

AL VII-LEA CONGRES AL MATEMATICIENILOR ROMÂNI

În perioada 29.06. – 05.07. a.c. s-a desfășurat la Brașov al VII-lea „*Congres al Matematicienilor Români*”; primul (1929 la Cluj) și al doilea (1932 la Turnu Severin) fiind inițiate de distinsul *matematician și istoric al matematicii*, profesorul *Petre Sergescu*. Apoi, după război, au urmat al III-lea (1945) și al IV-lea (1956) la București, ca după 47 de ani, în 2003 (la Pitești) să urmeze al V-lea și în 2007 (la București) al VI-lea congres. Să sperăm că periodicitatea de 4 ani (după modelul *congreselor mondiale ale matematicienilor*) va fi menținută, fiind o bună măsură pentru „*progresul matematicii*”.

Actualul congres s-a organizat și desfășurat sub înaltul patronaj al *Președenției României*, având ca organizatori: *Secția de Științe Matematice a Academiei Române*, *Institutul de Matematică Simion Stoilow* (București), *Universitatea Transilvania* din Brașov, *Facultatea de Matematică și Informatică* a Universității București, *Societatea de Științe Matematice din România*. De asemenea, congresul a fost organizat în parteneriat cu *Societatea de Matematică Europeană*.

Amplarea organizării unei astfel de manifestări științifice de nivel internațional, a implicat existența unui „*Comitet de organizare*” (având ca președinte de onoare pe acad. *Romulus Cristescu*) format din matematicieni remarcabili din cele 5 instituții organizatoare.

Lucrările Congresului s-au desfășurat în 8 secții (fiecare secție având un „*Comitet științific*”), după cum urmează:

1. *ALGEBRĂ-GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ și TOPOLOGIE*, cu subsecția „*Algebra și Teoria numerelor*” în memoria ilustrului matematician *NICOLAE POPESCU* (decedat în 2010). De menționat, că pe data de 30.06, în Aula Auditorium a Universității Brașov, s-a lansat volumul *NICOLAE POPESCU – OMUL. MATEMATICIANUL. MENTORUL*.

2. *ANALIZĂ REALĂ ȘI COMPLEXĂ. TEORIA POTENȚIALULUI*

3. *ECUAȚII DIFERENȚIALE*

4. *ANALIZĂ FUNCȚIONALĂ. TEORIA OPERATORILOR ȘI ANALIZĂ NUMERICĂ*

5. *PROBABILITĂȚI ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ*

6. *INFORMATICĂ TEORETICĂ ȘI CERCETĂRI OPERAȚIONALE*

7. *MECANICĂ ȘI MATEMATICI APLICATE*

8. *ISTORIA ȘI FILOZOFIA MATEMATICII*

La Congres au participat peste 450 de matematicieni români (din țară și diasporă) și străini. S-au prezentat peste 240 de lucrări științifice prin care s-au abordat probleme actuale ale cercetării matematice. Înaltul nivel al lucrărilor prezentate, a arătat originalitatea și remarcabila contribuție a matematicienilor români la dezvoltarea matematicii contemporane.

Lucrările Congresului au debutat cu un amplu și documentat „*Raport privind aspectele cercetării matematice actuale în România*”, prezentat de acad. *Solomon Marcus*.

În zilele de 2 și, respectiv, 3 iulie, au fost organizate două „*mese rotunde*” privind problemele actuale ale „*Educației matematice*”: în *Europa*, referent *Marta Sanz – Solé* (președintă a Societății Matematice Europene) și, respectiv, în *România*, referent *Radu Gologan* (președinte al S.Ș.M.R.).

În concluzie, „*Congresul al VII-lea al matematicienilor români*”, a demonstrat încă odată înaltul nivel al „*școlii matematice românești*”, înscris în contextul cercetării matematice la nivel mondial.

Miron Oprea

MINUNEA LUI MORLEY

Miron Oprea



În 1899, prof. Frank Morley (1860-1937) de la Universitatea Americană John Hopkins dezvăluia unui cerc de prieteni următoarea proprietate: „*trisectoarele unghiurilor unui triunghi se întâlnesc două câte două în trei puncte care sunt vârfurile unui triunghi echilateral*”, așa cum se vede în figura alăturată:

Morley a publicat acest rezultat remarcabil din „*geometria triunghiului*” împreună cu modul prin care el l-a descoperit de-abia în 1904 în faimoasa revistă de cercetări matematice „*Transactions of the American Mathematical Society*”. Prin publicare și acceptare de lumea academică, proprietatea a devenit „*Teorema lui Morley*” și a stârnit interesul geometrilor pe întreg

secolul XX. După celebra teoremă a lui Pythagora, teorema lui Morley este proprietatea căreia i s-au dat cele mai multe demonstrații, unele de către matematicieni de mare prestigiu: *H. Lebesgue, J. Hadamard, John Conway, Alain Connes, Dan Barbilian, N. Teodorescu* etc.

Proprietatea trisectoarelor unghiurilor unui triunghi a fost descoperită de Morley în cursul căutării locului geometric al centrului unei cardioide variabile tangente la trei drepte oarecare (neconcurente) din plan. Morley a arătat că locul geometric este format din 9 drepte care sunt paralele trei câte trei, având, respectiv, ca direcții, laturile unui triunghi echilateral. Punctele de intersecție a acestor drepte corespund punctelor de contact dublu; ele sunt la fel ca punctele de intersecție a unor perechi de trisectoare a unghiurilor interne și externe ale triunghiului format de cele 3 drepte date.

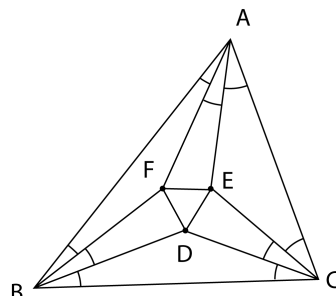


Fig. 1

Iată că această proprietate *simplică în formulare, dar profundă* în conținut a fost pusă în evidență într-un mod destul de complicat, exagerând puțin, am spune chiar *miraculos*. La fel este uimitor cum în atâtea secole de cercetări cu rezultate bogate în *Geometria triunghiului*, această proprietate a rămas în afară: *să fie oare de vină faptul că trisecțiunea unui unghi (cu rigla și compasul) este imposibilă*? Celebra lucrare „*La géométrie du triangle*” a ilustrului nostru matematician *Traian Lalescu* (apărută postum în 1937) nu face nici măcar o aluzie la această proprietate. Analog, ilustrul nostru geometru, profesorul *G. Țițeica*, în faimoