 1 < 1$. Obţinem $x = 1$.

2. Fie $y \in (3, \infty)$; $f(x) = y \Leftrightarrow 2^x + 3 = y \Leftrightarrow 2^x = y - 3 > 0 \Leftrightarrow x = \log_2(y-3)$. Deci inversa funcţiei f este funcţia $f^{-1} : (3, \infty) \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \log_2(x-3)$.

3. Ecuaţia se scrie $\cos x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \Leftrightarrow \cos^2 x = \sin x \Leftrightarrow \sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\sin x \in \left\{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}\right\}$. Cum $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} < -1$ obţinem $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, deci

$x \in \left\{(-1)^k \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $C_7^k < C_7^{k+1} \Leftrightarrow \dfrac{7!}{k!(7-k)!} < \dfrac{7!}{(k+1)!(7-k-1)!} \Leftrightarrow \dfrac{1}{7-k} < \dfrac{1}{k+1} \Leftrightarrow k+1 < 7-k \Leftrightarrow k < 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k \in \{0, 1, 2\}$. Probabilitatea este $\dfrac{3}{7}$.

5. $\overline{u} + \overline{v} = 4\overline{i} + (a+3)\overline{j}$ şi $\overline{u} - \overline{v} = -2\overline{i} + (3-a)\overline{j}$. Avem $(\overline{u} + \overline{v}) \perp (\overline{u} - \overline{v}) \Leftrightarrow (\overline{u} + \overline{v}) \cdot (\overline{u} - \overline{v}) = 0$

$\Leftrightarrow \Leftrightarrow -8 + (a+3)(3-a) = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$. **6.** Cum $p = 8$, cu formula lui Heron, aria

triunghiului este $S = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 1} = 2\sqrt{3}$. Deoarece $S = \dfrac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2}$ obţinem $2\sqrt{3} = 14 \sin A$, deci

$\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{7}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie mulţimea $M = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & 6x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Determinaţi valorile reale ale lui x pentru care $\det(A(x)) = 2$.

b) Arătaţi că $A(x) \cdot A(y) = A(xy + x + y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Arătaţi că $(A(3))^n = A(4^n - 1)$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Fie corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ şi $H = \{x^3 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.

a) Rezolvaţi ecuaţia $\hat{5}x + \hat{4} = \hat{1}$, $x \in \mathbb{Z}_7$.

b) Determinaţi numărul elementelor lui H.

c) Determinaţi perechile $(x, y) \in \mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ pentru care $x^3 + \hat{2}y^3 = \hat{0}$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det A(x) = (1+3x)(1-2x) + 6x^2 = 1 + x$, deci $1 + x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

b) Avem $A(x) = I_2 + xB$, unde $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Cum $B^2 = B$, rezultă că:

$A(x)A(y) = (I_2 + xB)(I_2 + yB) = I_2 + xB + yB + xyB^2 = I_2 + (xy + x + y)B = A(xy + x + y)$.

c) Inducţie matematică după n: $P(1)$: $A(3) = A(3)$, deci $P(1)$ este adevărată. Pentru $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ avem $(A(3))^{n+1} = (A(3))^n \cdot A(3) = A(4^n - 1) \cdot A(3) = A(3 \cdot 4^n - 3 + 4^n - 1 + 3) = A(4^{n+1} - 1)$.

2. *a)* $\hat{5}x + \hat{4} = \hat{1} \Leftrightarrow \hat{5}x = -\hat{3} \Leftrightarrow \hat{5}x = \hat{4} \Leftrightarrow x = \hat{5}^{-1} \cdot \hat{4} \Leftrightarrow x = \hat{3} \cdot \hat{4} \Leftrightarrow x = \hat{5}$.

b) $\hat{0}^3 = \hat{0}$, $\hat{1}^3 = \hat{2}^3 = \hat{4}^3 = \hat{1}$ şi $\hat{3}^3 = \hat{5}^3 = \hat{6}^3 = \hat{6}$, rezultă $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{6}\}$, deci H are 3 elemente.

c) Dacă $\hat{y} = \hat{0}$ rezultă că $x^3 = \hat{0}$, deci $x = \hat{0}$. Dacă $y \ne \hat{0}$, atunci $x^3 + \hat{2}y^3 = \hat{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3 = -\hat{2}y^3 \Leftrightarrow (xy^{-1})^3 = \hat{5} \Rightarrow \hat{5} \in H$, fals, deci $(\hat{0}, \hat{0})$ este singura pereche cu proprietatea din enunţ.

Subiectul al III-lea

Subiectul al III-lea

1. Fie $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

a) Determinați asimptota graficului funcției f la ∞.

b) Determinați imaginea funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n\ge 1}$, $I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^n x\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculați I_2.

b) Arătați că $I_{n+2}=\dfrac{1}{n+1}-I_n$, $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$; $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=1$ și $n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-m(x))=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}-1\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}x\dfrac{\dfrac{x-1}{x+1}-1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+1}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x}{x+1}=-1$, deci $y=x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$.

b) $f'(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{2}{(x+1)^2}>0,\ \forall x>1$, deci f este strict crescătoare pe $(1,\infty)$. Fiind continuă, f este strict crescătoare pe $[1,\infty)$. Cum $f(1)=0$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, rezultă că $\operatorname{Im}f=[0,\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{-x}{x+1}}=e^{-1}$.

2. *a)* $I_2=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=-\operatorname{ctg}x\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}$.

b) $I_{n+2}+I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^n x(\operatorname{ctg}^2 x+1)\,\mathrm{d}x=0=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^n x\cdot\frac{1}{\sin^2 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^n x(\operatorname{ctg}x)'dx=-\frac{\operatorname{ctg}^{n+1}x}{n+1}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n+1}$.

c) Cum $I_{n+1}-I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}^n x\cdot(\operatorname{ctg}x-1)dx\le 0$, șirul $(I_n)_{n\ge 1}$ este descrescător și, în consecință mărginit superior. Cum $\operatorname{ctg}x\in[0,1]$ pentru orice $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$, rezultă că $I_n\ge 0$, $\forall n$, deci șirul $(I_n)_n$ este mărginit. Fie $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=L$. Trecând la limită relația de la punctul *b)* rezultă că $2L=0$, deci $L=0$.

Subiectul I

1. Numerele $\sqrt{3}$ și 3 sunt termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$ cu rația r. Arătați că r este număr irațional.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+3x+2}{x}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Calculați $f(1)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2 x=\log_3 x$.

4. Determinați valorile naturale ale lui n pentru care dezvoltarea $(1+\sqrt[5]{2})^n$ are exact 7 termeni raționali.

5. Fie $A(1,2)$ și $B(3,-1)$. Determinați ecuațiile dreptelor care trec prin A și sunt situate la distanța 2 de B.

6. Triunghiul ABC are $AB=4$, $AC=6$ și $BC=2\sqrt{19}$. Calculați $\sin A$.

Testul 18

Subiectul I

1. Dacă $3=a_{n+1}$ și $\sqrt{3}=a_{m+1}$, atunci $3=a_1+nr$ și $\sqrt{3}=a_1+mr \Rightarrow 3-\sqrt{3}=(n-m)r \Rightarrow$ $\Rightarrow r=\frac{3}{n-m}-\frac{\sqrt{3}}{n-m}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. **2.** Avem $f(1)+2f(1)=6$. Obținem $f(1)=2$.

3. $\log_2 x=\log_3 x \Leftrightarrow \frac{\lg x}{\lg 2}=\frac{\lg x}{\lg 3}\Leftrightarrow \lg x\left(\frac{1}{\lg 2}-\frac{1}{\lg 3}\right)=0\Leftrightarrow \lg x=0\Leftrightarrow x=1$.

4. Avem $T_{k+1}=C_n^k\left(\sqrt[5]{2}\right)^k=C_n^k\cdot 2^{\frac{k}{5}}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow 5\mid k$, $k=\overline{0,n}$. Cum există $\left[\frac{n}{5}\right]+1$ multipli de 5 de la 0 la n, rezultă că $\left[\frac{n}{5}\right]+1=7 \Leftrightarrow \left[\frac{n}{5}\right]=6 \Leftrightarrow 6\leq\frac{n}{5}<7 \Leftrightarrow n\in\{30,31,32,33,34\}$.

5. Dreptele care trec prin $A(1,2)$ au ecuațiile $a(x-1)+b(y-2)=0$ cu $a^2+b^2\neq0$. Distanța de la B la o astfel de dreaptă este $\frac{|a(3-1)+b(-1-2)|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Avem $\frac{|2a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2 \Leftrightarrow |2a-3b|=2\sqrt{a^2+b^2}$ $\Leftrightarrow 4a^2-12ab+9b^2=4a^2+4b^2\Leftrightarrow b(5b-12a)=0\Rightarrow b=0$ sau $\frac{b}{a}=\frac{12}{5}$. Obținem $a(x-1)=0$, unde $a\neq0$, deci $x-1=0$, respectiv $x-1+\frac{b}{a}(y-2)=0 \Leftrightarrow x-1+\frac{12}{5}(y-2)=0 \Leftrightarrow 5x+12y-29=0$.

6. Din teorema cosinusului $\cos A=\frac{16+36-76}{48}=-\frac{1}{2}\Rightarrow \sin A=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + my + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 4 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil determinat.
b) Stabiliți dacă există valori reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0), cu componentele în progresie aritmetică.

2. Fie polinomul $f = (X^2 + X + 1)^{10} + (X^2 - X + 1)^{10} \in \mathbb{R}[X]$ și $f = a_{20}X^{20} + a_{19}X^{19} + ... + a_1x + a_0$ forma sa algebrică.
a) Determinați restul împărțirii lui f la $X - 1$.
b) Calculați $a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_{20}$.
c) Calculați a_7.

Subiectul al II-lea

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & m & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. Atunci $\det(A) = m - 16$. Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow m - 16 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 16 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \{16\}$.
b) Dacă $m \neq 16$, sistemul este compatibil determinat. Dacă $m = 16$ atunci $\det A = 0$, deci $\operatorname{rang} A \leq 2$. Cum $\Delta_p = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 16 \end{vmatrix} = 50 \neq 0$, rezultă că $\operatorname{rang} A = 2$. Deoarece $\Delta_c = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 16 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 170 \neq 0$, sistemul este incompatibil. Deci nu există $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.
c) O soluție cu componentele în progresie aritmetică este soluție a sistemului $\begin{cases} 3x - y + 2z = 3 \\ 2x + my + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$.
Rezolvăm sistemul format din ecuațiile 1, 3 și 4; acesta are soluțiile $x = \frac{3}{5}$, $y = \frac{4}{5}$, $z = 1$. Înlocuind în ecuația a doua obținem $m = -\frac{21}{4}$.
2. *a)* Restul este $f(1) = 3^{10} + 1$.
b) Avem $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{20}$ și $f(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - ... + a_{20}$.
Rezultă că $a_0 + a_2 + ... + a_{20} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = 3^{10} + 1$.

c) Fie $x \in \mathbb{R}$. Avem $f(-x) = (x^2 - x + 1)^{10} + (x^2 + x + 1)^{10} = f(x)$. Cum polinomul $f(X) - f(-X)$ are o infinitate de soluții, rezultă că $f(X) = f(-X)$, deci $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_{20}X^{20} = a_0 - a_1X + a_2X^2 - ... + a_{20}X^{20}$. Atunci $a_{2k+1} = -a_{2k+1}$ deci $a_{2k+1} = 0$, $\forall k = \overline{0, 9}$. Rezultă că $a_7 = 0$.

Subiectul al III-lea

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-4\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+3}{x+4}$.

a) Determinați asimptota verticală la graficului funcției *f*.

b) Arătați că funcția este crescătoare pe $(-4,\infty)$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+f(1)\,f(2)\ldots f(n)\right)^n$.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-4x+3$ și $I_n=\int_1^3 f^n(x)\,dx,\ n\in\mathbb{N}^*$.

a) Determinați aria suprafeței mărginite de graficul lui *f*, axa *Ox* și dreptele $x=0,\ x=1$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^3 (x-2)\,f^2(x)\,dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Cum $\lim\limits_{x\nearrow -4} f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\searrow -4} f(x)=-\infty$, dreapta $x=-4$ este asimptotă verticală. Cum *f* este continuă pe $\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, nu există alte asimptote verticale.

b) Cum $f'(x)=\dfrac{1}{(x+4)^2}>0,\forall x\in(-4,\infty)$, cerința rezultă.

c) $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(n)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{n+3}{n+4}=\dfrac{4}{n+4}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{n+4}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{n+4}\right)^{\frac{n+4}{4}}\right]^{\frac{4n}{n+4}}=e^4$.

2. *a)* $A=\displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx=\int_0^1 |x^2-4x+3|\,dx=\int_0^1 (x^2-4x+3)\,dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$.

b) $\displaystyle\int_1^2 (x-2)f^2(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3 (2x-4)f^2(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3 f'(x)f^2(x)dx=\frac{1}{6}f^3(x)\Big|_1^3=0$, deoarece $f(3)=f(1)=0$.

c) $I_{n+1}=\displaystyle\int_1^3 (x-2)'f^{n+1}(x)\,dx=(x-2)\,f^{n+1}(x)\Big|_1^3-(n+1)\int_1^3 (x-2)f^n(x)(2x-4)\,dx==$

$-2(n+1)\displaystyle\int_1^3 (x^2-4x+4)f^n(x)dx=-2(n+1)\int_1^3\left(f(x)+1\right)f^n(x)dx=-2(n+1)I_{n+1}-2(n+1)I_n$.

Deci $(2n+3)I_{n+1}=-2(n+1)I_n$, de unde $\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=-\dfrac{2(n+1)}{2n+3}$ și $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{I_{n+1}}{I_n}=-1$.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului $z=(1+2i)^2$.

2. Determinați imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+5$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2+8^{\log_2 x}=12$.

4. Determinați numărul real *x* știind că termenul din mijloc al dezvoltării $(1+x)^8$ este egal cu 70.

5. Fie hexagonul regulat *ABCDEF* de latură 1. Calculați $\left|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{EF}\right|$.

6. Triunghiul echilateral *ABC* are raza cercului înscris egală cu 1. Calculați aria triunghiului.

Subiectul I

1. Avem $z=-3+4i \Rightarrow |z|=5$.

2. Imaginea funcției f este $\left[-\frac{\Delta}{4a},\infty\right)=[4,\infty)$.

3. Pentru $x>0$ ecuația se scrie $x^2+x^{\log_2 8}-12 \Leftrightarrow x^2+x^3=12$. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x^3$ este strict crescătoare, deci injectivă, iar $f(2)=12$; rezultă că $x=2$ este unica soluție a ecuației.

4. Dezvoltarea are 9 termeni, deci cel din mijloc, este $T_5=C_8^4x^4=70x^4$. Cum $T_5=70$, rezultă $x^4=1$, deci $x=\pm1$. **5.** $\overline{AC}+\overline{EF}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{EF}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CB}=\overline{AB}$, deci $|\overline{AC}+\overline{EF}|=|\overline{AB}|=1$.

6. Avem latura $\frac{6}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$. Rezultă că $S=3\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul: $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y+mz=0 \\ x+2y+(m+1)z=0 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Rezolvați sistemul pentru $m=1$.

b) Determinați valorile lui m pentru care sistemul are soluții nenule.

c) Determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2+y_0^2+z_0^2=6$.

2. Fie polinomul $f_a=(X+a)^{12}+(X-a)^{12}$, unde a este un număr real.

a) Determinați restul împărțirii lui f_a la polinomul x^2-a^2.

b) Determinați rădăcinile lui f_a în cazul în care f_a are cel puțin o rădăcină reală.

c) Arătați că, pentru orice $a\in\mathbb{R}$, $a\neq0$, rădăcinile în $\mathbb{C}$ ale lui f_a au partea reală zero.

MIHAI

Subiectul al II-lea

1. *a)* Determinantul este nenul și sistemul este omogen, deci soluția este cea nulă.

b) Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$ matricea sistemului. Sistemul are soluții nenule $\Leftrightarrow \det(A)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -m-1=0 \Leftrightarrow m=-1$.

c) Cum orice soluție cu proprietatea din enunț este nenulă, rezultă că $m=-1$. Cum $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\neq0$,

rezultă că rangul lui A este 2, deci sistemul este compatibil nedeterminat, cu necunoscuta secundară z.

Pentru $z=\alpha\in\mathbb{R}$ sistemul devine: $\begin{cases} x+y=\alpha \\ x+2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2\alpha,\ y=-\alpha$. Deci $x_0=2\alpha$, $y_0=-\alpha$, $z_0=\alpha$, de

unde $x_0^2+y_0^2+z_0^2=6\alpha^2$. Obținem $\alpha^2=1$, deci $\alpha=\pm1$ și soluțiile $(2,-1,1)$ și $(-2,1,-1)$.

2. *a)* Avem $f_a=(x^2-a^2)c+r$ cu $c, r\in\mathbb{R}[x]$ și grad $r\leq1$. Dacă $a=0$, cum $f_0=2X^{12}$, rezultă că $r=0$

deoarece X^2 divide f_0. Dacă $a\neq0$ și $r=pX+q$ cu $p, q\in\mathbb{R}$, atunci $f(a)=pa+q$, $f(-a)=-pa+q$, de

unde $pa+q=(2a)^{12}$ și $-pa+q=(2a)^{12}$. Rezultă $p=0$ și $q=12^{12}\cdot a^{12}$, deci $r=2^{12}a^{12}$.

b) Fie $\alpha\in\mathbb{R}$ o rădăcină reală a lui f_a. Cum $(\alpha+a)^{12}+(\alpha-a)^{12}=0$, rezultă că $\alpha+a=\alpha-a=0$, deci

$\alpha=a=0$. Atunci $f_a=f_0=2X^{12}$ și 0 este rădăcină multiplă de ordinul 12.

c) Fie $z\in\mathbb{C}$, $z=u+vi$ o rădăcină a lui f, cu u și $v\in\mathbb{R}$. Cum $(z+a)^{12}=-(z-a)^{12}\Rightarrow$

$\Rightarrow |(z+a)^{12}|=|(z-a)^{12}|\Rightarrow |z+a|^{12}=|z-a|^{12}\Rightarrow |z+a|=|z-a|\Rightarrow |u+a+vi|=$

$=|u-a+vi|\Rightarrow(u+a)^2+v^2=(u-a)^2+v^2\Rightarrow 4au=0\Rightarrow u=0$, deci $\mathrm{Re}(z)=0$.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

a) Arătați că f este strict crescătoare.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)}{x^3}$.

c) Arătați că f este convexă pe $[0,\pi]$.

2. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x+1}$.

a) Arătați că orice primitivă a lui $\mathbb{R}$ este concavă.

b) Calculați: $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{(x+1)^2}\,dx$.

c) Calculați: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+2} f(t)\,dt$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Avem $f'(x)=1-\cos x\geq 0$ oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. Deoarece mulțimea $\{x\in\mathbb{R}\mid f'(x)=0\}=\{x\in\mathbb{R}\mid \cos x=1\}=\{2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$ nu conține niciun interval nedegenerat, rezultă că f este strict crescătoare.

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{\sin^3 x}\cdot\frac{\sin^3 x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3\cdot\frac{f(\sin x)}{\sin^3 x}=\lim_{y\to 0}\frac{f(y)}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}$. Cu teorema lui l'Hospital avem $\displaystyle\lim_{y\to 0}\frac{y-\sin y}{y^3}=\lim_{y\to 0}\frac{1-\cos y}{3y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{6y}=\frac{1}{6}$, deci limita cerută este $\frac{1}{6}$.

c) Avem $f''(x)=\sin x\geq 0$, oricare ar fi $x\in[0,\pi]$, de unde conluzia.

2. *a)* Fie F o primitivă a lui f. Atunci $F''(x)=f'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x+1}\right)^2}\cdot\left(-\dfrac{1}{(x+1)^2}\right)<0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci F este concavă.

b) Cu schimbarea de variabilă $\dfrac{1}{x+1}=t$ obținem $\displaystyle\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}\operatorname{arctg}\frac{1}{x+1}\,dx=\int_{\frac12}^1\operatorname{arctg} t\,dt=$

$$=\int_{\frac12}^1 t'\operatorname{arctg} t\,dt=t\operatorname{arctg} t\Big|_{\frac12}^1-\int_{\frac12}^1\frac{t}{t^2+1}\,dt=\frac{\pi}{4}-\frac12\operatorname{arctg}\frac12-\frac12\ln(t^2+1)\Big|_{\frac12}^1=\frac{\pi}{4}-\frac12\operatorname{arctg}\frac12-\frac12\ln\frac{8}{5}.$$

c) Fie $x>0$. Cum f este continuă, din teorema de medie rezultă că există $c_x\in(x,x+2)$ astfel încât $\displaystyle\int_x^{x+2} f(t)\,dt=f(c_x)(x+2-x)=2f(c_x)$. Cum $\lim\limits_{x\to\infty}c_x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, rezultă că $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+2}f(t)\,dt=0$.

Subiectul I

1. Determinați numărul natural x astfel încât $1+5+9+\ldots+x=496$.

2. Fie funcțiile $f,g:(0,\infty)\to(0,\infty)$ astfel încât $(g\circ f)(x)=x^4$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$. Arătați că f este injectivă.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+1}+\log_2 x=6$.

4. Aflați cel mai mic termen al dezvoltării $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^7$.

5. Fie punctele $A(-1, 2)$, $B(-4, 6)$ și $C(3, -1)$. Aflați lungimea bisectoarei din A a triunghiului ABC.

6. Calculați $\cos 2° + \cos 6° + \cos 10° + \ldots + \cos 178°$.

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ progresia aritmetică cu $a_1 = 1$ și rația $r = 4$. Dacă $x = a_m$, atunci $a_n = a_1 + (n-1)r = 4n - 3$. Atunci $496 = S_n = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n\frac{1+4n-3}{2} = n(2n-1)$. Obținem $2n^2 - n - 496 = 0$ cu soluțiile $n_1 = 16$ și $n_2 = -\frac{31}{2}$. Cum $n \in \mathbb{N}$, rezultă $n = 16$, deci $x = 61$. **2.** Fie $x_1, x_2 \in (0, \infty)$ cu $f(x_1) = f(x_2)$. Rezultă că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, deci $x_1^4 = x_2^4$, de unde $x_1 = x_2$. **3.** Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x+1} + \log_2 x$, este strict crescătoare, deci injectivă. Cum $f(8) = \sqrt{9} + \log_2 8 = 6$ rezultă că $x = 8$ este unica soluție a ecuației.

4. Avem $T_{k+1} = C_7^k\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k = \left(\frac{1}{3}\right)^7 = T_8$, cu egalitate $\Leftrightarrow C_7^k = 1$ și $\left(\frac{1}{2}\right)^{7-k} = \left(\frac{1}{3}\right)^{7-k}$ $\Leftrightarrow k = 7$. Deci cel mai mic termen este T_8. **5.** Avem $AB = \sqrt{9+16} = 5$ și $AC = \sqrt{16+9} = 5$, deci triunghiul este isoscel de bază $[BC]$. Notând $M\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ mijlocul laturii BC, cum bisectoarea din A este și mediană, rezultă că lungimea bisectoarei este $AM = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

6. Cum $\cos 178° = -\cos 2°$, $\cos 174° = -\cos 6°$, ..., $\cos 94° = -\cos 86°$, rezultă că suma este egală cu $\cos 90°$, deci este 0.

Subiectul al II-lea

1. Fie sistemul $\begin{cases} a^2x - b^2y + z = 1 \\ (a^2+1)x - (b^2-1)y + 2z = 2 \\ (a^2+2)x - (b^2-2)y + 4z = 4 \end{cases}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul matricei sistemului.

b) Arătați că, pentru orice a și b, sistemul este compatibil.

c) Arătați că dacă (x_0, y_0, z_0) este soluția sistemului, atunci: $x_0 + y_0 + z_0 \neq 2012$.

2. Fie polinomul $f = X^4 - 4X + 1$ și $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui.

a) Calculați $\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{x_3}\right)\left(1-\frac{1}{x_4}\right)$.

b) Arătați că $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5 = 0$.

c) Arătați că f are exact două rădăcini reale.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A)=\begin{vmatrix} a^2 & -b^2 & 1 \\ a^2+1 & -b^2+1 & 2 \\ a^2+2 & -b^2+2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+b^2 & -b^2 & 1 \\ a^2+b^2 & -b^2+1 & 2 \\ a^2+b^2 & -b^2+2 & 4 \end{vmatrix}=(a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & -b^2 & 1 \\ 1 & -b^2+1 & 2 \\ 1 & -b^2+2 & 4 \end{vmatrix}=$

$=(a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & -b^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}=a^2+b^2$.

b) Sistemul are soluția (0,0,1). Așadar, sistemul este compatibil.

c) Fie x_0, y_0, z_0 o soluție a sistemului. Scăzând prima ecuație din a doua obținem: $x_0+y_0+z_0=1$, deci $x_0+y_0+z_0\neq 2012$.

2. *a)* $\left(1-\frac{1}{x_1}\right)\left(1-\frac{1}{x_2}\right)\left(1-\frac{1}{x_3}\right)\left(1-\frac{1}{x_4}\right)=\frac{(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)(x_4-1)}{x_1x_2x_3x_4}=(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)=$

$=f(1)=-2$, deoarece $f=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$ și $x_1x_2x_3x_4=1$.

b) Fie $i=\overline{1,5}$. Deoarece $x_i^4=4x_i-1$, rezultă că $x_i^5=4x_i^2-x_i$. Adunând cele 5 relații obținem $x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-(x_1+x_2+x_3+x_4)$. Din relațiile lui Viète, $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_3x_4)=0$, de unde $x_1^5+x_2^5+x_3^5+x_4^5=0$

.

c) Deoarece $f(-1)=6>0$; $f(1)=-2<0$; $f(2)=25>0$ și funcția polinomială a lui f este continuă, rezultă că f are două rădăcini reale $x_1\in(-1,1)$ și $x_2\in(1,2)$. Dacă toate rădăcinile lui f ar fi reale, ar rezulta că $0=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2>0$, fals și cum numărul rădăcinilor nereale ale lui f este par, rezultă că f are exact două rădăcini reale.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^4+10x^2+1$.

a) Calculați derivata funcției.

b) Determinați imaginea funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(n)}{n^5}\right)^n$.

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(\ln x)$.

a) Calculați $I_n=\int_0^{e^\pi}\frac{f(x)}{x}\,dx$.

b) Calculați aria suprafeței mărginite de graficul lui f, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=e$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\int_e^{e^2} f^n(x)\,dx$.

a) $f'(x)=20x^3+20x$

b) Cum f este pară, va fi suficient să determinăm imaginea lui f pe $[0,\infty)$. Cum $f'(x)=20x^3+20x\geq 0$ și $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, rezultă că f este strict crescătoare pe $[0,\infty)$. Cum f e continuă și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $f(0)=1$ rezultă că $f([0,\infty))=[1,\infty)$, deci $\operatorname{Im}f=[1,\infty)$.

c) Avem $f(x)=\frac{(x+1)^5-(x-1)^5}{2}$, de unde $\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left((k+1)^5-(k-1)^5\right)=\frac{(n+1)^5+n^5-1}{2}$.

Atunci $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)}{n^5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\sum_{k=1}^{n} f(k)-n^5}{n^5}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(n+1)^5-n^5-1}{2n^5}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^5-n^5-1}{2n^4}} = e^{\frac{5}{2}}$.

2. ***a)*** Cu schimbarea de variabilă $\ln x = t$ avem $\int_1^e \frac{1}{x}\cos(\ln x)\,dx = \int_0^\pi \cos t\,dt = \sin t\,\Big|_0^\pi = 0$.

b) Deoarece $\ln x \in [0,1] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru $x \in [1, e]$, rezultă că $f(x) > 0$ pentru $x \in [1, e]$. Atunci

$$A = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e x'\cdot\cos(\ln x)\,dx = x\cos(\ln x)\,\Big|_1^e + \int_1^e x\sin(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= e\cos 1 - 1 + \int_1^e \sin(\ln x)\,dx = e\cos 1 - 1 + \int_1^e x'\sin(\ln x)\,dx = e\cos 1 - 1 + x\sin(\ln x)\,\Big|_1^e - \int_1^e x\cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$= e\cos 1 - 1 + e\sin 1 - A$. Obținem $A = \frac{1}{2}e(\cos 1 + \sin 1) - \frac{1}{2}$.

c) Cum $\ln x \in [1, 2]$ pentru $x \in [e, e^2]$, rezultă că $f(x) \in [\cos 2, \cos 1]$ pentru $x \in [e, e^2]$. Deoarece $\cos 2 < 0$ și $\cos 1 < |\cos 2|$, avem $|f(x)| \le |\cos 2|,\ \forall x \in [e, e^2]$. Atunci:

$$\left|\int_e^{e^2} f^n(x)\,dx\right| \le \int_e^{e^2} |f^n(x)|\,dx \le \int_e^{e^2} |\cos 2|^n\,dx = (e^2 - e)|\cos 2|^n \xrightarrow{n\to\infty} 0,\ \text{deci}\ \lim_{n\to\infty}\int_e^{e^2} f^n(x)\,dx = 0$$

Subiectul I

1. Arătați că $(-\infty, \log_2 3) \cap (1, +\infty) \neq \varnothing$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$. Calculați $f(f(1))$.

3. Rezolvați ecuația $4^x + 2^x = 72$.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, știind că $A_n^2 = 110$.

5. Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul $A(1, 1)$ și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x + y - 1 = 0$.

6. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, cu $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 5$.

Subiectul I

1. E suficient ca $\log_2 3 > 1$. Într-adevăr, $1 = \log_2 2 < \log_2 3$. **2.** $f(1) = 3 - 1 = 2$, $f(f(1)) = f(2) = 6 - 1 = 5$.

3. Notăm $2^x = t$, $t > 0$. Ecuația se scrie $t^2 + t - 72 = 0$, cu soluțiile $t_1 = 8$ și $t_2 = -9$. Cum $t > 0$, rămâne $2^x = 8$, de unde $x = 3$.

4. Avem $A_n^2 = n(n-1) = 11\cdot 10$. Rezultă $n = 11$.

5. Panta dreptei $x + y - 1 = 0$ este -1, deci panta perpendicularei este 1. Atunci $y - y_A = 1(x - x_A) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow y = x$ este ecuația cerută.

6. Triunghiul e dreptunghic, cu aria $S = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$ și semiperimetrul $p = \frac{12}{2} = 6$, deci $r = \frac{S}{p} = 1$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați σ^2.

b) Arătați că mulțimea $\{\sigma^m \mid m \in \mathbb{N}^*\}$ are 3 elemente.

c) Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sigma^m = \tau^n$. Arătați că 6 divide mn.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ A(n) \middle| A(n) = \begin{pmatrix} 1+n & -n \\ n & 1-n \end{pmatrix}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

a) Arătați că $A(n) \cdot A(m) = A(n+m)$, oricare ar fi $n, m \in \mathbb{Z}$.

b) Demonstrați că M este grup în raport cu înmulțirea matricelor.

c) Arătați că $f : (\mathbb{Z}, +) \to (M, \cdot)$, $f(n) = A(n)$, este izomorfism de grupuri.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) Avem $\sigma^3 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ și deci $\sigma^m = \sigma^{m(\mathrm{mod}_3)}$, adică $M = \{e, \sigma, \sigma^2\}$. Notă: σ, σ^2, e sunt distincte.

c) Observăm că $\tau(2) = 2$, deci $\tau^n(2) = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\sigma^m(2) = 2$. Cum $\sigma(2) = 3 \neq 2$, $\sigma^2(2) = 1 \neq 2$ și $e(2) = 2$, deducem că m este multiplu de 3 și apoi $\sigma^m = e$. Cum $\tau^2 = e$, din $\tau^n = e$, deducem că n este par. Așadar 6 divide mn.

2. *a)* $A(n) \cdot A(m) = \begin{pmatrix} 1+n+m & -m-n \\ m+n & 1-n-m \end{pmatrix} = A(n+m)$.

b) Conform punctului anterior, cum $n + m \in \mathbb{Z}$ rezultă că M e parte stabilă a mulțimii $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ față de înmulțire. Operația e asociativă, are elementul neutru $I_2 = A(0) \in M$, iar inversul elementului $A(n)$, unde $n \in \mathbb{Z}$, este $A(-n)$, deoarece $-n \in \mathbb{Z}$ și $A(n) \cdot A(-n) = A(-n)\, A(n) = A(0)$.

c) Scriem $x * y = (x+1)(y+1) - 1$. Pentru $x, y > -1$ avem $x + 1 > 0$, $y + 1 > 0$, deci $(x+1)(y+1) > 0$ și $x * y > -1$, q.e.d.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

a) Calculați derivata funcției f.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(0, 1)$.

c) Determinați asimptotele la graficul funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n definim $I_n = \int_0^1 x^n \sin x \, dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, oricare ar fi $n \geq 1$.

c) Demonstrați că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Arătăm prin inducție că $a_{n+1}-a_n>0$. Avem $a_2=\sqrt{13}>1=a_1$. Cum $a_2-a_1>0$, din

$a_{n+1}-a_n=\sqrt{12+a_n}-\sqrt{12+a_{n-1}}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{\sqrt{12+a_n}+\sqrt{12+a_{n-1}}}$ rezultă cerința.

b) Evident $a_1<4$. Prin inducție, din $a_n\le 4$ deducem $a_{n+1}\le\sqrt{12+4}=4$, ceea ce trebuie arătat.

c) Șirul este convergent conform teoremei lui Weierstrass. Notăm $l=\lim\limits_{x\to\infty}a_n$ și observăm că $l\geq$

deoarece $a_n\ge 0$. Trecând la limită în relația de recurență obținem $l=\sqrt{12+l}\Rightarrow l^2-l-12=0\Rightarrow l$

(cazul $l=-3$ nu convine).

2. *a)* $\int_0^1 e^x f(x)dx=\int_0^1 xdx=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 xe^{-x}dx=\int_2^1 x\cdot(-e^{-x})'dx=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 x'e^{-x}dx=-\dfrac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=-\dfrac{1}{e}+\left(-\dfrac{1}{e}+1\right)=1-\dfrac{2}{e}=\dfrac{e-2}{e}$.

c) Aplicând teorema lui l'Hôspital, obținem $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-x}}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Subiectul I

1. Calculați suma primilor zece termeni ai unei progresii aritmetice ce are primul termen egal cu -10 și rația egală cu 2.

2. Determinați coordonatele vârfului parabolei ce reprezintă graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x-3$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_2(x+1)=-1$.

4. Câte submulțimi ordonate cu 3 elemente are o mulțime cu 4 elemente?

5. Scrieți coordonatele unui punct ce aparțin dreptei de ecuație $x-2y+3=0$.

6. Fie $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\dfrac{3}{5}$. Calculați $\cos a$.

Subiectul I

1. $a_1=-10$, $a_{10}=a_1+9r=-10+18=8$, deci $a_1+a_2+...+a_{10}=\dfrac{a_1+a_{10}}{2}\cdot 10=\dfrac{-10+8}{2}\cdot 10=-10$.

2. $x_V=-\dfrac{1}{2\cdot 2}=-\dfrac{1}{4}$, $y_V=f\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{2}{16}-\dfrac{1}{4}-3=-\dfrac{25}{8}$. **3.** $-1=\log_2(x+1)\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{2}\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

4. Sunt $A_4^3=4\cdot 3\cdot 2=24$ submulțimi. **5.** De exemplu $(1,2)$.

6. Avem $\sin^2 a+\cos^2 a=1\Rightarrow\cos^2 a=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}$. Cum $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, avem $\cos a>0$, deci $\cos a=\dfrac{4}{5}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+2y+z=1 \\ -x+y+z=4 \end{cases}$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile reale ale lui m pentru care $(-2, 1, 1)$ este soluție a sistemului.

b) Calculați determinantul matricei sistemului.

c) Rezolvați sistemul pentru $m = \frac{1}{3}$.

2. Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x = 8$.

b) Arătați că legea „$\circ$" este asociativă.

c) Arătați că dacă $x, y \in (-1, \infty)$, atunci $x \circ y \in (-1, \infty)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* Din prima ecuație avem $-2+1+m=0 \Rightarrow m=1$.

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+m-1+2m-1-1 = 3m-1$.

c) Rangul matricei sistemului este 2, având ca minor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$. Minorul caracteristic este

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, deci sistemul este incompatibil.

2. *a)* $x \circ x = x^2 + 2x$, deci ecuația este $x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -4$.

b) Avem $(x \circ y) \circ z = (x \circ y)z + x \circ y + z = (xy+x+y)z + xy + x + y + z = xyz + xz + yz + xy + x + y + z$ și $x \circ (y \circ z) = x(y \circ z) + x + y \circ z = xyz + yz + xz + xy + x + y + z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, deci operația e asociativă.

c) Scriem $x \circ y = (x+1)(y+1) - 1$. Pentru $x, y > -1$ avem $x+1 > 0$, $y+1 > 0$, deci $(x+1)(y+1) > 0$ și $x \circ y > -1$, q.e.d.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ definit prin $a_1 = 1$ şi $a_{n+1} = \sqrt{12 + a_n}$, $n \geq 1$.

a) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este crescător.

b) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este mărginit superior de 4.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

2. Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-x}$.

a) Calculaţi $\int_0^1 e^x f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Arătăm prin inducţie că $a_{n+1} - a_n > 0$. Avem $a_2 = \sqrt{13} > 1 = a_1$. Cum $a_2 - a_1 > 0$, din $a_{n+1} - a_n = \sqrt{12 + a_n} - \sqrt{12 + a_{n-1}} = \dfrac{a_n - a_{n-1}}{\sqrt{12 + a_n} + \sqrt{12 + a_{n-1}}}$ rezultă cerinţa.

b) Evident $a_1 < 4$. Prin inducţie, din $a_n \leq 4$ deducem $a_{n+1} \leq \sqrt{12+4} = 4$, ceea ce trebuie arătat.

c) Şirul este convergent conform teoremei lui Weierstrass. Notăm $l = \lim\limits_{x\to\infty} a_n$ şi observăm că $l \geq 0$, deoarece $a_n \geq 0$. Trecând la limită în relaţia de recurenţă obţinem $l = \sqrt{12 + l} \Rightarrow l^2 - l - 12 = 0 \Rightarrow l = 4$ (cazul $l = -3$ nu convine).

2. *a)* $\int_0^1 e^x f(x)dx = \int_0^1 xdx = \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \dfrac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 xe^{-x}dx = \int_2^1 x \cdot (-e^{-x})'dx = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 x'e^{-x}dx = -\dfrac{1}{e} - e^{-x}\Big|_0^1 = -\dfrac{1}{e} + \left(-\dfrac{1}{e} + 1\right) = 1 - \dfrac{2}{e} = \dfrac{e-2}{e}$.

c) Aplicând teorema lui l'Hôspital, obţinem $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Subiectul I

1. Calculaţi $(1 + \sqrt[3]{2})(1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})$.

2. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2 + 3x$. Calculaţi $f(-10) + f(-9) + \ldots + f(9) + f(10)$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $8^{x+1} = 4^{1-x}$.

4. Rezolvaţi în mulţimea $[0, 2\pi)$ ecuaţia $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Arătaţi că vectorii $\vec{v}_1 = \vec{i} + 8\vec{j}$ şi $\vec{v}_2 = 4\vec{i} - 7\vec{j}$ au module egale.

6. Calculaţi perimetrul triunghiului ABC, ştiind că $A = 120°$, $AB = 3$ şi $AC = 7$.

Subiectul I

1. Avem $1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{8}=1+\sqrt[3]{8}=1+2=3$.

2. $f(-10)+f(-9)+...+f(9)+f(10)=-28-25+...+\,+29+32$. Suma are 21 de termeni în progresie aritmetică (de rație 3), deci este egală cu $\frac{-28+32}{2}\cdot 21=2\cdot 21=42$.

3. Avem $2^{3(x+1)}=2^{2(1-x)} \Leftrightarrow 3x+3=2-2x \Leftrightarrow 5x=-1$, deci $x=-1/5$.

4. Avem soluțiile $x_1=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$ și $x_2=\pi-x_1=\frac{2\pi}{3}$.

5. $|\vec{v}_1|=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}$; $|\vec{v}_2|=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$, de unde rezultă cerința.

6. $BC^2=3^2+7^2-2\cdot 3\cdot 7\cdot\cos 120^\circ=9+49+2\cdot 21\cdot\frac{1}{2}=79$, deci perimetrul este $10+\sqrt{79}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\operatorname{rang}A+\operatorname{rang}B=3$.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\det(A+xB)=0$.

c) Arătați că $(A+B)^n=A^n+B^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Polinomul $f=X^3-X-1\in\mathbb{C}[X]$ are rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3.

a) Aflați restul împărțirii lui f la polinomul X^2-1.

b) Calculați $x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

c) Arătați că $f(x_1+x_2)=-2$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det A=0$, $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}=3\neq 0$, deci $\operatorname{rang}A=2$; $\operatorname{rang}B=1$, deoarece toți minorii de ordin 2 sunt nuli și $B\neq O_2$. Cerința rezultă.

b) $\det(A+xB)=\begin{vmatrix}x-2&x+1&x+1\\x+1&x-2&x+1\\x+1&x+1&x-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-2&x+1&x+1\\x+1&x-2&x+1\\3x&3x&3x\end{vmatrix}=3x\begin{vmatrix}x-2&x+1&x+1\\x+1&x-2&x+1\\1&1&1\end{vmatrix}=$

$=3x\begin{vmatrix}-3&0&x+1\\0&-3&x+1\\0&0&1\end{vmatrix}=27x$; (am adunat liniile la ultima linie; am dat factor comun și am scăzut ultima coloană din precedentele două). Obținem $x=0$.

c) Avem $AB=O_3=BA$, deci matricele comută. Cu binomul lui Newton, $(A+B)^n=$
$=A^n+C_n^1A^{n-1}B+\ldots+C_n^{n-1}AB^{n-1}+B^n=A^n+B^n$, termenii intermediari fiind nuli.

2. *a)* $f=X(X^2-1)-1$, deci restul împărțirii lui f la X^2-1 este polinomul $r=-1$.

b) Dacă x_k este rădăcină a polinomului f, $k=1,2,3$, atunci $x_k^3-x_k-1=0\Leftrightarrow x_k^3=x_k+1$, de unde rezultă că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_1+x_2+x_3+3=3$.

c) $f(x_1+x_2)=f(-x_3)=-x_3^3+x_3-1=-(x_3^3-x_3-1)-2=-f(x_3)-2=-2$.

Subiectul al III-lea

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+1)$.

a) Calculați derivata funcției f.

b) Arătați că funcția f este convexă.

c) Demonstrați că $f(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-1,\infty)$.

2. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x}$.

a) Calculați $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Calculați $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x^2)\,\mathrm{d}x$.

c) Determinați valorile lui $a\in(1,\infty)$ pentru care $\displaystyle\int_{1/a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x=-1$.

1. *a)* $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. *b)* $f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$, $\forall x>-1$, deci f este convexă.

c) Funcția f' este strict crescătoare, deoarece $f''>0$. Cum $f'(0)=0$, rezultă tabelul de variație:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-$	0	$+\,+\,+\,+\,+\,+\,+\,+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Deoarece $f(0)=0$, rezultă $f(x)\geq 0$, $\forall x>-1$.

2. *a)* $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(x+1)\Big|_1^2-\ln x\Big|_1^2=\ln 3-\ln 2-\ln 2+\ln 1=\ln 3-\ln 4=\ln\frac{3}{4}$.

b) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} f(x^2)\,\mathrm{d}x=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x-\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\operatorname{arctg}x\Big|_1^{\sqrt{3}}+\frac{1}{x}\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{\sqrt{3}}-1=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{\sqrt{3}}-1$.

c) $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} f(x)dx=\ln(x+1)\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}-\ln x\Big|_{\frac{1}{a}}^{a}=\ln(a+1)-\ln\frac{1+a}{a}-\ln a+\ln\frac{1}{a}=\ln a-\ln a-\ln a=-\ln a$. Rezultă $\ln a=1$, deci $a=e$.

Subiectul I

1. Calculați partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}$.

2. Determinați valorile reale ale numărului m știind că abscisa vârfului parabolei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+mx+1$, este egală cu 2.

3. Rezolvați ecuația $\sin x=-1$ în mulțimea numerelor reale.

4. Determinați termenul din mijloc al dezvoltării $\left(1+\sqrt[3]{2}\right)^6$.

5. Calculați lungimea vectorului $\vec{v}_1-\vec{v}_2$, unde $\vec{v}_1=\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v}_2=2\vec{i}-3\vec{j}$.

6. Fie $a\in\mathbb{R}$, cu $\sin a=0{,}6$. Calculați $\operatorname{tg}^2 a$.

Subiectul I

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-4}=-\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\in(-2,-1)$, deci $\left[\dfrac{1}{\sqrt{2}-2}\right]=-2$. **2.** $x_V=-\dfrac{m}{2}\Rightarrow-\dfrac{m}{2}=2\Rightarrow m=-4$.

3. $x=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** Sunt 7 termeni, cel din mijloc este $T_4=C_6^3\cdot 1^3(\sqrt[3]{2})^3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3}\cdot 2=40$.

5. $\vec{v}_1-\vec{v}_2=-\vec{i}+2\vec{j}$; $\left|\vec{v}_1-\vec{v}_2\right|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$. **6.** $\operatorname{tg}^2 a=\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a}=\dfrac{\sin^2 a}{1-\sin^2 a}=\dfrac{0{,}36}{0{,}64}=\dfrac{9}{16}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Determinați rangul matricei A^2.

b) Arătați că inversa matricei $I_3 - A$ este $I_3 + A + A^2$.

c) Calculați inversa matricei $I_3 + A$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, considerăm polinomul $f_n = X^{2n} + X^n + 1 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Determinați rădăcinile complexe ale polinomului f_1.

b) Aflați câtul împărțirii polinomului f_2 la polinomul f_1.

c) Calculați suma pătratelor rădăcinilor lui f_3.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\text{rang}A^2 = 1$.

b) Avem $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2) = I_3 + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I_3 - A^3 = I_3$, deoarece $A^3 = O_3$.

c) Inversa matricei $I_3 + A$ este $I_3 - A + A^2$, deoarece $(I_3 + A)(I_3 - A + A^2) = I_3 + A^3 = I_3$.

2. *a)* $f_1 = X^2 + X + 1$. Avem $\Delta = -3$ și $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

b) $f_2 = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) = f_1(X^2 - X + 1)$. Câtul este $X^2 - X + 1$.

c) f_1 divide $f_n \Leftrightarrow f_n(x_1) = 0$, deoarece $f_n \in \mathbb{R}[X]$ și $x_2 = \overline{x_1}$. Cum $x_1^3 = 1$, avem:

$$f_n(x_1) = x_1^{2n} + x_1^n + 1 = \begin{cases} x_1^2 + x_1 + 1 = 0, & \text{dacă } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ x_1 + x_1^2 + 1 = 0, & \text{dacă } n = 3k+1,\ k \in \mathbb{N} \\ 1 + 1 + 1 \neq 0, & \text{dacă 3 divide } n \end{cases}$$

Cerința este demonstrată.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm șirul $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$.

a) Arătați că $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} \geq \dfrac{1}{2}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

b) Arătați că $a_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$, oricare ar fi $n \geq 1$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

a) Scrieți o primitivă a funcției f.

b) Calculați $\int_0^1 x f(x)\,dx$.

c) Calculați $\int_0^1 x^3 f'(x)\,dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a* $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} = \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}$. Ultima sumă are 2^n termeni, fiecare mai mare decât $\frac{1}{2^{n+1}}$, deci $a_{2^{n+1}} - a_{2^n} \geq 2^n \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 1$.

b) $a_{2^n} = \left(a_{2^n} - a_{2^{n-1}}\right)+\left(a_{2^{n-1}} - a_{2^{n-2}}\right)+\ldots+\left(a_{2^2} - a_{2^1}\right)+a_2 \geq \underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2}}_{n-1\text{ ori}}+1+\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$, $\forall n \geq 1$.

c) Avem $n = 2^{\log_2 n} \geq 2^{[\log_2 n]}$, deci $a_n \geq a_{2^{[\log_2 n]}} \geq 1+\frac{[\log_2 n]}{2} \geq 1+\frac{\log_2 n - 1}{2} = \frac{1+\log_2 n}{2}$, $\forall n \geq 4$, deoarece șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \log_2 n = \infty$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

2. *a)* De exemplu $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \operatorname{arctg} x$.

b) $\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \operatorname{arctg} x \, dx = \frac{x^2}{2}\operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 = \frac{\pi-2}{4}$.

c) $\int_0^1 x^3 f'(x)\, dx = x^3 f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x^3)' f(x)\, dx = \frac{1}{2} - 3\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2} - 3\,(1-\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = \frac{3\pi-10}{4}$

Subiectul I

1. Arătați că $100^{\lg 7} \in \mathbb{N}$.

2. Determinați punctul de maxim al funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

3. Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 1$ este injectivă.

4. Câte diagonale are un poligon convex cu 10 laturi?

5. Calculați distanța de la punctul $A(1, 1)$ la dreapta determinată de punctele $B(2, 3)$ și $C(-1, 5)$.

6. Calculați raza cercului circumscris unui triunghi ABC, cu $AB = 5$ și $m(\sphericalangle C) = 120°$.

Subiectul I

1. Avem $10^{\lg 7} = 7$, deci $100^{\lg 7} = (10^{\lg 7})^2 = 49 \in \mathbb{N}$. **2.** Punctul de maxim este abscisa vârfului $x_V = -\frac{2}{2(-1)} = 1$. **3.** $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x^3 + 1 = y^3 + 1 \Leftrightarrow x^3 - y^3 = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y$ sau $x^2 + xy + y^2 = 0$. Cum $x^2 + xy + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2(x+y)^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$, rezultă cerința. Alternativ, $f'(x) = 3x^2 \geq 0$, deci f strict crescătoare. **4.** $C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35$.

5. $BC : \frac{y-3}{x-2} = \frac{5-3}{-1-2} \Leftrightarrow \Leftrightarrow 2x + 3y - 13 = 0$. Distanța este $\frac{|3\cdot 1 + 2\cdot 1 - 13|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$.

6. $2R = \frac{AB}{\sin C} = \frac{10}{\sqrt{3}} \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A$.
b) Calculați $\operatorname{rang} B$.
c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $XA = B$.

2. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât rădăcinile $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ ale polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX - 1$ verifică $|z_1| \geq 1, |z_2| \geq 1, |z_3| \geq 1$.
a) Calculați $z_1z_2z_3$.
b) Arătați că $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.
c) Demonstrați că $a + b = 0$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det A = 1$. *b)* $B \neq O_{2,3}$ și liniile lui B sunt proporționale $\Rightarrow \operatorname{rang} B = 1$.

c) Avem $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$, deci $X = BA^{-1} = \begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}$.

2. *a)* $z_1z_2z_3 = -(-1) = 1$.
b) Cum $|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_3| = 1$ și $|z_1|, |z_2|, |z_3| \geq 1$, rezultă $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.
c) Coeficienții monoamelor de grad 5 și 4 sunt 0, deci suma cerută este 0.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-x\ln x}{x}$.

a) Calculați derivata funcției f.
b) Calculați $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x)$.
c) Demonstrați că există un unic punct $c \in (0, \infty)$, cu proprietatea că $c\ln c = 1$.

2. Fie funcția $f:(-2,2)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

a) Calculați $\int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

b) Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot \arcsin\dfrac{x}{2}\, dx$.

c) Arătați că $\int_{-1}^0 f(x^2)\, dx = \int_0^1 f(x^2)\, dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$. *b)* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \ln x\right) = \infty + \infty = \infty$.

c) Deoarece $f' < 0$, funcția este strict descrescătoare, deci injectivă. Cum $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \infty$, din continuitatea lui f rezultă că imaginea funcției este $\mathbb{R}$, deci funcția f este surjectivă. Ca urmare, există un unic $c \in (0,\infty)$ astfel încât $f(c) = 0 \Leftrightarrow c \cdot \ln c = 1$.

2. *a)* $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = -\sqrt{4-x^2}\,\Big|_0^1 = -\sqrt{3} + 2$.

b) $\int_0^1 f(x)\cdot \arcsin\frac{x}{2}\,dx = \int_0^1 \left(\arcsin\frac{x}{2}\right)' \cdot \arcsin\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin^2\frac{x}{2}\,\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 = \frac{\pi^2}{72}$.

c) Cu schimbarea de variabilă $t = -x$, $dt = -dx$, avem $\int_{-1}^0 f(x^2)\,dx = -\int_1^0 f((-t)^2)\,dt = \int_0^1 f(t^2)\,dt$.

Subiectul I

1. Determinați $z \in \mathbb{C}$ știind că $z + 2\overline{z} = 9i$.

2. Arătați că dreapta de ecuație $y = x + 1$ intersectează parabola de ecuație $y = x^2 - 3x + 2$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $(1+\sqrt{2})^x = 3 + 2\sqrt{2}$.

4. Considerăm mulțimea $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii M, aceasta să aibă 3 elemente.

5. Considerăm punctele $A(1, 2)$, $B(0, 1)$ și $G(-1, 2)$. Aflați coordonatele punctului C știind că G e centrul de greutate al triunghiului ABC.

6. Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{1}{2}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul I

1. Fie $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Avem $a + bi + 2(a - bi) = 9i \Leftrightarrow 3a = 0$ și $-b = 9 \Leftrightarrow a = 0, b = -9$, deci $z = -9i$.
2. $x^2 - 3x + 2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$. Cum $\Delta = 16 - 4 = 12 > 0$, rezultă cerința.
3. $3 + 2\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^2$, deci $x = 2$. **4.** Sunt $2^5 = 32$ submulțimi ale lui M și $C_5^3 = 10$ cu 3 elemente. Probabilitatea este $\frac{10}{32} = \frac{5}{16}$. **5.** $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \Rightarrow x_C = -4$; $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \Rightarrow y_C = 3$.

6. $\operatorname{tg}\left(a + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} \pi/3}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} \pi/3} = \frac{\frac{1}{2} + \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 8 + 5\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det(A + {}^tA)$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A.

b) Arătați că $A^2 - A = I_2$.

c) Fie $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, cu $AB = BA$. Arătați că $\operatorname{rang} B \neq 1$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție periodică și mulțimea $M = \{t \in \mathbb{R} \mid f(x+t) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătați că dacă $t \in M$, atunci $-t \in M$.

b) Arătați că M e subgrup al grupului $(\mathbb{R}, +)$.

c) Dați exemplu de funcție periodică f pentru care $M = \mathbb{Z}$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A + {}^tA) = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$. *b)* $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

c) Fie $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; avem $AB = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a & b \end{pmatrix}$ și $BA = \begin{pmatrix} a+b & a \\ c+d & c \end{pmatrix}$, deci $b = c$ și $a = b + d$. Atunci $B = \begin{pmatrix} b+d & b \\ b & d \end{pmatrix}$ și $\det B = d^2 + bd - b^2$. Dacă $\det B = 0$, arătăm că $b = d = 0$, adică $B = O_2$. Presupunem că $d^2 - db - b^2 = 0$. Ca ecuație în d, discriminantul este $\Delta = 5b^2$, deci $d = \frac{b \pm \sqrt{5} \cdot b}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot b$. Cum $b, d \in \mathbb{Q}$, deducem $b = d = 0$. În concluzie $\operatorname{rang} B \neq 1$.

2. *a)* Fie $t \in M$ și $x \in \mathbb{R}$. Avem $f(x-t) = f((x-t)+t) = f(x)$, deci $-t \in M$.

b) Fie $t_1, t_2 \in M$ și $x \in \mathbb{R}$. Din $f(x) = f(x + t_1) = f(x + t_1 - t_2)$ rezultă $t_1 - t_2 \in M$, deci $M \leq (\mathbb{R}, +)$.

c) De exemplu, funcția parte fracționară.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\operatorname{arctg} x$.

a) Calculați $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1}$.

b) Calculați derivata funcției f.

c) Determinați asimptota la graficul funcției f către ∞.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$.

a) Calculați $\int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

b) Calculați $\int_0^1 x\, f(x^2)\, dx$.

c) Demonstrați că șirul $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2 + 4n^2}$, $n \geq 1$, este convergent.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2 + x + 1} = \frac{\pi/4}{3} = \frac{\pi}{12}$. *b)* $f'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x-1}{x^2+1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{x-1}{x} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ și $\lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) - \frac{\pi}{2}$ -

Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg} x-\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=-1$, rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\dfrac{\pi}{2}x\right)=-1-\dfrac{\pi}{2}$,

deci dreapta de ecuație $y=\dfrac{\pi}{2}x-1-\dfrac{\pi}{2}$ este asimptota oblică a graficului către $+\infty$.

2. *a)* $\int_0^1\dfrac{x^2}{x^2+4}\,dx=\int_0^1\left(1-\dfrac{4}{x^2+4}\right)dx=1-4\cdot\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\Big|_0^1=1-2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}$.

b) $\int_0^1\dfrac{x^3}{x^4+2}\,dx=\dfrac{1}{4}\int_0^1\dfrac{(x^4+2)'}{x^4+2}\,dx=\dfrac{1}{4}\ln(x^4+2)\Big|_0^1=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{2}$.

c) $a_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\dfrac{k}{n}}{\left(\dfrac{k}{n}\right)^2+4}=\sigma(f,\Delta_n,\xi)$, adică suma Riemann asociată funcției $f:[0,1]\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$,

diviziunii $\Delta_n=\left(0<\dfrac{1}{n}<\dfrac{2}{n}<\ldots<\dfrac{n}{n}=1\right)$ și sistemului de puncte intermediare $\xi_k^n=\dfrac{k}{n}$, $k=\overline{1,n}$. Așadar

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\int_0^1 f(x)\,dx$, deci șirul e convergent.

Subiectul I

1. O progresie geometrică de numere reale are al doilea termen egal cu 2 și al cincilea termen egal cu 16. Calculați rația progresiei.

2. Calculați $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}$ știind că $p+q=6$ și $pq=3$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

4. Determinați numărul submulțimilor cu cel mult 3 elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$, ce conțin cel puțin un număr impar.

5. Fie ABC un triunghi echilateral de latură 4. Calculați $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

6. Fie $a\in\mathbb{R}$, cu $\operatorname{tg} a=\dfrac{1}{3}$. Calculați $\sin^2 a$.

Subiectul I

1. $a_2=2, a_5=16, \Rightarrow q^3=\dfrac{a_5}{a_2}=8\Rightarrow q=2$. **2.** $\dfrac{p}{q}+\dfrac{q}{p}=\dfrac{p^2+q^2}{pq}=\dfrac{(p+q)^2-2pq}{pq}=\dfrac{36-6}{3}=10$.

3. $x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **4.** Sunt $2^6=64$ de submulțimi. Nu convin cele formate doar cu numere pare, și anume submulțimile mulțimii $\{2,4,6\}$. Acestea sunt $2^3=8$, deci rămân $64-8=56$ de submulțimi. **5.** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot4\cdot\cos\widehat{BAC}=16\cdot\cos 60^\circ=16\cdot\dfrac{1}{2}=8$.

6. Avem $\sin^2 a=\dfrac{\sin^2 a}{\sin^2 a+\cos^2 a}=\dfrac{\operatorname{tg}^2 a}{1+\operatorname{tg}^2 a}=\dfrac{1/9}{1+1/9}=\dfrac{1}{10}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.

a) Calculați rang$A$.

b) Arătați că $A^n=14^{n-1}A$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Arătați că inversa matricei I_3-A este $I_3-\frac{1}{13}A$.

2. Considerăm polinomul $f=X^3+X^2+aX+b\in\mathbb{Z}[X]$.

a) Aflați valorile întregi ale lui a știind că $\sqrt{2}$ este rădăcină a polinomului f.

b) Aflați valorile întregi ale lui a și b pentru care f admite rădăcina dublă 1.

c) Demonstrați că nu există $a, b\in\mathbb{Z}$ astfel încât f să aibă o rădăcină triplă.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $A\neq O_3$ și liniile lui A sunt proporționale $\Rightarrow$ rang$A=1$.

b) Avem $A^2=14A$. Prin inducție, $A^{n+1}=A^n\cdot A=(14^{n-1}A)A=14^{n-1}A^2=14^{n-1}\cdot 14A=14A^n$.

c) Deoarece $(I_3-A)\left(I_3-\frac{1}{13}A\right)=I_3-A-\frac{1}{13}A+\frac{1}{13}A^2=I_3-A-\frac{1}{13}A+\frac{14}{13}A=I_3$, concluzia rezultă.

2. *a)* $f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2+a\sqrt{2}+b=(b+2)+(a+2)\sqrt{2}=0$. Dar $a,b\in\mathbb{Z}$ și $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, deci $a=b=-2$.

b) $f(1)=0\Rightarrow 2+a+b=0$, $f'=3x^2+2x+a$, deci $f'(1)=0\Rightarrow 5+a=0$. Obținem $a=-5$ și $b=3$.

c) Dacă r este rădăcină triplă, din $x_1+x_2+x_3=-1$ rezultă $r=-\frac{1}{3}$. Atunci $b=-x_1x_2x_3=\frac{1}{27}\notin\mathbb{Z}$, contradicție cu $b\in\mathbb{Z}$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln^2x-\ln x+x$.

a) Calculați $f'(1)$.

b) Rezolvați ecuația $f''(x)=0$, $x\in(0,\infty)$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Pentru fiecare număr $n\in\mathbb{N}^*$ definim $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{(x+1)^2}\,dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

1. *a)* $f'(x)=2\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+1=\frac{2\ln x-1}{x}+1$, deci $f'(1)=0$.

b) Avem $f''(x)=\dfrac{\frac{2}{x}\cdot x-(2\ln x-1)}{x^2}=\dfrac{3-2\ln x}{x^2}$ şi $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=e^{3/2}$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\ln x-1}{x}=1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=1$. Studiem tabloul de variaţie al funcţiei f':

x	0		1		$e^{3/2}$		$+\infty$
$f''(x)$	+ +	+ + + +	+ + +	+ +	0	− − − −	− −
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	(max)	↘	1

şi respectiv, tabloul de variaţie al funcţiei f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	− −	− − −	0	+ + +	+ +
$f(x)$	$-\infty$	↘	0	↗	1

Aşadar, $x=1$ este singurul punct de extrem (minim) al funcţiei f.

2. *a)* $I_1=\int_0^1\dfrac{x}{(x+1)^2}\,dx=\int_1^2\dfrac{t-1}{t^2}\,dt=\left(\ln t+\dfrac{1}{t}\right)\Big|_1^2=\ln 2+\dfrac{1}{2}-1=\ln 2-\dfrac{1}{2}$, cu schimbare de variabile $t=x+1$, $dt=dx$.

b) $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx=\int_0^1 x^n\,dx=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Avem $I_n\geq 0$, deoarece $\dfrac{x^n}{(x+1)^2}\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$ şi $n\geq 1$. Atunci $0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+1}$, de unde $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$.

Subiectul I

1. Determinaţi partea reală a numărului complex $z=\dfrac{1+i}{1-i}$.

2. Fie $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ rădăcinile ecuaţiei $x^2-5x+2=0$. Calculaţi $x_1+x_2-x_1x_2$.

3. Arătaţi că funcţia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$, este injectivă.

4. Arătaţi că $C_{100}^{50}=2\,C_{99}^{50}$.

5. Fie $ABCD$ un pătrat de latură $\sqrt{2}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}$.

6. Fie $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$, cu $\sin x=\dfrac{1}{2}$. Calculaţi tg $2x$.

Subiectul I

1. $z=\dfrac{(1+i)^2}{1-i^2}=\dfrac{1-2i-1}{2}=i$, deci $\operatorname{Re} z=0$. **2.** $x_1+x_2=5$, $x_1x_2=2$, deci $x_1+x_2-x_1x_2=3$.

3. $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x^2+x=y^2+y\Leftrightarrow(x_1-y)(x+y+1)=0\Leftrightarrow x=y$, deoarece $x+y+1>0$ pentru orice $x, y\in[0,1]$. **4.** $C_{100}^{50}=\dfrac{100!}{50!\cdot 50!}$; $2C_{99}^{50}=2\cdot\dfrac{99!}{49!\cdot 50!}=\dfrac{100}{50}\cdot\dfrac{99!}{49!\cdot 50!}=\dfrac{100!}{50!\cdot 50!}$, ceea ce trebuia arătat.

5. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DB}|=DB=2$. **6.** Avem $x=\dfrac{5\pi}{6}$, deci $\operatorname{tg}2x=\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(2\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm numerele distincte $a, b, c \in \mathbb{R}$ și sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^3 \\ x + by + b^2 z = b^3 \\ x + cy + c^2 z = c^3 \end{cases}.$$

a) Arătați că determinantul sistemului este egal cu $(c - a)(c - b)(b - a)$.
b) Arătați că sistemul este compatibil determinat.
c) Rezolvați sistemul.

2. Considerăm inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$.

a) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuația $\hat{2}x = \hat{6}$.

b) Rezolvați în $\mathbb{Z}_{12}$ ecuația $x^2 = \hat{1}$.

c) Arătați că dacă $x \in \mathbb{Z}_{12}$ verifică $x^{11} = \hat{1}$, atunci $x = \hat{1}$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$

b) Deoarece a, b, c sunt distincte, rezultă că numerele $b - a$, $c - a$ și $c - b$ sunt nenule și deci $\Delta \neq 0$. Cerința rezultă din teorema lui Cramer.

c) Polinomul $f(t) = x + ty + t^2 z - t^3$ are rădăcinile distincte a, b, c. Din relațiile lui Viète rezultă $z = a + b + c$, $y = -ab - bc - ca$, $x = abc$.

2. *a)* Avem soluțiile $x = \hat{3}$ și $x = \hat{9}$.

b) Dacă $x^2 = \hat{1}$, atunci $x \in U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\hat{1}, \hat{5}, \hat{7}, \hat{9}\}$. Toate cele 4 numere verifică ecuația.

c) Dacă $x^{11} = \hat{1}$, atunci $x \in U(\mathbb{Z}_{12})$, deci $x^2 = \hat{1}$. Atunci $x^{10} = \hat{1}$, deci $x^{11} = \hat{1} \Leftrightarrow x^{10} \cdot x = \hat{1} \Leftrightarrow x = \hat{1}$.

Subiectul al III-lea

1. Fie $m \in \mathbb{R}$ și funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{mx}{x^2 + 1}$.

a) Determinați asimptotele graficului funcției f.
b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care $f'(0) = 1$.
c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $|f(x)| \leq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Considerăm funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + e^x$, și $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

a) Calculați $F(1)$.
b) Arătați că funcția F este inversabilă.
c) Calculați $\displaystyle\int_0^{e - \frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Funcţia f e continuă, deci nu are asimptote verticale, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, deci dreapta $y=0$ este asimptotă orizontală a graficului spre $\pm\infty$.

b) $f'(x)=m\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, deci $f'(0)=m$. Rezultă $m=1$.

c) Avem $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Pentru $m>0$, alcătuim tabloul de variaţie al funcţiei f:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	$- -$	$- -$ $-$	0	$+ +$ $+$	0	$- -$ $-$	$- -$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{m}{2}$	$\nearrow$	$\frac{m}{2}$	$\searrow$	0

Din tabel, deducem că $|f(x)|\le\dfrac{|m|}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$, deci valorile căutate sunt $m\in[-2, 2]$.

2. *a)* $F(1)=\int\limits_0^1 f(t)\,dt=\left(\dfrac{t^3}{3}+e^t\right)\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}+e-1=e-\dfrac{2}{3}$.

b) Avem $F(x)=\left(\dfrac{t^2}{2}+e^t\right)\Big|_0^x=e^x+\dfrac{x^3}{3}-1$. $F'=f>0$, deci F este strict crescătoare; $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty$, deci $F(\mathbb{R})=\mathbb{R}$. Funcţia F este injectivă şi surjectivă, deci este inversabilă.

c) Cu schimbarea de variabilă $t=F^{-1}(x)$ avem $x=F(t)$, $dx=f(t)\,dt$, $F^{-1}(0)=0$ şi $F^{-1}\left(e-\dfrac{2}{3}\right)=1$, deci

$$\int\limits_0^{e-\frac{2}{3}} F^{-1}(x)\,dx=\int\limits_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}\left(e-\frac{2}{3}\right)} t f(t)\,dt=\int_0^1 t f(t)\,dt=\int_0^1 t^3\,dt+\int_0^1 te^t\,dt=\frac{1}{4}+te^t\Big|_0^1-\int_0^1 e^t\,dt=\frac{1}{4}+e-e^t\Big|_0^1=\frac{5}{4}.$$

Subiectul I

1. Ordonaţi crescător numerele $\sqrt[3]{64}$, $\lg 100$ şi $\sqrt{17}$.

2. Arătaţi că $4x^2+3x+1>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\operatorname{arctg}(x+1)=\dfrac{\pi}{4}$.

4. Determinaţi $n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, ştiind că $n+135=C_n^2$.

5. Arătaţi că unghiul făcut de vectorii $\vec{u}=\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}$ este obtuz.

6. În triunghiul ABC avem $AB=5$, $BC=6$, $CA=7$. Calculaţi lungimea medianei din A.

Subiectul I

1. $\sqrt[3]{64}=4$, $\lg 100=2$ şi $\sqrt{17}>\sqrt{16}=4$, deci $\lg 100<\sqrt[3]{64}<\sqrt{17}$.

2. $\Delta=3^2-4\cdot 4<0$, deci $4x^2+3x+1>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. **3.** $x+1=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow x+1=1\Rightarrow x=0$.

4. $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$, deci $2n+270=n^2-n\Leftrightarrow n(n-3)=18\cdot 15$, de unde $n=18$.

5. $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\cdot 2-3\cdot 1=-1<0$, deci unghiul vectorilor este obtuz.

6. $m_a^2=\dfrac{AB^2+AC^2}{2}-\dfrac{BC^2}{4}=\dfrac{25+49}{2}-\dfrac{36}{4}=37-9=28$, deci $m_a=2\sqrt{7}$.

Subiectul al II-lea

1. Pentru fiecare număr real x considerăm matricea $A(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați $\det A(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Determinați inversa matricei $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Considerăm polinomul cu coeficienți reali $f = 2X^3 + X^2 - 13X + m$, având rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Rezolvați ecuația pentru $m = 0$.

b) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că $x_1x_2 = 1$.

HAI

1. *a)* $\det A(x) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

b) $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} \cos x\cos y - \sin x\sin y & -\sin y\cos x - \sin x\cos y & 0 \\ \sin y\cos x + \sin x\cos y & \cos x\cos y - \sin x\sin y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(x+y)$.

c) Cum $A(x) \cdot A(-x) = A(x-x) = A(0) = I_3$, atunci $(A(x))^{-1} = A(-x)$, $x \in \mathbb{R}$, deci $\left(A\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-1} = A\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. *a)* Ecuația se scrie $x(2x^2 + x - 13) = 0$. Rezultă $x_1 = 0$ și $2x^2 + x - 13 = 0$; $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{105}}{4}$.

b) $m_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{-13}{2} = \frac{1}{4} + 13 = \frac{53}{4}$.

c) Cum $x_1x_2x_3 = -\frac{m}{2}$, rezultă $x_3 = -\frac{m}{2}$, de unde $-\frac{m^3}{4} + \frac{m^2}{4} + \frac{13m}{2} + m = 0$, adică $-m^3 + m^2 + 30m = 0$. Obținem $m_1 = 0$ sau $m^2 - m - 30 = 0$, de unde $m_2 = -5$ și $m_3 = 6$. Cazul $m = 0$ nu convine, conform lui a). Dacă $m = -5$, avem $x_3 = -\frac{5}{2}$ și $2x^3 + x^2 - 13x - 5 = (2x - 5)(x^2 + 3x + 1)$, rădăcinile polinomului $x^2 + 3x + 1$ satisfac $x_1x_2 = 1$. Dacă $m = 6$, avem $x_3 = -3$ și $2x^3 + x^2 - 13x - 5 = (x+3)(2x^2 - 5x + 2)$, cu aceeași remarcă.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\frac{1+x}{x}$.

a) Arătați că funcția este strict monotonă.

b) Determinați asimptotele graficului funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}(f(1) + f(2) + \ldots + f(n))$.

2. Fie funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x$.

a) Calculați $\int_1^e f(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Calculați $\int_1^e e^x(f(x) + f'(x))\,\mathrm{d}x$.

c) Arătați că $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = -1$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* Avem $f'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} < 0, \forall x > 0$, deci f este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$.

b) Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală, deoarece $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, iar dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală, întrucât $\lim_{x\downarrow 0} f(x) = +\infty$. Fiind continuă pe $(0, \infty)$, f nu admite alte asimptote verticale.

c) $f(1) + f(2) + ... + f(n) = \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot ... \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\left(f(1) + f(2) + ... + f(n)\right) = \infty$

.

2. *a)* $\int_1^e \ln x \, dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x(\ln x)' \, dx = e - \int_1^e dx = e - (e-1) = 1$.

b) $\int_1^e e^x f'(x) \, dx = e^x f(x) \Big|_1^e - \int_1^e (e^x)' f(x) \, dx = e^e - \int_1^e e^x f(x) \, dx \Rightarrow \int_1^e e^x (f(x) + f'(x)) \, dx = e^e$.

c) $\int_t^1 f(x) \, dx = x \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 dx = -t \ln t - (1-t) = -1 + t - t \ln t$. Cum $\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t \ln t = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\ln t}{\frac{1}{t}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$,

rezultă $\lim_{t\downarrow 0}(-1 + t - t \ln t) = -1$.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z = -3 + 4i$.

2. Aflați punctele de intersecție ale graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, cu axa Ox.

3. Rezolvați ecuația $\log_5 x = \log_{25} 2x$.

4. Calculați $C_7^3 - A_6^2$.

5. Aflați $a \in \mathbb{R}$ știind că dreptele $d_1 : x - 2y = 0$ și $d_2 : ax + y + 5 = 0$ sunt paralele.

6. Fie $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\sin x + \cos x = 1$. Calculați $\sin 2x$.

Subiectul I

1. $|z| = \sqrt{9+16} = 5$. **2.** Rezolvăm ecuația $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ și $x_2 = 2$. Punctele de intersecție sunt $A(1, 0)$ și $B(2, 0)$. **3.** Avem $\log_{25} 2x = \frac{\log_5 2x}{\log_5 25} = \frac{1}{2}\log_5 2x$, deci ecuația se scrie: $2\log_5 x = \log_5 2x \Leftrightarrow \log_5 x^2 = \log_5 2x \Leftrightarrow x^2 = 2x$, deci $x = 2$, ținând cont că $x > 0$. **4.** $C_7^3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$; $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30 \Rightarrow C_7^3 - A_6^2 = 5$. **5.** Panta dreptei d_1 este $m_1 = 1/2$. Panta dreptei d_2 este $m_2 = -a$. Din $m_1 = m_2$ obținem $a = -\frac{1}{2}$. **6.** Din $\sin x + \cos x = 1$ rezultă $\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$.

a) Calculați $\det A$.

b) Determinați valorile lui $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $\operatorname{rang}A=2$.

c) Calculați A^{-1} pentru $a=0$.

2. Considerăm polinomul $f=X^4+X^2-X+1\in\mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.

a) Calculați restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2$.

b) Calculați $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$.

c) Arătați că polinomul f nu are nicio rădăcină reală.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det A=3(1-a)$. *b)* Pentru $a\neq 1$, $\operatorname{rang}A=3$. Dacă $a=1$, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\neq 0$ implică $\operatorname{rang}A=2$. Deci $a=1$.

c) $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ -3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

2. *a)* $f=X^2(X^2+1)-X+1=g\cdot(X^2+1)-X+1$. Restul împărțirii lui f la g este $-X+1$.

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4}{x_1x_2x_3x_4}=\frac{1}{1}=1$.

c) Pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$, avem $\alpha^2-\alpha+1>0$, deci $f(\alpha)=\alpha^4+(\alpha^2-\alpha+1)>0$. Ca urmare, f nu are nicio rădăcină reală.

Subiectul al III-lea

1. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln x}{x-1}, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.

a) Arătați că funcția f este continuă în punctul $x=1$.

b) Arătați că funcția f este derivabilă în punctul $x=1$.

c) Arătați că $f'(x)\leq 0$, oricare ar fi $x>0$.

2. Fie M mulțimea funcțiilor continue $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, cu $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

a) Arătați că funcția $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$, aparține mulțimii M.

b) Funcția $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=x^2+x+a$, aparține lui M. Determinați $a\in\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că, pentru orice funcție $f\in M$, există $c\in[0,1]$ astfel încât $f(c)=c$.

Subiectul al III-lea

1. ***a)*** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1/x}{1}=1=f(1)$, de unde rezultă cerința.

b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{2(x-1)}=-\dfrac{1}{2}$. De aici rezultă și că f este derivabilă în $x=1$

c) Avem $f'(x)=\dfrac{x-1-x\ln x}{(x-1)^2}$, $\forall x\neq 1,\ x>0$, și $f'(1)=-\dfrac{1}{2}$. Considerăm funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=x-1-x\ln x$. Avem $g'(x)=-\ln x$ și, din tabloul de variație alăturat, deducem că $g(x)<0$ pentru orice $x\in(0,1)\cup(1,\infty)$ și, în consecință, $f'(x)<0$, $\forall x>0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +\ +\ +$	$+$	0	$-\ -\ -$	$-$
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

2. ***a)*** $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1=\dfrac{1}{2}$, deci $g\in M$. ***b)*** $\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{x^3}{3}\Big|_0^1+\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^1+a=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+a$; $h\in M\Leftrightarrow a=-\dfrac{1}{3}$.

c) Fie $f\in M$. Atunci $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\Rightarrow\int_0^1(f(x)-x)\,\mathrm{d}x=0$. Conform teoremei de medie, există $c\in[0,1]$ astfel încât $f(c)-c=0$, ceea ce trebuia arătat.

Subiectul I

1. Fie $a=\sqrt[3]{1024}$, $b=\sqrt[3]{4}$ și $c=\sqrt{4}$. Verificați dacă $ab=c^4$.

2. Determinați imaginea funcției $f:[1,2]\to\mathbb{R}, f(x)=2x+1$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x-\left(\dfrac{5}{2}\right)^{x+1}=0$.

4. Determinați numărul elementelor unei mulțimi M știind că M are 32 de submulțimi cu un număr impar de elemente.

5. Fie ABC un triunghi echilateral de latură $\sqrt{3}$. Calculați lungimea vectorului $\overline{AB}+\overline{AC}$.

6. Arătați că $\sin x\cdot\sin(x+\pi)\leq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Subiectul I

1. Avem $a=(2^{10})^{1/3}=2^{\frac{10}{3}}$, $b=4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}$ și $ab=2^{\frac{12}{3}}=2^4$. Cum $c=\sqrt{4}=2$, avem $ab=c^4$. **2.** Cum f este strict crescătoare, $\operatorname{Im} f=\left[f(1),f(2)\right]=\left[3,5\right]$. **3.** $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x=\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-x-1}\Rightarrow x=-x-1\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

4. Fie n numărul elementelor lui M. Avem 2^{n-1} submulțimi de cardinal impar, deci $2^{n-1}=32\Rightarrow n=6$.

5. $\overline{AB}+\overline{AC}=2\,\overline{AD}$, D fiind mijlocul laturii BC. Cum $AD=AB\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3}{2}$, rezultă $\left|\overline{AB}+\overline{AC}\right|=3$. **6.** $\sin(x+\pi)=-\sin x\Rightarrow\sin x\sin(x+\pi)=-\sin^2 x\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3.

b) Determinați rangul matricei $A \cdot A^t$, unde A^t este transpusa matricei A.

c) Demonstrați că nu există nicio matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, cu $B^2 = A$.

2. Considerăm polinomul $f=(X^{10}-2)^{10}-X-2 \in \mathbb{C}[X]$.

a) Calculați suma coeficienților polinomului f.

b) Calculați suma rădăcinilor ale lui f.

c) Demonstrați că polinomul $g=X^{10}-X-2$ divide f.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $A^3=O_3$. *b)* $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ și rang $AA^t=2$.

c) Dacă există $B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ cu $B^2=A$, atunci $AB=BA$, deoarece $AB=B^2\cdot B=B^3=B\cdot B^2=BA$.

Notând $B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ x & y & z\\ u & v & t\end{pmatrix}$, avem $AB=\begin{pmatrix}x & y & z\\ u & v & t\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ 0 & x & y\\ 0 & u & v\end{pmatrix}$, deci $x=u=v=0$, $a=y=t$,

$b=z \Rightarrow B=\begin{pmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$. Avem $\det A=0 \Rightarrow \det B^2=0 \Rightarrow \det B=0 \Rightarrow a=0$. Obținem

$B^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & b^2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\neq A$.

2. *a)* Suma coeficienților polinomului este $f(1)=(1-2)^{10}-1-2=-2$.

b) Polinomul are gradul 100, iar coeficientul lui X^{99} este 0, deci suma rădăcinilor este 0.

c) $f=(g+X)^{10}-X-2=g^{10}+C_{10}^1g^9X+...+C_{10}^9gX^9+X^{10}-X-2=$ $g\cdot(g^9+C_{10}^1g^8X+...+C_{10}^9X^9+1)$, deci $g\mid f$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x\cdot e^{-x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

b) Arătați că $f(x)\le\dfrac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

c) Demonstrați că $f^{(n)}(x)=(-1)^n(x-n)\cdot e^{-x}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$ și $x\in\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare număr $n\in\mathbb{N}^*$, notăm $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^n}{2x+3}\,dx$.

a) Calculați I_2.

b) Arătați că $2I_{n+1}+3I_n=\dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\ge 3$.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\dfrac{1}{5}$.

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$.

b) Avem $f'(x)=e^{-x}-x\,e^{-x}=(1-x)e^{-x}$. Derivata se anulează în $x=1$; din tabelul de variație alăturat, rezultă cerința.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\ +\ +$	$+\ +$	0	$-\ -\ -$	$-\ -$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	0

c) Prin inducție, cum $f'(x)=(-1)^1(x-1)e^{-x}$ și $f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=(-1)^n e^{-x}-(-1)^n(x-n)e^{-x}=$ $=(-1)^{n+1}(x-(n+1))\,e^{-x}$, rezultă concluzia.

2. *a)* $I_2=\int\limits_0^1\dfrac{x^2}{2x+3}dx=\int\limits_0^1\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4(2x+3)}\right)dx=\left(\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{3x}{4}+\dfrac{9}{8}\ln(2x+3)\right)\Bigg|_0^1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{8}\ln\dfrac{5}{3}$.

b) $2I_{n+1}+3I_n=\int_0^1\dfrac{x^n(2x+3)}{2x+3}dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_0^1=\dfrac{1}{n+1}$.

c) Deoarece $0\le x\le 1$, avem $0\le\dfrac{x^{n+1}}{2x+3}\le\dfrac{x^n}{nx+3}\Rightarrow 0\le I_{n+1}\le I_n$. Atunci $5I_n\ge 2I_{n+1}+3I_n\ge 5I_{n+1}\Rightarrow$ $5I_n\ge\dfrac{1}{n+1}\ge 5I_{n+1}\Rightarrow\dfrac{n}{5(n+1)}\le nI_n\le\dfrac{1}{5}\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty} nI_n=\dfrac{1}{5}$.

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z=\dfrac{2}{1+i}$.

2. Determinați punctele de intersecție ale graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6$, cu dreapta de ecuație $y=x$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_x 2=\log_9 3$.

4. Calculați suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(a+b)^{10}$.

5. Calculați lungimea înălțimii din A în triunghiul ABC știind că $A(0,1)$, $B(1,1)$ și $C(3,2)$.

6. Arătați că $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\ge 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

1. $|z| = \frac{2}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$. **2.** Avem $f(x) = y \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0$, de unde $x = -2$ și $x = 3$. Punctele sunt $A(-2, -2)$ și $B(3, 3)$. **3.** $\log_9 3 = \frac{1}{2}$; $\log_x 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x^{1/2} = 2 \Rightarrow x = 4$. **4.** Suma este $(1+1)^{10} = 2^{10}$, sau $C_{10}^0 + C_{10}^1 + \ldots + C_{10}^{10} = 2^{10}$.

5. Ecuația dreptei BC este $\frac{y-1}{2-1} = \frac{x-1}{3-1} \Leftrightarrow x - 1 = 2(y-1) \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0$. Înălțimea din A are lungimea $\frac{|1-2\cdot 0+1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. **6.** Cum $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, rezultă $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = \sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm sistemul de ecuații liniare $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ ax + y - 2z = 1 \\ -x + 3y + z = b \end{cases}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul sistemului.
b) Determinați a și b pentru care $(1, 0, -1)$ este soluție a sistemului.
c) Determinați a și b astfel încât sistemul să fie incompatibil.

2. Fie $M = \left\{ U(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix} \mid a \in (-1, \infty) \right\}$.

a) Arătați că dacă $X, Y \in M$, atunci $XY \in M$.
b) Demonstrați că M formează grup în raport cu înmulțirea matricelor.
c) Arătați că funcția $f : (0, \infty) \to M$, $f(a) = U(a-1)$, este morfism de la grupul multiplicativ al numerelor reale nenule la grupul $(M, \cdot)$.

1. *a)* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 5a + 4$. *b)* Avem $1 - 1 = 0$, $a + 2 = 1$, $-1 - 1 = b$, deci $a = -1$, $b = -2$.

c) Dacă $\Delta \neq 0$, sistemul este compatibil determinat, deci este necesar $a = -\frac{4}{5}$. Cum minorul $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$ este nenul, rangul matricei sistemului este 2. Impunem ca minorul caracteristic să fie nul: $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 4b + 3 + 2 - b = 3b + 5 \Rightarrow b = -\frac{5}{3}$.

2. *a* Fie $X, Y \in M \Rightarrow$ există $a, b \in (-1, \infty)$ astfel încât $X = U(a) = \begin{pmatrix} 1+2a & a \\ -2a & 1-a \end{pmatrix}$, $Y = U(b) = \begin{pmatrix} 1+2b & b \\ -2b & 1-b \end{pmatrix}$. $XY = \begin{pmatrix} 1+2(a+b+ab) & a+b+ab \\ -2(a+b+ab) & 1-2(a+b+ab) \end{pmatrix} = U(ab+a+b) \in M$, deoarece $ab + a + b = (a+1)(b+1) - 1 \in (-1, \infty)$.

b) Am arătat că $U(a) \cdot U(b) = U(a + b + ab)$, $\forall a, b > -1$. Înmulțirea este asociativă, are elementul neutru $I_2 = U(0) \in M$ (pentru că $0 > -1$), iar inversa matricei $U(a)$ este $U\left(-\frac{a}{1+a}\right) \in M$, deoarece $-\frac{a}{1+a} > -1$.

c) Observăm $f(a) = U(a-1)$. Funcția f este morfism, deoarece $f(ab) = U(ab-1)$ și $f(a) \cdot f(b) = U(a-1)\,U(b-1) = U(a - 1 + b - 1 + (a-1)(b-1)) = U(ab-1)$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-2}{x+1}$.

a) Calculați derivata funcției *f*.

b) Determinați asimptotele graficului funcției *f*.

c) Determinați punctele graficului funcției *f* în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta $y=2x$.

2. Fie $A=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}\,dx$ și $B=\int_0^{\pi/2}\dfrac{\cos x}{\sin x+\cos x}\,dx$.

a) Calculați $A+B$.

b) Arătați că $A=B$.

c) Calculați A.

1. *a)* $f'(x)=\dfrac{2x(x+1)-(x^2-2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2-x}{x+1}=-1$, deci $y=x-1$ este asimptota oblică spre $+\infty$. $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\dfrac{-1}{+0}=-\infty$, deci $x=-1$ este asimptotă verticală. Funcția este continuă, deci nu mai admite alte asimptote verticale.

c) Cerința revine la rezolvarea ecuației $f'(x)=2$, $x\in(-1,\infty)$. Avem $x^2+2x+2=2x^2+4x+2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow x=0$.

2. *a)* $A+B=\int_0^{\pi/2}dx=\pi/2$. *b)* Cu schimbarea de variabilă $t=\dfrac{\pi}{2}-x$ avem $dt=-dx$ și

$$A=-\int_{\pi/2}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}dt=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t}{\cos t+\sin t}dt=B.$$

c) Din punctele anterioare rezultă $A=\pi/4$.

Subiectul I

1. Fie $a, b\in\mathbb{R}$ astfel încât $2^a=3$ și $3^b=4$. Calculați ab.

2. O funcție *f* de grad 1 are $f(0)=2$ și $f(4)=-4$. Calculați $f(1)$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din mulțimea $\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3\}$, să avem $a+b=5$.

5. Determinați ecuația dreptei ce trece prin origine și este perpendiculară pe dreapta de ecuație $x+3y+5=0$.

6. Calculați măsura unghiului A al triunghiului ABC știind că $AB=5$, $AC=8$ și $BC=7$.

G. MIHAI

Subiectul I

1. *a)* Avem $2^{ab}=(2^a)^b=3^b=4$, deci $ab=2$. **2.** Căutam a, $b\in\mathbb{R}$ astfel că $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$. Avem $f(0)=2\Rightarrow b=2$; $f(4)=4a+b=-4\Rightarrow 4a=-6\Rightarrow a=-\frac{3}{2}$. Atunci $f(x)=-\frac{3}{2}x+2$ și $f(1)=\frac{1}{2}$.

3. $x+\frac{\pi}{4}=\operatorname{arctg}1+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** Sunt 9 elemente în produsul cartezian. Verifică perechile (2, 3) și (3, 2). Probabilitatea este 2/9. **5.** Panta dreptei date este $-\frac{1}{3}$. Panta perpendicularei este 3 și ecuația este $y=3x$. **6.** $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+64-49}{2\cdot5\cdot8}=\frac{1}{2}$, deci $A=60°$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&4\\-9&-5\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$.

a) Calculați C^{-1}.

b) Arătați că $AC=CB$.

c) Demonstrați că $B^n=C^{-1}\cdot A^n\cdot C$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie polinomul $P=X^4+3X^3+4X^2+aX+b\in\mathbb{R}[X]$, având rădăcinile $x_1,x_2,x_3,x_4\in\mathbb{C}$.

a) Determinați $a,b\in\mathbb{R}$ știind că polinomul $f=X^2+3X+3$ divide P.

b) Calculați $(x_1-x_2)^2+(x_1-x_3)^2+(x_1-x_4)^2+(x_2-x_3)^2+(x_2-x_4)^2+(x_3-x_4)^2$.

c) Demonstrați că, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$, polinomul P nu are toate rădăcinile reale.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det C=1$, $C^{-1}=C^*=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&2\end{pmatrix}$. *b)* $AC=\begin{pmatrix}3&3\\3&2\end{pmatrix}$, $CB=\begin{pmatrix}14-a&8-5\\21-18&2-10\end{pmatrix}=AC$.

c) Pentru $n=1$ și din $AC=CB$ obținem $B=C^{-1}AC$. Atunci $B^n=(C^{-1}AC)^n=C^{-1}AC\cdot C^{-1}AC\ldots C^{-1}AC=C^{-1}AA\ldots AC=C^{-1}A^nC$, $\forall n\geq1$.

2. *a)* $P=X^2(X^2+3X+3)+X^2+aX+b=(X^2+1)f+(a-3)X+b-3$, deci $a=b=3$.

b) $(x_1-x_2)^2+\ldots+(x_3-x_4)^2=3(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)-2(x_1x_2+\ldots+x_3x_4)$
$=3(x_1+\ldots+x_4)^2-8(x_1x_2+\ldots+x_3x_4)=3(-3)^2-8\cdot4=-5$.

c) Dacă toate rădăcinile ar fi reale, atunci $(x_1+x_2)^2+\ldots+(x_3-x_4)^2\geq0$, contradicție.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x+1$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

b) Arătați că funcția f este surjectivă.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{f(x)-e^x}\right)^x$.

2. Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

a) Calculați $\int_0^{\pi/2}\frac{1}{f(x)}\,dx$.

b) Calculați $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

c) Calculați aria subgraficului funcției f.

1. *a)* $f'(x) = e^x + 1 > 0$, deci f este strict crescătoare.

b) Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Din continuitatea funcției f rezultă $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, deci f este surjectivă.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{x+1}\right)^x = e^{-1}$.

2. *a)* $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$.

b) Notând $t = 1 - x^2$, $dt = -2x\,dx$, avem $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{2}\int_1^0 \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{1/2}\,dt = \frac{t^{3/2}}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$.

c) Subgraficul este un sfert din cercul unitate: $y = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$. Aria este $\dfrac{\pi}{4}$.

Subiectul I

1. Considerăm progresia aritmetică $a_n = 1 + 7n$, $n \geq 1$. Calculați suma primilor 10 termeni.

2. Arătați că graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x^2 + 4x - 7$, nu au puncte comune.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}$, știind că $n^2 - 4n = C_7^2$.

5. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Calculați $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

6. Calculați raza cercului înscris în triunghiul ABC, în care $AB = AC = 4$ și $BC = 6$.

Subiectul I

1. $a_1 = 8$, $a_{10} = 71 \Rightarrow S_{10} = \dfrac{8+71}{2}\cdot 10 = 79\cdot 5 = 395$.

2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 7 = 0$. Cum $\Delta = 16 - 4\cdot 3\cdot 7 < 0$, ecuația nu are soluții.

3. $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x - \dfrac{\pi}{2} = 2x + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sau $x - \dfrac{\pi}{2} = -2x - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Obținem $x \in \left\{-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. Avem $C_7^2 = \dfrac{7\cdot 6}{2} = 21$; $n^2 - 4n - 21 = 0$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = 7$.

5. Punctul O este mijlocul diagonalelor AC și BD, deci $\overline{OA} + \overline{OC} = \overline{OB} + \overline{OD} = \overline{O}$, de unde rezultă concluzia.

6. Înălțimea din A este egală cu $\sqrt{16-9} = \sqrt{7}$, deci $S = 3\sqrt{7}$. Cum $p = 7$, rezultă $r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

Subiectul al II-lea

Subiectul al II-lea

1. Se dau dreptele $d_1 : x + y - 2 = 0$, $d_2 : 2x - y - 1 = 0$ și $d_3 : -3x + my - 1 = 0$, cu $m \in \mathbb{R}$.

a) Calculați determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & m & -1 \end{vmatrix}$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că dreptele d_1, d_2, d_3 sunt concurente.

c) Rezolvați sistemul $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ -3x + my - z = 0 \end{cases}$, știind că dreptele d_1, d_2, d_3 nu sunt concurente.

2. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & b \\ 0 & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q} \right\}$.

a) Arătați că $X + Y \in M$, oricare ar fi $X, Y \in M$.

b) Arătați că $XY \in M$, oricare ar fi $X, Y \in M$.

c) Demonstrați, M formează inel cu adunarea și înmulțirea matricelor.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\Delta = -3m + 12$.

b) Dacă punctul $P(a, b)$ aparține tuturor celor 3 drepte, atunci $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, deci a treia coloană din Δ este combinație liniară a primelor două. Rezultă $\Delta = 0$, deci $m = 4$.

c) Dacă dreptele nu sunt concurente, avem $\Delta \neq 0$, deoarece rang $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -3 & m \end{pmatrix} = 2$. Sistemul este omogen, compatibil determinat, cu unica soluție $(0, 0, 0)$.

2. Fie $X, Y \in M \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ astfel ca $X = \begin{pmatrix} a + b\sqrt{2} & b \\ 0 & a - b\sqrt{2} \end{pmatrix}$ și $Y = \begin{pmatrix} c + d\sqrt{2} & d \\ 0 & c - d\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

a) $X + Y = \begin{pmatrix} a + c + (b + d)\sqrt{2} & b + d \\ 0 & a + c - (b + d)\sqrt{2} \end{pmatrix} \in M$, deoarece $a + c, b + d \in \mathbb{Q}$.

b) $XY = \begin{pmatrix} ac + 2bd + (ad + bc)\sqrt{2} & ab + bc \\ 0 & ac + 2bd - (ad + bc)\sqrt{2} \end{pmatrix} \in M$, pentru că $ac + 2bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$.

c) Adunarea matricelor este operație asociativă și comutativă, admite elementul neutru $O_2 \in M$ (pentru $a = b = 0 \in \mathbb{Q}$) și $-X = \begin{pmatrix} -a - b\sqrt{2} & -b \\ 0 & -a + b\sqrt{2} \end{pmatrix} \in M$. Înmulțirea matricelor este operație asociativă, distributivă față de adunare, cu elementul neutru $I_2 \in M$ (pentru $a = 1, b = 0$). Cum M este închisă la cele două operații, rezultă cerința.

1. Pentru fiecare $a \in (0,\infty)\setminus\{1\}$ considerăm funcția $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = a^x - x - 1$.

a) Calculați $f_a'(0)$.

b) Determinați valorile lui a pentru care graficul funcției are asimptotă la $+\infty$.

c) Determinați valorile lui a, știind că, $f_a(x) \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $I_n = \int_0^{\pi} \sin^n \frac{x}{2}\, dx$, $n \geq 1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \geq 1$.

c) Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f_a'(x) = a^x \ln a - 1$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f_a'(0) = \ln a - 1$.

b) Pentru $a > 1$, deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = \infty$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}(a^x - x - 1) = \lim\limits_{x\to\infty} x\left(\frac{a^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$ și

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x} - 1 - \frac{1}{x}\right) = \infty$, deci graficul nu are asimptote la $+\infty$. Pentru $a \in (0, 1)$, avem

$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) + x + 1) = \lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, deci $y = -x - 1$ este asimptotă spre $+\infty$. Rezultă $a \in (0, 1)$.

c) Deoarece $f_a(x) \geq f_a(0) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ este punct de minim. Din teorema lui Fermat rezultă

$f_a'(0) = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow a = e$.

Notă. Avem $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. *a)* $I_1 = \int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2}\, dx = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} = 2$.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} \sin^n \frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) dx \leq 0$, deoarece $\sin\frac{x}{2} \geq 0$, $\forall x \in [0, \pi]$ și $\sin\frac{x}{2} - 1 \leq 0$.

c) Avem $\sin^n \frac{x}{2} \geq 0$, $\forall x \in [0, \pi] \Rightarrow I_n \geq 0$. Fiind descrescător și mărginit inferior, șirul este convergent.

1. Considerăm mulțimile $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ divide } 12\}$. Determinați numărul elementelor mulțimii $A - B$.

2. Determinați coordonatele punctului situat la intersecția graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 2| - 4$, cu prima bisectoare a sistemului de coordonate xOy.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{2x+1} + 9^x = 36$.

4. Determinați valorile lui n pentru care $C_{10}^n = C_9^n + C_9^7$.

5. Determinați distanța dintre dreptele paralele d_1: $y = x$ și d_2: $y = x + 1$.

6. În triunghiul ABC avem $AB = 2$, $AC = 3$ și $A = 120°$. Calculați raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul I

1. $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \Rightarrow A - B = \{5\}$. **2.** Ecuația $f(x) = x$ se scrie $|x-2| = x-4$. Dacă $x \ge 2$, ecuația devine $x-2 = x-4$, și nu are soluții. Dacă $x < 2$, ecuația devine $2 - x = x - 4 \Rightarrow x = 3$. Punctul este $A(3, 3)$. **3.** Avem $3^{2x-1} = 3 \cdot 9^x \Rightarrow 3^{2x+1} + 9^x = 4 \cdot 9^x$. Ecuația se scrie $4 \cdot 9^x = 36 \Leftrightarrow 9^x = 9$, deci $x = 1$.

4. Deoarece $C_{10}^n - C_9^n = C_9^{n-1}$, egalitatea se scrie $C_9^{n-1} = C_9^7 \Rightarrow n - 1 = 7$ sau $n - 1 = 2 \Rightarrow n = 8$ sau $n = 3$.

5. Punctul $O(0, 0)$ aparține dreptei d_1. Distanța dintre drepte este distanța de la O la d_2: $x - y + 1 = 0$, adică $\dfrac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

6. $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 19 \Rightarrow BC = \sqrt{19} \Rightarrow 2R = \dfrac{BC}{\sin A} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{57}}{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^3.

b) Determinați inversa matricei A^5.

c) Rezolvați ecuația $AX = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Considerăm polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 3X + m \in \mathbb{C}[X]$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Calculați $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.

b) Determinați $m \in \mathbb{C}$ știind că rădăcinile polinomului sunt în progresie aritmetică.

c) Determinați $m \in \mathbb{C}$ știind că rădăcinile polinomului sunt în progresie geometrică.

1. *a)* $A^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8\,I_2$.

b) Deoarece $A^6 = 64\,I_2$, avem $A^5 \cdot \dfrac{1}{64} A = I_2$, deci inversa matricei A^5 este $\dfrac{1}{64} A$.

c) Avem $AX = -A^3$, de unde $X = -A^2$.

2. *a)* $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 3$.

b) Dacă $\div\, x_1, x_2, x_3$, atunci $2x_2 = x_1 + x_3 \Rightarrow 3x_2 = x_1 + x_2 + x_3 = 6 \Rightarrow x_2 = 2$. Atunci $f(2) = 0$, deci $8 - 24 + 6 + m = 0 \Rightarrow m = 10$.

c) Avem $x_2 = x_1q$, $x_3 = x_1q^2$. Din $6 = x_1(1 + q + q^2)$, $3 = x_1^2q(1+q+q^2)$, rezultă $x_1q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_2 = \dfrac{1}{2}$. Atunci $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, deci $\dfrac{1}{8} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2} + m = 0 \Rightarrow m = -\dfrac{1}{8}$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

b) Demonstrați că există $c\in\left(\frac{1}{e},1\right)$, astfel încât $f(c)=0$.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(1)+f(2)+\ldots+f(n)}{n^2}$.

2. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x^2+1)}$.

a) Calculați $\int_1^4 f(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_1^2 xf(x^2)\,dx$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x f(t)\,dt$.

1. *a)* $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$, $\forall x>0$, deci f este strict crescătoare.

b) $f(1)=1>0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-1<0$. Din continuitatea funcției f rezultă cerința.

c) $f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\frac{n(n+1)}{2}+\ln n!$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$; $n!\le n^n \Rightarrow 0\le\frac{\ln n!}{n^2}\le\frac{\ln n}{n}$ și, cum $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n^2}=0$. Limita este egală cu $\frac{1}{2}$. (Alternativ, folosiți lema Stolz-Cesaro).

2. *a)* $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\Rightarrow\int_1^4 f(x)\,dx=\ln x\Big|_1^4-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_1^4=\frac{1}{2}(5\ln 2-\ln 17)$.

b) Notând $t=x^2$, $dt=2x\,dx$, avem $\int_1^2 x\,f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^4 f(t)\,dt=\frac{1}{4}(5\ln 2-\ln 17)$.

c) $\int_1^x f(t)dt=\ln t\Big|_1^x-\frac{1}{2}\ln(t^2+1)\Big|_1^x=\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{x^2+1}+\frac{\ln 2}{2}$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}\int_1^x f(t)dt=\frac{\ln 2}{2}$.

Subiectul I

1. Fie $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\in\mathbb{C}$. Arătați că $z^2+\overline{z}\in\mathbb{R}$.

2. Determinați valorile reale ale numărului m știind că $x^2+x+m\ge 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$

3. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to[1,\infty)$, $f(x)=1+x^4$, este surjectivă.

4. Determinați numărul termenilor raționali ai dezvoltării $(1+\sqrt{3})^{100}$.

5. Simetricul punctului $A(1,2)$ față de $B(4,a)$ este $C(b,4)$. Calculați $a+b$.

6. Fie $x\in\mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg}x=\frac{1}{\sqrt{3}}$. Calculați $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

Subiectul I

1. $z^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$; $\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow z^2+\bar{z}=0\in\mathbb{R}$. **2.** Este necesar şi suficient ca $\Delta\le 0 \Leftrightarrow 1-4m\le 0 \Leftrightarrow m\in\left[\frac{1}{4},\infty\right)$. **3.** Fie $y\in[1,\infty)$. Ecuaţia $f(x)=y$ are soluţia $x=\sqrt[4]{y-1}\in\mathbb{R}$, deci f e surjectivă. **4.** $T_{k+1}=C_{100}^{k}\sqrt{3}^{k}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow k$ e par, deci $k\in\{0,2,\ldots,100\}$. Sunt 51 de termeni.

5. $4=\frac{1+b}{2}\Rightarrow b=7$; $a=\frac{2+4}{2}\Rightarrow a=3\Rightarrow a+b=10$.

6. $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\pi/6}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\pi/6}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}=\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie A matricea pătratică de ordin 3 cu toate elementele egale cu 1.

a) Calculaţi $\det(A-3I_3)$.

b) Aflaţi $n\in\mathbb{N}$ ştiind că $\det(A^n+I_3)=82$.

c) Determinaţi inversa matricei I_3+A.

2. Considerăm mulţimea $G=\left\{\begin{pmatrix} a-4b & 5b \\ -5b & a+4b\end{pmatrix} \mid a^2+9b^2=1, a,b\in\mathbb{R}\right\}$.

a) Verificaţi dacă matricea $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{8}{5}\end{pmatrix}$ aparţine lui G.

b) Arătaţi că dacă $X, Y\in G$, atunci $XY\in G$.

c) Demonstraţi că G formează grup în raport cu înmulţirea matricelor.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-3I_3)=\begin{vmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{vmatrix}=0$.

b) $A^2=3A\Rightarrow A^n=3^{n-1}A\Rightarrow I_3+A^n=\begin{pmatrix}3^{n-1}+1&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}+1&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}&3^{n-1}+1\end{pmatrix}$.

$$\det(I_3+A^n)=(3^n+1)\begin{vmatrix}3^{n-1}+1&3^{n-1}&3^{n-1}\\3^{n-1}&3^{n-1}+1&3^{n-1}\\1&1&1\end{vmatrix}=(3^n+1)\begin{vmatrix}1&0&3^{n-1}\\0&1&3^{n-1}\\0&0&1\end{vmatrix}=3^n+1\Rightarrow 3^n+1=82\Rightarrow n=4.$$

c) Căutăm $x\in\mathbb{R}$ astfel încât $(I_3+A)(I_3+xA)=I_3\Leftrightarrow I_3+A+xA+xA^2=I_3\Leftrightarrow A+xA+3xA=O_3$, de unde $(4x+1)A=0\Rightarrow x=-\frac{1}{4}$. Inversa este $I_3-\frac{1}{4}A$. Alternativ, $(I_3+A)^{-1}=\frac{1}{\det(I_2+A)}\cdot(I_3+A)^*$.

2. a) Avem $a - 4b = 0$, $5b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{5}, a = \frac{4}{5}$, care verifică $-5b = -1$, $a + 4b = \frac{8}{5}$ și $a^2 + 9b^2 = 1$, deci matricea aparține lui G.

b) Fie $X, Y \in G \Rightarrow \exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + 9d^2 = c^2 + 9d^2 = 1$ și $X = \begin{pmatrix} a-4b & 5b \\ -5b & a+4b \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} c-4d & 5d \\ -5d & c+4d \end{pmatrix}$. Avem $XY = \begin{pmatrix} ac-9bd-4(ad+bc) & 5(ad+bc) \\ -5(ad+bc) & ac-9bd+4(ad+bc) \end{pmatrix} \in G$, deoarece $(ac-9bd)^2 + 9(ad+bc)^2 = (a^2+9b^2)(c^2+9d^2) = 1$.

c) Înmulțirea este bine definită pe G, este asociativă, are elementul neutru $I_2 \in G$ (pentru $a = 1, b = 0$), iar inversul elementului X este $X^{-1} = \frac{1}{a^2+9b^2}\begin{pmatrix} a+4b & -5b \\ 5b & a-4b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4b & -5b \\ 5b & a-4b \end{pmatrix} \in G$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$.

a) Arătați că funcția f este strict crescătoare.

b) Arătați că $(x^2+1)f''(x)f(x) = f'(x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Determinați asimptota graficului funcției f către $+\infty$.

2. Fie $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

b) Calculați $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\,dx$.

c) Calculați $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(x)\,dx$.

Subiectul al III-lea

1. a) $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} > 0$, deoarece $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$.

b) $f'(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f''(x) = \frac{f'(x)\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}f(x)}{x^2+1} \Leftrightarrow (x^2+1)f''(x) =$

$= f'(x)\sqrt{x^2+1} - x f'(x) = f'(x)\cdot\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{f'(x)}{f(x)}$, de unde rezultă cerința.

c) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}\right) = 2$, $\lim_{x\to\infty}(f(x)-2x) = \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x) =$

$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0$, deci $y = 2x$ este asimptota graficului spre $+\infty$.

2. a) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow \int_0^1 f(x)\,dx = (\ln(x+1) - \ln(x+2))\Big|_0^1 = 2\ln 2 - \ln 3$.

b) Notăm $t = \ln x$, $dt = \frac{1}{x}\,dx$. Atunci $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt = 2\ln 2 - \ln 3$.

c) $0 \leq \int_0^1 f^n(x)dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2^n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^n(x)dx = 0$.

Subiectul I

1. Calculați suma primelor cinci numere naturale impare.

2. Punctul $V(-1, 1)$ este vârful parabolei $y = x^2 + ax + b$. Calculați $2a + b$.

3. Rezolvați ecuația $\lg^2 x^2 = 1$.

4. Determinați numărul funcțiilor strict monotone $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. Dreptele $d_1 : y = x$, $d_2 : y = 2x + 1$ și $d_3 : x + ay + 1 = 0$ sunt concurente. Determinați a.

6. Fie ABC un triunghi în care $A = 30°$, $B = 75°$ și $AB = 4$. Calculați raza cercului circumscris triunghiului.

Subiectul I

1. $1+3+5+7+9=25$.

2. $x_V = -1 = -\frac{a}{2}$, deci $a = 2$; $y_V = 1 - a + b = b - 1 \Rightarrow b = 2$. Atunci $2a + b = 6$.

3. $\lg^2 x^2 = 1 \Rightarrow \lg x^2 = \pm 1$. Rezultă $x^2 = 10$ sau $x^2 = \frac{1}{10}$, de unde $x \in \left\{-\sqrt{10}, \sqrt{10}, -\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

4. Sunt C_5^4 funcții strict crescătoare și C_5^4 funcții strict descrescătoare. În total $2\,C_5^4 = 10$.

5. Dreptele d_1 și d_2 se intersectează în punctul $(-1, -1)$. Atunci $-1 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 0$.

6. $C = 180° - 30° - 75° = 75°$ și $\sin C = \sin 75° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = 2\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $XA = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BX$. *b)* Demonstrăm prin inducție după n. Evident, $B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Din $B^{n+1} = B^n \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$, rezultă cerința.

c) Avem $A = X^{-1}BX \Rightarrow A^{100} = \underbrace{(X^{-1}BX)\ldots(X^{-1}BX)}_{\text{de } 100 \text{ ori}} = X^{-1}B^{100}X$. Din $\det X = 2$ și $X^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

obținem $X^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, deci $A^{100} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 200 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 202 & 200 \\ -203 & -201 \end{pmatrix}$.

2. *a)* $f = (2X-1)\cdot(X^2 - X - 1) + 4$; câtul este $X^2 - X - 1$, iar restul 4.

b) Din $f = 2(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$ deducem $f(1) = 2(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3)$. Pe de altă parte $f(1) = 2 - 3 - 1 + 5 = 3$, deci $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = \frac{3}{2}$.

c) Din $\frac{f'}{f} = \frac{1}{X - x_1} + \frac{1}{X - x_2} + \frac{1}{X - x_3}$ rezultă $\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{6-6-1}{3} = -\frac{1}{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$.

a) Calculați rangul matricei A.

b) Determinați $u, v \in \mathbb{R}$ pentru care $A^3 = uA^2 + vA$.

c) Determinați o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = O_3$.

2. Considerăm polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 9X + m \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați $m \in \mathbb{Q}$ știind că $X-1$ divide f.

b) Determinați rădăcinile polinomului pentru $m = -4$.

c) Aflați valorile lui $m \in \mathbb{Q}$ pentru care polinomul f are o rădăcină dublă.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $XA=\begin{pmatrix}5&3\\1&1\end{pmatrix}=BX$. *b)* Demonstrăm prin inducție după n. Evident, $B^1=\begin{pmatrix}1&2\cdot 1\\0&1\end{pmatrix}$.

Din $B^{n+1}=B^n\cdot B=\begin{pmatrix}1&2n\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2(n+1)\\0&1\end{pmatrix}$, $n\in\mathbb{N}^*$, rezultă cerința.

c) Avem $A = X^{-1}BX \Rightarrow A^{100} = \underbrace{(X^{-1}BX)\dots(X^{-1}BX)}_{\text{de 100 ori}} = X^{-1}B^{100}X$. Din $\det X = 2$ și $X^*=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$

obținem $X^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}$, deci $A^{100}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&200\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}202&200\\-203&-201\end{pmatrix}$.

2. *a)* $f=(2X-1)\cdot(X^2-X-1)+4$; câtul este X^2-X-1, iar restul 4.

b) Din $f = 2(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$ deducem $f(1) = 2(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$. Pe de altă parte $f(1)=2-3-1+5=3$, deci $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=\frac{3}{2}$.

c) Din $\frac{f'}{f}=\frac{1}{X-x_1}+\frac{1}{X-x_2}+\frac{1}{X-x_3}$ rezultă $\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{x-x_2}+\frac{1}{x-x_3}=\frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{6-6-1}{3}=-\frac{1}{3}$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$.

a) Arătați că funcția f nu este derivabilă în $x \in \{-1, 1\}$.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Pentru $p,q\in\mathbb{N}$, $p,q\geq 2$, notăm $I(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

a) Calculați $I(3, 3)$.

b) Demonstrați că $I(p, q) = I(q, p)$, oricare ar fi $p, q \geq 2$.

c) Arătați că $p\cdot I(p,q)=(q-1)\cdot I(p+1,q-1)$, oricare ar fi $p, q \in \mathbb{N}, p \geq 2, q \geq 3$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x)=1+\cos x\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece mulțimea zerourilor funcției f' este formată doar din puncte izolate: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, rezultă că funcția f este strict crescătoare.

b) Avem $x-1\le f(x)\le x+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$, de unde rezultă că $\lim\limits_{x\to\pm\infty}=\pm\infty$. Funcția este continuă, deci $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$, adică f este surjectivă.

c) Cum $\frac{x-1}{x}\le\frac{f(x)}{x}\le\frac{x+1}{x}$, $\forall x>0$, rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1$. Funcția $g(x)=f(x)-x=\sin x$ nu are limită la $+\infty$, deoarece $x_n=n\pi\xrightarrow[n]{}\infty$, $g(x_n)=0\xrightarrow[n]{}0$ și $y_n=\frac{\pi}{2}+n\pi\xrightarrow[n]{}\infty$, $g(y_n)=1\xrightarrow[n]{}1$.

Rezultă că f nu are asimptote către $+\infty$. Analog, se arată că f nu are asimptote către $-\infty$. Din continuitate rezultă că f nu are asimptote verticale.

2. *a)* $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{(x^2+e^x)'}{x^2+e^x}\,dx=\ln(x^2+e^x)\Big|_0^1=\ln(1+e)$.

b) $\int_0^1 xf'(x)\,dx=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx=f(1)-\ln(1+e)=\frac{2+e}{1+e}-\ln(1+e)$.

c) Fie F o primitivă a funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$. Atunci $\int_0^x t\,f(t)\,dt=\int_0^x g(t)\,dt=$

$F(t)\Big|_0^x=F(x)-F(0)$. Din teorema lui l'Hospital avem $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}F'(x)=$

$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)\,dx=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+xe^x}{x^2+e^x}=\infty$.

Subiectul I

1. Calculați partea întreagă a numărului $\sqrt{2018}$.

2. Determinați funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de gradul 2 știind că $f(0)=0$, $f(1)=1$ și $f(2)=8$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sin 2x=1$.

4. Determinați coeficientul lui x^2 din dezvoltarea $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^6$.

5. Considerăm punctele $A(1,0)$, $B(3,2)$, $C(-1,3)$. Calculați cosinusul unghiului $\widehat{BAC}$.

6. Determinați semnul numărului $\cos 2\cdot\cos 4$.

Subiectul al II-lea

Subiectul I

1. $44^2<2018<45^2\Rightarrow\left[\sqrt{2018}\right]=44$.

2. Căutăm $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\ne 0$, astfel încât $f(x)=ax^2+bx+c$, $x\in\mathbb{R}$.
Avem $f(0)=c\Rightarrow c=0$, $f(1)=a+b+c\Rightarrow a+b=1$ și $f(x)=4a+2b+c\Rightarrow 2a+b=4$. Obținem $a=3$, $b=-2$, $c=0$ și $f(x)=3x^2-2x$, $x\in\mathbb{R}$.

3. $2x\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

4. $T_{k+1}=C_6^k(x^3)^{6-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=C_6^k\cdot x^{18-4k}$. Din $18-4k=2$ rezultă $k=4$; coeficientul lui x^2 este $C_6^4=15$.

5. $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$, $AB=2\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC}=-2\vec{i}+3\vec{j}$, $AC=\sqrt{13}$. Avem $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-4+6=2$; pe de altă parte, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\cos\widehat{BAC}$. Rezultă $\cos\widehat{BAC}=\frac{1}{\sqrt{26}}$.

6. Avem $\frac{\pi}{2}<2<\pi<4<\frac{3\pi}{2}$, deci $\cos 2<0$, $\cos 4<0$ și $\cos 2\cdot\cos 4>0$.

1. Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi A^{-1}.

b) Arătaţi că $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$, pentru orice număr natural $n\geq 2$.

c) Calculaţi A^{100}.

1. *a)* Avem $\det A=-1$, $A^*=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$, deci $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

b) Pentru $n=2$, egalitatea este evidentă. Pentru $n=3$, arătăm că $A^3-A=A^2-I_3$. Într-adevăr, $A^2=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A^3=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ şi $A^3-A^2-A+I_3=0_3$. Dacă pentru un $n\geq 2$ avem $A^n-A^{n-2}=A^2-I_3$, prin înmulţire cu A rezultă $A^{n+1}-A^{n-1}=A^3-A=A^2-I_3$, ceea ce probează cerinţa.

c) Avem $A^{100}-A^{98}=A^2-I_3$, $A^{98}-A^{96}=A^2-I_3$, ..., $A^2-I_3=A^2-I_3$. Adunând cele 50 de egalităţi obţinem $A^{100}-I_3=50(A^2-I_3)$, de unde $A^{100}=50A^2-49I_3=\begin{pmatrix}1&50&50\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. Fie $M=\left\{\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{Q}\right\}\subset\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$.

a) Arătaţi că $X-Y\in M$, oricare ar fi $X,Y\in M$.

b) Arătaţi că $X\cdot Y\in M$, oricare ar fi $X,Y\in M$.

c) Demonstraţi că M formează corp împreună cu adunarea şi înmulţirea matricelor.

Subiectul al III-lea

Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=$

2. Fie $X,Y\in M\Rightarrow\exists a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a&3b\\b&a\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}c&3d\\d&c\end{pmatrix}$.

a) $X-Y=\begin{pmatrix}a-c&3(b-d)\\b-d&3(a-c)\end{pmatrix}\in M$, deoarece $a-c,\ b-d\in\mathbb{Q}$.

b) $XY=\begin{pmatrix}ac+3bd&3(bc+ad)\\bc+ad&ac+3bd\end{pmatrix}\in M$, deoarece $ac+3bd,\ bc+ad\in\mathbb{Q}$.

c) Din punctul a) rezultă că $(M,+)$ e subgrup al grupului aditiv $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Înmulţirea este bine definită pe M, conform punctului *b)*. În plus, este asociativă, distributivă faţă de adunare şi admite elementul neutru $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\in M$, pentru $a=1,b=0$. Inversa matricei X este $X^{-1}=\dfrac{1}{a^2-3b^2}\begin{pmatrix}a&-3b\\-b&a\end{pmatrix}$ care aparţine lui M deoarece $\dfrac{a}{a^2-3b^2},\ \dfrac{-b}{a^2-3b^2}\in\mathbb{Q}$; a se ţine cont că $a,b\in\mathbb{Q}$ implică $a^2-3b^2\neq 0$, deoarece $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$. Cerinţa este demonstrată.

matricelor.

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-12x^2+1$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{f(x)}-x^2)$.

b) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

c) Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.

a) Calculați $\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx$.

b) Calculați volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției f în jurul axei Ox.

c) Calculați aria subgraficului funcției f.

deoarece

Subiectul al III-lea

1. *a)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4-12x^2+1}-x^2\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-12x^2+1}{\sqrt{x^4-12x^2+1}+x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-12+\dfrac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{-12}{2}=-6$.

b) $f'(x)=4(x^3-6x),\ x\in\mathbb{R}$. Din tabloul de variație, $-\sqrt{6}, 0, \sqrt{6}$ sunt punctele de extrem ale funcției f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{6}$		0		$\sqrt{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		$- - - -$	0	$+++$	0	$- - -$	0	$++++$	
$f(x)$		$\searrow$	-35	$\nearrow$	1	$\searrow$	-35	$\nearrow$	

c) $f''(x)=4(3x^2-6)=12(x^2-2)=12(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$. Derivata a doua se anulează în $-\sqrt{2}$ și $\sqrt{2}$ schimbă semnul în jurul acestor puncte, deci sunt puncte de inflexiune ale funcției f.

2. *a)* $\int_0^1 f(x)\cdot f'(x)\,dx=\dfrac{f^2(x)}{2}\Big|_0^1=\dfrac{f^2(1)-f^2(0)}{2}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

b) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^1(x^2+1)\,dx=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^1=\dfrac{4}{3}\pi$.

c) Aria este $S=\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 x'f(x)\,dx=x\cdot\sqrt{x+1}\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=\sqrt{2}-\int_0^1\dfrac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx=$

$=\sqrt{2}-S+\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^1$, deci $S=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))$.

Subiectul I

1. Dați exemplu de număr real x astfel încât $\sqrt{2}+x$ să fie număr rațional nenul.

2. Pentru ce valori reale ale lui m funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+mx+3$ este crescătoare pe intervalul $[2,\infty)$?

3. Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\arcsin x\le\dfrac{\pi}{4}$.

4. Determinați $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $7\cdot n!<1000$.

5. Fie punctele $A(1,2)$, $B(3,1)$ și $C(-1,4)$. Calculați lungimea medianei din A în triunghiul ABC.

6. Demonstrați că $\sin 4<0$.

Subiectul I

1. De exemplu $x=-\sqrt{2}+1$, deoarece $\sqrt{2}+x=1\in\mathbb{Q}^*$.

2. Funcția f este crescătoare pe intervalul $\left[x_V=-\dfrac{m}{4},+\infty\right)$. Trebuie ca $-\dfrac{m}{4}\le 2$, deci $m\ge -8$.

3. $\frac{\pi}{4} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$. Funcția arcsin : $[-1, 1] \to \mathbb{R}$ este crescătoare, deci $x \in \left[-1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4. $5! = 120$ și $6! = 720$; rezultă $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

5. Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = M\left(1, \frac{5}{2}\right)$. Mediana din A are lungimea $AM = \sqrt{(1-1)^2 + \left(2 - \frac{5}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$.

6. Avem $\pi < 4 < \frac{3\pi}{2}$, deci punctul de coordonată 4 pe cercul trigonometric este situat în al treilea cadran. Rezultă $\sin 4 < 0$.

Subiectul al II-lea

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați rangul matricei A.

b) Determinați $u, v \in \mathbb{R}$ pentru care $A^3 = uA^2 + vA$.

c) Determinați o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $AX = O_3$.

2. Considerăm polinomul $f = X^3 - 6X^2 + 9X + m \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Determinați $m \in \mathbb{Q}$ știind că $X - 1$ divide f.

b) Determinați rădăcinile polinomului pentru $m = -4$.

c) Aflați valorile lui $m \in \mathbb{Q}$ pentru care polinomul f are o rădăcină dublă.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det A = 0$ și $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, deci $\text{rang} A = 2$.

b) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Din $A^3 = uA^2 + vA$ obținem $4 = 2u + v$, $1 = u + v$, de unde $u = 3$, $v = -2$.

c) $X = A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, căci adjuncta matricei A verifică relația $A \cdot A^* = A^* \cdot A = (\det A) \cdot I_3 = O_3$.

2. *a)* $X - 1$ divide $f \Leftrightarrow f(1) = 0$. Deoarece $f(1) = 4 + m$ obținem $m = -4$.

b) Cum 1 este rădăcină, avem $f = (X-1)(X^2 - 5X + 4)$. Obținem $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 4$.

c) Dacă r este rădăcină dublă, atunci $f(r) = f'(r) = 0$. Din $f'(r) = 3r^2 - 12r + 9 = 3(r-1)(r-3)$ se obține $r = 1$, pentru care $m = -4$, sau $r = 3$, pentru care din $f(3) = 0$, rezultă $m = 0$. Așadar, $m \in \{0, -4\}$.

Subiectul al III-lea

1. Considerăm funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)}$.

a) Arătați că funcția f nu este derivabilă în $x\in\{-1, 1\}$.

b) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

c) Determinați punctele de extrem ale funcției f.

2. Pentru $p,q\in\mathbb{N}$, $p,q\geq 2$, notăm $I(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$.

a) Calculați $I(3,3)$.

b) Demonstrați că $I(p,q)=I(q,p)$, oricare ar fi $p,q\geq 2$.

c) Arătați că $p\cdot I(p,q)=(q-1)\cdot I(p+1,q-1)$, oricare ar fi $p,q\in\mathbb{N}$, $p\geq 2$, $q\geq 3$.

1. *a)* $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}=+\infty$, deci f nu este derivabilă (la dreapta) în $x=1$.

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=\lim\limits_{x\to -1}\sqrt[3]{\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}}=+\infty$, deci f nu este derivabilă în $x=-1$.

b) $f'(x)=\dfrac{3x^2-2x-1}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}}=\dfrac{(x-1)(3x+1)}{3\sqrt[3]{(x-1)^4(x+1)^2}}=\dfrac{3x+1}{3\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}}$, $\forall x\in\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

c) Derivata se anulează în $x=-1/3$ și are semnul trinomului $3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$. După cum se vede și din tabloul de variație, punctul $x=1/3$ este punct de maxim local, iar $x=1$ este punct de minim local, deoarece f este continuă.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	$++++$		|	$+++$	0	$---$	|	$++++$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

2. *a)* $I(3,3)=\int_0^1 x^2(1-x)^2\,dx=\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)\,dx=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{30}$.

b) Cu substituția $t=1-x$, avem $I(p,q)=-\int_1^0(1-t)^{p-1}t^{q-1}\,dt=-\int_1^0 t^{q-1}(1-t)^{p-1}\,dt=I(q,p)$.

c) Integrând prin părți, avem $I(p,q)=\dfrac{x^p}{p}\cdot(1-x)^{q-1}\Big|_0^1-\int_0^1\dfrac{x^p}{p}(q-1)(1-x)^{q-2}(-1)\,dx=$

$0+\dfrac{q-1}{p}\int_0^1 x^p(1-x)^{q-2}\,dx=\dfrac{q-1}{p}I(p+1,q-1)$, de unde rezultă cerința.

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu $a_3 + a_9 = 20$. Calculați a_6.

2. Fie $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 2$ și $g(x) = 4x + a$. Determinați valorile lui a pentru care $f \circ g = g \circ f$.

3. Rezolvați în mulțimea $(0, +\infty)$ ecuația $x^3 + 27^{\log_3 x} = 16$.

4. Care este probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, aceasta să aibă un număr prim de elemente.

5. Determinați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât unghiul făcut de vectorii $\vec{u}$, $\vec{v}$, unde $\vec{u} = -4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} + m^2\vec{j}$, să fie obtuz.

6. Arătați că $\sin x - \sqrt{3}\cos x \leq 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul I

1. $a_3 + a_9 = 20 \Rightarrow a_1 + 5r = 10 \Rightarrow a_6 = 10$. **2.** $(f \circ g)(x) = 12x + 3a + 2$, $(g \circ f)(x) = 12x + 8 + a$, $a = 3$.
3. $x^3 + 27^{\log_3 x} = 16 \Rightarrow 2x^3 = 16 \Rightarrow x = 2$. **4.** $\frac{290}{511}$. **5.** Unghiul vectorilor $\vec{u}, \vec{v}$ este obtuz dacă $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 2)$. **6.** $\sin x - \sqrt{3}\cos x \leq 2 \Leftrightarrow \sin x \cos\frac{\pi}{3} - \cos x \sin\frac{\pi}{3} \leq 1$, ceea ce este echivalent cu $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

1. Fie mulțimea $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

a) Determinați o matrice $A \in M$ cu $\det A = 9$.

b) Demonstrați că, pentru oricare $k \in \mathbb{Z}$, ecuația $\det A = 2k + 1$ are cel puțin o soluție cu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

c) Rezolvați ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 2078 & 2018 \\ 2018 & 2078 \end{pmatrix}$.

1. *a)* $\det A = 9 \Leftrightarrow a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow a = 5, b = 4$, *b)* $a = k + 1, b = k$,
c) Din $AX = XA \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}$. Ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} 2078 & 2018 \\ 2018 & 2078 \end{pmatrix}$ conduce la $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2078 \\ 2xy = 2018 \end{cases}$

rezolvând acest sistem se obține: $X_1 = \begin{pmatrix} 32 + 2\sqrt{15} & 32 - 2\sqrt{15} \\ 32 - 2\sqrt{15} & 32 + 2\sqrt{15} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 32 - 2\sqrt{15} & 32 + 2\sqrt{15} \\ 32 + 2\sqrt{15} & 32 - 2\sqrt{15} \end{pmatrix}$,
$X_3 = \begin{pmatrix} -32 + 2\sqrt{15} & -32 - 2\sqrt{15} \\ -32 - 2\sqrt{15} & -32 + 2\sqrt{15} \end{pmatrix}$, $X_4 = \begin{pmatrix} -32 - 2\sqrt{15} & -32 + 2\sqrt{15} \\ -32 + 2\sqrt{15} & -32 - 2\sqrt{15} \end{pmatrix}$.

2. *a)* $\forall x, y \in (5, +\infty) \Rightarrow x - 5 > 0, y - 5 > 0 \Rightarrow (x-5)(y-5) > 0 \Rightarrow x * y > 5$.

b) $a * b \in Q, a = 6 + \sqrt{2}, b = 6 - \sqrt{2}, a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow a * b = 4 \in \mathbb{Q}$.

c) $S = \{(-8, 4), (4, -8), (6, 18), (18, 6)\}$.

Subiectul III

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

a) Determinați asimptota oblică spre $+\infty$.

b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x = 1$.

c) Comparați numerele $f\left(\frac{1}{\pi}\right)$ și $f\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{2x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $n \geq 1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \geq 1$.

c) Calculați $\lim\limits_{n \to \infty} I_n$.

1. *a)* $D = (0,+\infty) \setminus \{e^{-2018}, e^{-2017}\}$. *b)* $f(x) + \frac{1}{x(2018+\ln x)} - \frac{1}{x(2017+\ln x)} = 0$.

c) $x = e^{-2018}, x = e^{-2017}$ asimptote verticale ,y=0 asimptotă orizontală la $\pm\infty$.

2. *a)* O primitivă este $G(x) = \ln(a + \ln x)$. *b)* $\int_1^e f(x)dx = \ln \frac{2017+\ln x}{2018+\ln x}\Big|_1^e = \ln \frac{2018^2}{2017 \cdot 2019}$

c) Pe intervalul $I = (e^{-2018}, e^{-2017})$ avem $f < 0 \Rightarrow F$ este strict descrescătoare.

Subiectul I

1. Aflați partea imaginară a numărului $z = \left(\frac{2}{1+i}\right)^{2018}$.

2. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 5a + 1$ are imaginea egală cu $[0, \infty)$.

3. Rezolvați ecuația $\sqrt{x-2} + \sqrt[3]{4-x} = 2$.

4. Determinați numărul funcțiilor pare $f: \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to \{0, 1, 2, 3\}$.

5. Se dau vectorii $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i}$ și $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$. Aflați $m(\sphericalangle ABC)$.

6. Se consideră triunghiul ABC cu $A(4, 3)$, $B(0, 6)$, $C(7, 7)$. Calculați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC.

Subiectul I

1. $z = \left(\frac{2}{1+i}\right)^{2018} = (1-i)^{2018} = (-2i)^{1009} = -2^{1009}i \Rightarrow \operatorname{Im} z = -2^{1009}$. 2. $a \in \{0, 3\}$.

3. $x \in \left\{3, 4-(-1-\sqrt{3})^3, 4-(-1+\sqrt{3})^3\right\}$. 4. 4^4.

5. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 4, \cos A = \frac{8+0}{4 \cdot 4} = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\sphericalangle A) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow m(\sphericalangle B) = \frac{\pi}{3}$.

6. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu catetele de lungime 5. Atunci lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC este $\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

1. Fie mulțimea $M=\left\{A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ d & 0 & e \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}_3)\right\}$.

a) Arătați că $A+B \in M$ și $AB \in M$, pentru orice $A, B \in M$.

b) Aflați card(M).

c) Pentru $b=d=0$, aflați elementele inversabile din M.

1. *b)* $\text{card}(A)=3^5$.

c) Pentru $b=d=0$ elementele inversabile sunt

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

2. Fie $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f=X^n+X^{n-3}-2$, $n \geq 3$ și $g=X^2+X+1$.

a) Calculați $f(1)$.

b) Pentru $n=2018$, aflați restul împărțirii lui f la g.

c) Pentru $n=2019$, aflați câtul împărțirii lui f la g.

2. *a)* $f(1)=0$; *b)* $r=2x-4$. *c)* $g=x^{2017}-x^{2016}+2x^{2014}-2x^{2013}+2x^{2011}-2x^{2010}+2x-2\ldots$

Subiectul al III-lea

1. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=4\{x\}(1-\{x\})$ și $g(x)=\left|\sin(\pi x)\right|$.

a) Arătați că $T=1$ este perioadă a funcțiilor f și g.

b) Arătați că dreapta $x=\frac{1}{2}$ este axă de simetrie pentru graficele funcțiilor f și g.

c) Demonstrați că $f(x) \geq g(x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

2. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-x-\frac{x^2}{2}$.

a) Calculați $f(0)$ și $f''(0)$.

b) Dacă F este o primitivă a lui f, arătați că F este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$.

c) Arătați că $\int_0^1 e^{x^2} dx \geq 1,43$.

MIHAI

1. a) $f(x+1)=4\{x+1\}(1-\{x+1\})=f(x)$ și $g(x+1)=|\sin(\pi+\pi x)|=|-\sin(\pi x)|=g(x)$.

b)Deoarece $\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\left\{x+\frac{1}{2}-1\right\}=\left\{x-\frac{1}{2}\right\}\Rightarrow f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f\left(x-\frac{1}{2}\right)$,

$g\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi x\right)\right|=|\cos(\pi x)|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)\right|=\left|\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi\right|=g\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

Deci $x=\frac{1}{2}$ este axă de simetrie pentru graficele funcțiilor f și g.

c) Considerăm funcția $\left[0,\frac{1}{2}\right], h(x)\geq 0(\forall)x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ pentru care h(0)=h($\frac{1}{2}$)=0. Deoarece h are un singur punct de extreme și anume de maxim pe $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ concluzionăm că $h(x)\geq 0(\forall)x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. Din a) și b) $\Rightarrow f(x)\geq g(x)(\forall)x\in\mathbb{R}$.

2. a) $f(0)=0$, $f''(0)=0$. b) Deoarece $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}^*$, f este crescătoare, de unde rezultă $f(x)<0, \forall x\in(-\infty,0)$. În concluzie F este strict descrescătoare pe $(-\infty,0)$.

c) Utilizând faptul că $e^x\geq 1+x+\frac{x^2}{2},(\forall)x\geq 0$, obținem $e^{x^2}\geq 1+x^2+\frac{x^4}{2}$. Prin integrarea acestei inegalități se obține $\int_0^1 e^{x^2}dx\geq 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=1,4(3)>1,43$.

Subiectul I

1. Calculați $[\log_5 2018]$.
2. Fie x_1, x_2 rădăcinile ecuației $x^2+5x+3=0$. Să se calculeze $\frac{x_1^3+3x_1}{5x_1+3}+\frac{x_2^3+3x_2}{5x_2+3}$.
3. Rezolvați ecuația $2x+\sqrt{x^2+\frac{9}{4}}=2$.
4. Fie F mulțimea funcțiilor $f:\{1,2,3,4\}\to\{1,2,3,4\}$. Care este probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea F, aceasta să fie surjectivă.
5. Fie $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$ și $C(-3, -4)$. Demonstrați că triunghiul ABC este obtuzunghic.
6. Rezolvați ecuația $\cos^2 x+4\sin x\cos x-2\sin^2 x-2=0$, $x\in[0,2\pi)$.

Subiectul I

1. $[\log_5 2018]=4$ 2. $\frac{x_1^3+3x_1}{5x_1+3}+\frac{x_2^3+3x_2}{5x_2+3}=\frac{-5x_1^2}{-x_1^2}+\frac{-5x_2^2}{-x_2^2}=10$. 3. $x=\frac{8-\sqrt{43}}{6}$. 4. f surjectivă implică f bijectivă $\Rightarrow P=\frac{4!}{4^4}$. 5. $\cos B<0\Rightarrow m(\sphericalangle B)>\frac{\pi}{2}$. 6. Fie $\operatorname{tg}x=t$, rezultă $\frac{1}{1+t^2}+\frac{4t}{1+t^2}-\frac{2t^2}{1+t^2}-2=0$ cu soluțiile $x\in\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi\right\}$

Subiectul al II-lea

1. Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \right\}$.

a) Arătați că $A + B \in M$ și $AB \in M$, pentru orice matrice $A, B \in M$.

b) Găsiți o matrice $A \in M$ cu $\det(A) = 1$.

c) Arătați că $\text{card}(U(M)) \geq 2018$.

2. Pe mulțimea $G = [0, 1)$ se definește legea $x * y = \{x + y\}$.

a) Arătați că 0 este element neutru în raport cu legea „*“.

b) Arătați că legea „*“ este asociativă.

c) Determinați un morfism $f : \mathbb{R} \to G$ între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $(G, +)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $a = 1, b = 0 \Rightarrow I_2 \in M$ *b)* $A^i \neq A^j, (\forall) i \neq j, A^i \in U(M), (\forall) i \in \mathbb{N}^*$ cu $\det(A) = 1$.

c) $A^i \neq A^j, (\forall) i \neq j, A^i \in U(M), (\forall) i \in \mathbb{N}^*$ deci $\text{card}(U(M)) \geq 2018$.

2. $x * (y * z) = \{x + \{y + z\}\} = \{x + y + z - [y + z]\} = \{x + y + z\}$. Analog $(x * y) * z = \{x + y + z\}$.

c) Funcția $f : \mathbb{R} \to G$, $f(x) = \{x\}$ verifică definiția morfismului, deoarece avem:

$$f(x) * f(y) = \{f(x) + f(y)\} = \{\{x\} + \{y\}\} = \{x + y - [x] - [y]\} = \{x + y\} = f(x + y).$$

Subiectul al III-lea

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (-1)^{[x]}\{x\}(1 - \{x\})$.

a) Arătați că $T = 2$ este perioadă pentru funcția f.

b) Arătați că f este o funcție impară.

c) Studiați derivabilitatea funcției f.

2. Pentru fiecare număr natural n, se notează $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este monoton și mărginit.

c) Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$.

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \Rightarrow f(-x) = (-1)^{[-x]}\{-x\}(1 - \{-x\}) = (-1)^{-[x]-1}(1 - \{x\})\{x\} = -f(x)$.

a) $f(x + 2) = (-1)^{[x+2]}\{x + 2\}(1 - \{x + 2\}) = f(x)$. *b)* Dacă $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = 0$, iar dacă $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, atunci $f(-x) = (-1)^{[-x]}\{-x\}(1 - \{-x\}) = (-1)^{-[x]-1}(1 - \{x\})\{x\} = -f(x)$.

c) $f_s'(0) = f_d'(0) = 1$, $f_s'(1) = f_d'(1) = -1$ și cum f este periodică, rezultă că f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. *a)* $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx = \ln \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{2(\sqrt{2} + 1)}$; *b)* $0 \leq I_n \leq I_1$;

c) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^n x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^n x dx \leq \int_0^1 \sin^n x dx \leq \int_0^1 x^n x dx \leq \frac{1}{n+1}$

Subiectul I

1. Fie $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, $z = \frac{1+i}{1-i}$. Calculați modulul lui z.

2. Fie funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 1$, și $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2x + 2$. Determinați valorile lui a pentru care $f \circ g$ este strict descrescătoare.

3. Rezolvați inecuația $\log_x \frac{4x+5}{6-5x} < 1$.

4. Fie F mulțimea funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Care este probabilitatea ca alegând o funcție din mulțimea F, aceasta să fie surjectivă.

5. Fie dreptele: $d_1 : x + 2y - 6 = 0$, $d_2 : 2x + y - 6 = 0$, respectiv $d_3 : 3x + 2y - 10 = 0$. Arătați că cele trei drepte sunt concurente.

6. Se consideră punctele $A(5, 6)$, $B(-1, -2)$, $C(6, 5)$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Subiectul I

1. $|z| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. **2.** Pentru ca $f \circ g$ să fie strict descrescătoare este necesar ca g să fie strict crescătoare. Deci $a \in [-1, +\infty)$. **3.** Domeniul maxim de definiție este $D = (0,1) \cup \left(1, \frac{6}{5}\right)$. Soluția inecuației este $S = (0,1)$. **4.** $P = \frac{5!}{5^5}$. **5.** $d_1 \cap d_2 \cap d_3 = \{I(2,2)\}$.

6. Deoarece $AC^2 + BC^2 = AB^2 \Rightarrow m(\sphericalangle C) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = 5$.

1. Fie mulțimea $G = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} -a+2 & -a+1 \\ 2(a-1) & 2a-1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

   a) Arătați că $I_2 \in G$.

   b) Arătați că $A(a) \cdot A(b) \in G$, pentru orice $a, b \in \mathbb{R}^*$.

   c) Arătați că grupurile $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ și $(G, \cdot)$ sunt izomorfe.

2. Fie polinomul $f = 2018X^{2019} - 2019X^{2018} + 1$.

   a) Arătați că $(X-1)^2$ divide polinomul f.

   b) Determinați câtul g al împărțirii lui f la $(X-1)^2$.

   c) Arătați că polinomul g are cel puțin o rădăcină reală situată în intervalul $(-1, 0)$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $I_2 = A(1) \in G$. *c)* Funcția $f : \mathbb{R}^* \to G, f(x) = A(x)$ este bijectivă și $f(xy) = A(xy) = A(x)A(y) = f(x)f(y)$ deci cele două grupuri sunt izomorfe.

2. *a)* $f(1) = f'(1) = 0$; *b)* $f = (X-1)^2 \left(2018X^{2017} + 2017X^{2016} + 2016X^{2015} + \ldots + 2X + 1\right)$;

c) Din $f(-1) = -4136$ și $f(0) = 1$, conform proprietății lui Darboux, există $x_0 \in (-1, 0)$ astfel încât $f(x_0) = 0$. Evident, x_0 va fi rădăcina câtului.

$3 - \ln x$

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

a) Determinați asimptotele funcției.

b) Calculați derivata funcției *f*.

c) Arătați că $e\cdot(\ln 2)^3<2$.

2. Fie funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

a) Calculați $\int_{2017}^{2018} f(x)\,dx$.

b) Arătați că *f* este integrabilă pe intervalul $\left[\dfrac{1}{2019},\dfrac{1}{2017}\right]$ și calculați $\int\limits_{\frac{1}{2019}}^{\frac{1}{2017}} f(x)dx$.

c) Arătați că *f* admite primitive pe $(1,+\infty)$ și calculați o primitivă.

$f(x_0)=0$. ...

Subiectul al III-lea

1. *a)* $x=0$ asimptotă verticală, $y=0$ asimptotă orizontală. *b)* $f'(x)=\dfrac{3-\ln x}{3x\sqrt[3]{x}}$.

c) *f* este strict crescătoare pe $(0,e^3)$, deci $f(2)<f(e)$, de unde se obține $e\cdot(\ln 2)^3<2$.

2. *a)* $\int\limits_{2017}^{2018} f(x)dx=\int\limits_{2017}^{2018} x\cdot 0\,dx=0$. *b)* Pe fiecare din intervalele $\left[\dfrac{1}{2019},\dfrac{1}{2018}\right],\left[\dfrac{1}{2018},\dfrac{1}{2017}\right]$, *f* diferă de o funcție continuă într-un singur punct deci *f* este integrabilă. În plus,

$$\int\limits_{\frac{1}{2019}}^{\frac{1}{2017}} f(x)dx=\int\limits_{\frac{1}{2019}}^{\frac{1}{2018}} f(x)dx+\int\limits_{\frac{1}{2018}}^{\frac{1}{2017}} f(x)dx=2018\int\limits_{\frac{1}{2019}}^{\frac{1}{2018}} xdx+2017\int\limits_{\frac{1}{2018}}^{\frac{1}{2017}} xdx=\frac{2018+2019}{2\cdot 2018\cdot 2019^2}+\frac{2018+2017}{2\cdot 2017\cdot 2019^2}.$$

c) Pentru $x\in(1,+\infty)\Rightarrow\dfrac{1}{x}\in(0,1)\Rightarrow[x]=0$, deci $f(x)=0$ și orice primitivă este constantă. Putem lua, de exemplu, funcția $F:(1,+\infty)\to\mathbb{R}, F(x)=2018$.

Subiectul I

1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice $a_1,\ a_2,\ a_3,\ 12,\ 15,\ldots$.

2. Determinați numărul real *a* știind că valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=ax^2+4x+a+2$ este egală cu -1.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^x-4=0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, suma elementelor acesteia să fie număr par.

5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $M(1,1)$, $A(2,3)$ și $B(3,-1)$. Determinați ecuația paralelei la dreapta *AB* dusă prin punctul *M*.

6. Se consideră numerele reale *a* și *b* astfel încât $\sin a+\cos b=\dfrac{4}{3}$ și $\sin b+\cos a=-\dfrac{2}{3}$.

Calculați $\sin(a+b)$.

Subiectul I

1. $a_1 = a_4 - 3r = 12 - 9 = 3$.

2. $\Delta = 16 - 4a(a+2) = -4a^2 - 8a + 16 \Rightarrow -\dfrac{-4a^2 - 8a + 16}{4a} = -1 \Rightarrow 4a^2 + 12a - 16 = 0$, cu soluțiile $a_1 = -4$ și $a_2 = 4$. Cum $a > 0$ convine $a = 1$.

3. Notăm $2^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$ cu soluțiile $t_1 = -1 < 0$ și $t_1 = 4$, deci $x = 2$.

4. Numărul cazurilor posibile este egal cu $C_6^3 = 20$. Mulțimea cazurilor favorabile are cardinalul egal cu $1 + 3 \cdot C_3^2 = 10$, deci probabilitatea este egală cu $\dfrac{1}{2}$.

5. $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-3}{3-2} = -4$, deci ecuația dreptei cerute este $y - 1 = -4(x-1)$.

6. Ridicând la pătrat obținem $\sin^2 a + 2\sin a \cos b + \cos^2 b = \dfrac{16}{9}$ și $\sin^2 b + 2\sin b \cos a + \cos^2 a = \dfrac{4}{9}$.

Adunăm cele două relații nou obținute și obținem $2 + 2\sin(a+b) = \dfrac{20}{9} \Rightarrow \sin(a+b) = \dfrac{1}{9}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1-6a & 2a \\ -21a & 1+7a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $X(a)X(b) = X(a+b+ab)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $X(-2017) \cdot X(-2016) \cdot \ldots \cdot X(-1)$.

c) Rezolvați ecuația $X^3(a) = I_2$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + m$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că restul împărțirii polinomului f prin binomul $X - 1$ este egal cu 1.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că polinomul f admite o rădăcină dublă.

c) Determinați $m \in \mathbb{R}$ știind că polinomul f admite două rădăcini întregi.

Subiectul al II-lea

1. a) $X(a)X(b) = \begin{pmatrix} 1-6(a+b+ab) & 2(a+b+ab) \\ -21(a+b+ab) & 1+7(a+b+ab) \end{pmatrix} = X(a+b+ab)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$.

b) Observăm că $X(a)X(-1) = X(-1)$, $\forall a \in \mathbb{R}$ și avem, folosind proprietatea de asociativitate a înmulțirii matricelor, $X(-2017) \cdot X(-2016) \cdot \ldots \cdot X(-1) = X(\alpha)X(-1) = X(-1)$.

c) $X^3(a) = I_2 \Leftrightarrow X(a^3 + 3a^2 + 3a) = X(0)$, obținând $a = 0$, deci $X(a) = I_2$.

2. a) $f(1) = 1 \Rightarrow m = 3$. **b)** $f(x) = f'(x) = 0$, $f''(x) \neq 0$, deci eventuala rădăcină dublă poate fi $x = 0$ sau $x = 2$. Dacă $x = 0$, atunci $m = 0$, iar dacă $x = 2$, atunci $m = 4$. În ambele puncte derivata de ordinul al doilea este nenulă. **c)** Fie $x_1 \in \mathbb{Z}$ și $x_2 \in \mathbb{Z}$ rădăcini ale polinomului dat. Cum $x_1 + x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_3 \in \mathbb{Z}$ și $m = -x_1x_2x_3 \in \mathbb{Z}$). Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9 \Rightarrow (x_1^2, x_2^2, x_3^2) \in \{(0,0,9),(0,9,0),(9,0,0),(4,4,1),(4,1,4),(1,4,4)\}$. Se obțin soluțiile $m = 0$ și $m = 4$.

Subiectul al III-lea

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției.

c) Determinați numărul soluțiilor ecuației $f(x)=m$, unde $m\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{x^2}$ și fie F o primitivă a sa.

a) Demonstrați că funcția F este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(\cos x)-F(1)}{x\sin x}$.

c) Calculați aria suprafeței plane delimitată de axa Ox, dreptele de ecuații $x=-1$, $x=1$ și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x\,f(x)$.

1. *a)* $f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$. *b)* $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=-\dfrac{1}{2}$, deci dreapta de ecuație $y=-2x-\dfrac{1}{2}$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției.

c) Funcția este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$ și $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, deci pentru $m\in(0,\infty)$ ecuația admite o unică soluție, iar pentru $m\in(-\infty,0]$ ecuația nu admite soluții.

2. *a)* $F''(x)=f'(x)=2xe^{x^2}\le 0$, $\forall x\in(-\infty,0]$.

b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{F(\cos x)-F(1)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos^2 x}-e}{x\sin x}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\cos^2 x-1}-1}{\cos^2 x-1}\cdot\dfrac{\cos^2 x-1}{x\cdot\sin x}=e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x-1}{x\cdot\sin x}=-e$.

c) $\int_{-1}^{1}|g(x)|dx=\int_{-1}^{1}\left|-xe^{x^2}\right|dx=2\int_{0}^{1}xe^{x^2}dx=e^{x^2}\Big|_0^1=e-1$

Subiectul I

1. Calculați modulul numărului complex $z=\dfrac{2-3i}{3+2i}$.

2. Determinați imaginea intervalului $[-1,2]$ prin funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2^2 x-2\cdot\log_2 x-8=0$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor pătrat perfect.

5. Determinați numerele reale a și b pentru care punctele $A(1,a)$, $B(b,2)$, $C(3,5)$ și $D(6,8)$ sunt vârfurile unui paralelogram.

6. Calculați $\operatorname{tg} x$, știind că $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. $|z|=\left|\dfrac{2-3i}{3+2i}\right|=1$. **2.** $f([-1,2])=[f(-1),f(2)]=[-1,5]$. **3.** Pentru $x>0$ notăm $\log_2 x=t\in\mathbb{R}$ și obținem ecuația $t^2-2t-8=0$ cu soluțiile $t_1=-2$ și $t_2=4$, deci $x\in\{10^{-2},10^4\}$. **4.** Numărul cazurilor posibile este egal cu $9\cdot 10=90$, iar mulțimea cazurilor favorabile este formată din numerele de două cifre cu suma cifrelor egală cu 1, 4, 9 sau 16. Sunt în total 17 astfel de numere. Deci $p=\dfrac{17}{90}$.

5. $\begin{cases}x_A+x_C=x_B+x_D\\ y_A+y_C=y_B+y_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=b+6\\ a+5=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-2\\ a=5\end{cases}$. **6.** $x\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ implică $\cos x=-\dfrac{1}{2}$, deci $tgx=\sqrt{3}$.

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 4x+1 & 0\\ 0 & 3x & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

b) Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y+4xy)$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale $x\neq-\dfrac{1}{4}$ pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2-5X+m\in\mathbb{R}[X]$.

a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că polinomul f este divizibil cu $X+1$..

b) Pentru $m=1$, , determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la binomul $X+1$.

c) Determinați $m\in\mathbb{R}$ știind că polinomul f admite o rădăcină dublă.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$. *b)* Direct:

$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1 & 2(x+y+4xy) & 0\\ 0 & 4(x+y+4xy)+1 & 0\\ 0 & 3(x+y+4xy) & 1\end{pmatrix}=A(x+y+4xy)$ pentru orice numere reale x și y .

c) $A(0)=I_3$, deci $A(x)A(x)=A(2x+4x^2)=A(0)$. Deducem $x=-2$ și $x=0$.

2. *a)* $f(-1)=0$, deci $m=-5$. *b)* $m=1\Rightarrow f=X^3+X^2-5X+1$; câtul este X^2-5 și restul 6 .

c) $f(x)=f'(x)=0$, $f''(x)\neq 0$ deci eventuala rădăcină dublă poate fi $x=-\dfrac{5}{3}$ sau $x=1$.

Pentru $x=-\dfrac{5}{3}$ obținem $m=-\dfrac{25}{3}$, iar pentru $x=1$ obținem $m=3$. În ambele puncte derivata de ordinul al doilea este nenulă.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(2,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2}{x-2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2},\ \forall x\in(2,\infty)$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=4$ al graficului.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{3-x}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră șirul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx$.

a) Arătați că $I_2=\frac{1}{3}\ln 2$.

b) Arătați că $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Subiectul al III-lea

1. ***a)*** $f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2},\ \forall x\in(2,\infty)$. ***b)*** $f'(4)=0$, deci ecuația tangentei la graficul funcției în $x_0=4$ este $y=8$. ***c)*** $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}f(x)\right]^{3-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^{3-x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-2}\right)^{x-2}\right]^{\frac{3-x}{x-2}}=e^{-1}$.

2. ***a)*** $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\ln\left(x^3+1\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}\ln 2$.

b) $I_{n+3}+I_n=\int_0^1\frac{x^{n+3}}{x^3+1}dx+\int_0^1\frac{x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{x^{n+3}+x^n}{x^3+1}dx=\int_0^1\frac{x^n\left(x^3+1\right)}{x^3+1}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$.

c) Cum $I_n\geq 0$ și $I_{n+3}+I_n=\frac{1}{n+1}$ rezultă $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Subiectul I

1. Determinați partea imaginară a numărului complex $z=\frac{3-2i}{3+2i}$.

2. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m-2)x+1$, să fie strict crescătoare.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 sau cu 5.

5. Determinați numerele reale a știind că vectorii $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(a^2-8)\vec{i}+6\vec{j}$ sunt coliniari.

6. Calculați cos2x, știind că $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul I

1. $\operatorname{Im}(z)=\operatorname{Im}\dfrac{3-2i}{3+2i}=-\dfrac{12}{13}$. **2.** $m-2>0$, deci $m\in(2,\infty)$. **3.** Pentru $t=x-1\geq 0$ obținem $t=t^2$, cu $t=0$ și $t=1$. Corespunzător, $x=1$ și $x=2$. **4.** Sunt $9\cdot 10=90$ cazuri posibile. De asemenea, sunt 30 de numere divizibile cu 3, 18 numere divizibile cu 5 și 6 numere divizibile cu 15, deci $30+18-6=42$ numere divizibile cu 3 sau cu 5. Prin urmare, probabilitatea cerută este $p=\dfrac{42}{90}=\dfrac{7}{15}$.

5. $\vec{u}\parallel\vec{v}\Leftrightarrow\dfrac{a^2-8}{2}=\dfrac{6}{-3}\Leftrightarrow a^2=4$, deci $a=\pm 2$. **6.** $\cos 2x=2\cos^2 x-1=\dfrac{1}{2}$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ 1 & m-1 & -2 \\ -2 & -2 & 2m+1 \end{vmatrix}=(m-1)(m-2)(2m+3)$. *b)* Sistemul are soluție unică pentru $m\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{3}{2},1,2\right\}$.

c) Pentru $m=1$ sistemul devine $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-2z=0 \\ -2x-2y+3z=0 \end{cases}$ și, dacă $z_0=\alpha\in\mathbb{Z}$, atunci $x_0=2\alpha$ și $y_0=-\dfrac{\alpha}{2}$, iar numărul $5x_0^2+4y_0^2+4z_0^2=25\alpha^2$ este pătrat perfect.

2. *a)* $X^2-1=(X-1)(X+1)$ și $(X-1,X+1)=1$. Condițiile $f(-1)=f(1)=0$ conduc la $m=n=-1$.

b) $f(1+i)=0$ implică $m+n-2+(m+4)i=0$, deci $m=-4$ și $n=6$.

c) $m=n=1$ implică $f=X^3+X^2+X+1=(X^2+1)(X+1)$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} mx+2y-mz=0 \\ x+(m-1)y-2z=0 \\ -2x-2y+(2m+1)z=0 \end{cases}$, unde m este număr real.

a) Calculați determinantul matricei asociate sistemului

b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

c) Pentru $m=1$ arătați că, pentru orice soluție $(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{Z}^3$, numărul $5x_0^2+4y_0^2+4z_0^2$ este pătrat perfect.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX+n\in\mathbb{R}[X]$.

a) Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ știind că polinomul f este divizibil cu X^2-1

b) Determinați $m,n\in\mathbb{R}$ știind că polinomul f admite rădăcina $1+i$.

c) Pentru $m=n=1$ arătați că polinomul f este divizibil cu X^2+1.

...al III-lea

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\begin{vmatrix} m & 2 & -m \\ 1 & m-1 & -2 \\ -2 & -2 & 2m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m-2)(2m+3)$. *b)* Sistemul are soluție unică pentru $m \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}, 1, 2\right\}$.

c) Pentru $m=1$ sistemul devine $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x-2z=0 \\ -2x-2y+3z=0 \end{cases}$ și, dacă $z_0 = \alpha \in \mathbb{Z}$, atunci $x_0 = 2\alpha$ și $y_0 = -\frac{\alpha}{2}$, iar numărul $5x_0^2 + 4y_0^2 + 4z_0^2 = 25\alpha^2$ este pătrat perfect.

2. *a)* $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ și $(X-1, X+1) = 1$. Condițiile $f(-1) = f(1) = 0$ conduc la $m = n = -1$.

b) $f(1+i) = 0$ implică $m+n-2+(m+4)i = 0$, deci $m=-4$ și $n=6$.

c) $m=n=1$ implică $f = X^3 + X^2 + X + 1 = (X^2+1)(X+1)$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$.

a) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{f(x+1)}\right]^x$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră șirul $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_n + nI_{n-1} = e$ pentru orice număr natural nenul n.

c) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Subiectul al III-lea

1. i $f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ și $f'(x) = 0$ pentru $x_1 = 1-\sqrt{3}$ și $x_2 = 1+\sqrt{3}$. Funcția este descrescătoare pe $\left(1, 1+\sqrt{3}\right]$ și crescătoare pe $\left[1+\sqrt{3}, \infty\right)$. *b)* $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ și $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - x\right] = 1$, deci ecuația asimptotei oblice la graficul funcției este $y = x+1$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{f(x+1)}\right]^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+2x}{x^3+x^2+x-3}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{-x^2+x+3}{x^3+x^2+x-3}\right)^x = e^{-1}$.

2. *a)* $I_1 = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x(e^x)' dx = xe^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = 1$.

b) $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx = \int_0^1 x^n (e^x)' dx = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1}e^x dx = e - nI_n$, deci $I_n + nI_{n-1} = e$.

c) Avem $I_{n-1} \geq 0$ și $I_n + nI_{n-1} = e$, deci $0 \leq nI_{n-1} \leq e$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

Subiectul I

1. Calculați partea întreagă a numărului $a = \log_2 3 + \log_3 4$.

2. Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(-1, 0)$ și trece prin punctul $(0, 1)$.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x-1)$.

4. Se consideră mulțimea. $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Determinați numărul de submulțimi cu câte trei elemente ale mulțimii A, care conțin exact două numere impare.

5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(1, 1)$ și este perpendiculară pe dreapta d de ecuație $x - 2y - 5 = 0$.

6. Știind că $\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, calculați $\sin 2x$.

1. $a = \log_2 3 + \log_3 4 < 2 + 2 = 4$ și $a = \log_2 3 + \log_3 4 > \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ implică $[a] = 3$. **2.** $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

3. În condiția $x - 1 > 0$ avem succesiv $\log_2(x+1) = 3 - \log_2(x-1) \Leftrightarrow \log_2(x+1) + \log_2(x-1) = 3$ $\Leftrightarrow \log_2(x^2-1) = 3$, de unde $x = 3$. **4.** Sunt C_{10}^2 moduri de a alege două numere impare dintre cele 10 ale mulțimii date, deci numărul cerut este $10 \cdot C_{10}^2$ (fiind 10 numere pare). **5.** $m_d = \frac{1}{2}$, deci panta dreptei cerute este $m = -2$. Ecuația este $y - 1 = -2(x-1)$

6. $(\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 \Rightarrow 1 - \sin 2x = \frac{4-2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & m \\ 1 & m & 0 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

a) Calculați $\det(A(0))$.

b) Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(m)) = 0$.

c) Determinați numerele întregi m pentru care $A^{-1} \in M_3(\mathbb{Z})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = -2xy + 2x + 2y - 1$. Se presupune cunoscut faptul că legea este asociativă.

a) Arătați că $x \circ y = -2(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } 2018 \text{ ori } x} = x$.

c) Determinați două numere $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{Q}$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-1$. *b)* $\det(A(m))=\begin{vmatrix}0&1&m\\1&m&0\\m&0&1\end{vmatrix}=-(m^3+1)=-(m+1)(m^2-m+1)$,

deci $m=-1$. *c)* Complementul algebric al elementului a_{33} este $\begin{vmatrix}0&1\\1&m\end{vmatrix}=-1$, deci $-(m^3+1)\mid(-1)$.

Prin urmare $m^3+1=\pm1$, adică $m=0$ (singura posibilitate).

2. *a)* $x\circ y=-2x(y-1)+2(y-1)+1=-2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

b) $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{\text{de 2018 ori } x}=(-2)^{2017}(x-1)^{2018}+1$, deci $(-2)^{2017}(x-1)^{2018}+1=x$. Urmează că $(-2)^{2017}(x-1)^{2018}=x-1$,

de unde $x-1=0$ sau $x-1=-\frac{1}{2}$. Soluțiile sunt $x=1$ și $x=\frac{1}{2}$.

c) Determinăm $a,b\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ astfel încât $a\circ b=-1$, sau $(a-1)(b-1)=1$. Pentru $a=\sqrt{2}$ rezultă $b=\sqrt{2}+2$ și condiția este îndeplinită.

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}\ln x$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,\infty)$.

b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției *f*.

c) Demonstrați că $7^{\sqrt{6}}>6^{\sqrt{7}}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul *n* se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}dx$.

a) Calculați $I_1+I_2+I_3$.

b) Demonstrați că $I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul *n*.

c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x)=\left(\sqrt{x}\ln x\right)'=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,\infty)$. *b)* $f'(x)=0$ dacă $x=e^{-2}$ și funcția •

descrescătoare pe $\left(0,e^2\right]$ și crescătoare pe $\left[e^2,\infty\right)$. *c)* $7^{\sqrt{6}}>6^{\sqrt{7}}\Leftrightarrow\ln7^{\sqrt{6}}>\ln6^{\sqrt{7}}\Leftrightarrow\frac{\ln7}{\sqrt{7}}>\frac{\ln}{\sqrt{}}$

Considerăm funcția $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Aceasta are derivata $g'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$, $x\in(0,\infty$

este crescătoare pe $\left(0,e^2\right]$. Cum $6<7$ și acestea aparțin intervalului $\left(0,e^2\right]$, avem $f(6)<f(7)($

2. *a)* $I_1+I_2+I_3=\int_0^1\frac{x+x^2+x^3}{x^2+x+1}dx=\int_0^1xdx=\frac{1}{2}$. *b)* $I_{n+2}+I_{n+1}+I_n=\int_0^1\frac{x^n\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}dx=\int_0^1x^ndx=\frac{1}{n-}$

c) Cum $I_n\geq0$ și $I_n\leq\frac{1}{n+1}$ rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Subiectul I

1. Arătați că $(2+3i)^2+(3-2i)^2 \in \mathbb{Z}$, unde $i^2=-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+4$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției cu axa Ox.

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x-3}=x+1$.

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 6.

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ și $B(4,5)$.
Determinați coordonatele punctului C știind că $\overline{BC}=3\overline{AB}$.

6. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $AB=12$ și $B=\frac{\pi}{3}$.

Subiectul I

1. $(2+3i)^2+(3-2i)^2=0\in\mathbb{Z}$. **2.** $f(x)=0$ implică $x=2$. Punctul este $A(2,0)$. **3.** În ipoteza că $x^2+2x-3\geq 0$ și $x+1\geq 0$ ridicăm la pătrat ambii membri. Obținem $x=-1$. **4.** Sunt $9\cdot 10=90$ cazuri posibile și 6 cazuri favorabile, $\overline{ab}\in\{15,24,33,42,51,60\}$, deci $p=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$. **5.** $\overline{BC}=3\overline{AB}$ $\Leftrightarrow (x_C-x_B)\vec{i}+(y_C-y_B)\vec{j}=3(x_B-x_A)\vec{i}+3(y_B-y_A)\vec{j}$. Obținem $x_C-4=12$ și $y_C-5=12$, deci $C(16,17)$. **6.** $S=AB^2\sin\frac{\pi}{3}=144\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=72\sqrt{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\x&0&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $\det(A(x))\neq 0$, pentru orice număr real $x\neq 0$.

b) Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=xyzI_3$, pentru orice numere reale x, y și z.

c) Determinați $n\in\mathbb{Z}$ știind că $\det\left(A^2(n)+A(n)+I_3\right)=49$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^3+mX+1$, unde m este număr real.

a) Arătați că $f(1)=2m+2$.

b) Pentru $m=-1$, arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+X+1$.

c) Determinați toate rădăcinile polinomului f știind că $f(1)=0$.

Subiectul al II-lea

1. *a)* $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^3 \neq 0$, $\forall x \neq 0$. *b)* Avem: $A(x)A(y) = \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy \\ xy & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \end{pmatrix}$ și $A(x)A(y)A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & xy \\ xy & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xyz & 0 & 0 \\ 0 & xyz & 0 \\ 0 & 0 & xyz \end{pmatrix}$.

c) $A^2(n) + A(n) + I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n^2 \\ n^2 & 0 & 0 \\ 0 & n^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 \\ n^2 & 1 & n \\ n & n^2 & 1 \end{pmatrix}$,

deci $\det(A^2(n) + A(n) + I_3) = (n^3 - 1)^2$. Prin urmare, $n^3 - 1 = \pm 7$, deci $n = 2$.

2. *a)* $f(1) = 1 + m + m + 1 = 2m + 2$. *b)* $m = -1$ implică $f = X^4 - X^3 - X + 1 = X^3(X-1) - (X-1) =$ $= (X-1)(X^3-1) \Rightarrow f = (X-1)^2(X^2+X+1)$. *c)* $f(1) = 0 \Rightarrow m = -1$. Conform punctului precedent, $x_1 = x_2 = 1$ și $x_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Subiectul al III-lea

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

a) Arătați că $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției *f*, în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției *f*.

c) Calculați $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x + 1}$.

a) Arătați că $\int_0^1 \left(e^x + 1\right) f(x)dx = \frac{e^2 + 2e - 5}{2}$.

b) Arătați că $\int_{-1}^1 x\left(f(x) + f(-x)\right)dx = 0$.

c) Demonstrați că aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x + 1$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$ și $x = 1$ este mai mică decât $\ln 2$.

Subiectul al III-lea

1. *a)* $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1}{\sqrt{x^2+1}-x}=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$. *b)* $f'(0)=-1$, $f(0)=0$ deci ecuaţia tangentei este $y=-x$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\infty$.

2. *a)* $\int_0^1(e^x+1)f(x)dx=\int_0^1(e^{2x}+e^x-1)dx=\dfrac{e^2+2e-5}{2}$.

b) $\int_{-1}^1 x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=\int_{-1}^1 x\left(e^x+e^{-x}-1\right)dx=0$, sub integrală având o funcţie impară.

c) $\int_0^1|g(x)|dx=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1=\ln\dfrac{e+1}{2}<\ln 2$.

Subiectul I

1. Fie $(a_n)_{n\ge1}$ o progresie aritmetică de numere reale, cu proprietatea că $a_3+a_4+a_8=33$. Calculaţi S_9.

2. Fie $f:\left(-\infty,-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)$. Arătaţi că f este funcţie impară.

3. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $\sqrt[3]{x^3-10x+16}=2-x$.

4. Determinaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor natural de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.

5. Determinaţi m pentru care unghiul făcut de vectorii $\overline{u}=2\overline{i}-m\overline{j}$ şi $\overline{v}=4\overline{i}+\overline{j}$ este obtuz.

6. Fie triunghiul ABC cu $AB=5$, $BC=6$, $AC=7$. Calculaţi distanţa de la centrul de greutate al triunghiului ABC la dreapta BC.

Subiectul I

1. $a_3+a_4+a_8=33\Rightarrow 3a_1+12r=33\Rightarrow a_1+4r=11\Rightarrow 2a_1+8r=22\Rightarrow S_9=99$.

2. $f(-x)=\ln\dfrac{-2x-3}{-2x+3}=\ln\dfrac{2x+3}{2x-3}=-\ln\dfrac{2x-3}{2x+3}=-f(x)$.

3. $(x-2)^3+(x-2)(x-8)=0\Rightarrow(x-2)(x^2-3x-4)=0\Rightarrow x\in\{-1,2,4\}$.

4. $\dfrac{234}{900}$. **5.** $m\left(\sphericalangle\vec{u},\vec{v}\right)>\dfrac{\pi}{2}$ $m\left(\sphericalangle\vec{u},\vec{v}\right)>\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow 2\cdot4-m\cdot1<0\Leftrightarrow m\in(8,+\infty)$.

6. $A_{ABC}=6\sqrt{6}\Rightarrow A_{GBC}=2\sqrt{6}\Rightarrow d(G,BC)=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

Subiectul al II-lea

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3 & -3\\1 & -1 & 3 & -3\\1 & -1 & 3 & -3\\1 & -1 & 3 & -3\end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $AB-C$.

b) Calculaţi rangul matricei C.

c) Calculaţi C^n, $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Fie mulțimea $M = \left\{ A(x) \in M_2(\mathbb{R}) \mid A(x) = \begin{pmatrix} 1+3x & x \\ -3x & 1-x \end{pmatrix}, x \in (-1, +\infty) \right\}$.

a) Arătați că $I_2 \in M$.

b) Rezolvați ecuația $A(x)A(x)A(x) = 171$.

c) Calculați produsul $P = A\left(-\frac{2017}{2018}\right)A\left(-\frac{2016}{2018}\right)A\left(-\frac{2015}{2018}\right)\ldots A\left(-\frac{2}{2018}\right)A\left(-\frac{1}{2018}\right)$.

Subiectul al III-lea

Subiectul al II-lea

1. *a)* $AB - C = O_4$. *b)* Rangul matricei C este 1. *c)* $C^n = O_4$, $\forall n \geq 2$.

2. *a)* $A(0) = I_2 \Rightarrow I_2 \in M$ *b)* $x=3$. *c)* Deoarece $A(x)A\left(-\frac{1}{2}\right) = A\left(-\frac{1}{2}\right)A(x) = A\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow P = A\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Subiectul al III-lea

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

a) Determinați asimptota oblică spre $+\infty$.

b) Studiați derivabilitatea funcției f în punctul $x = 1$.

c) Comparați numerele $f\left(\frac{1}{\pi}\right)$ și $f\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

2. Fie șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{2x^n}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$, $n \geq 1$.

a) Calculați I_1.

b) Arătați că $I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \geq 1$.

c) Calculați $\lim_{n \to \infty} I_n$.

1. *a)* $y = x - \frac{1}{3}$ asimptota oblică spre $+\infty$. *b)* $f_s'(1) = -\infty$, $f_d'(1) = +\infty$; $x = 1$ punct de întoarcere.

c) $\frac{1}{\sqrt{11}} < \frac{1}{\pi}$, iar f este strict descrescătoare pe $\left(-\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{\pi}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$.

2. *a)* $I_1 = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)$. *b)* $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \Rightarrow \frac{2x^{n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{2x^n}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \geq 1$.

c) $1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{2}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} I_n = 0$.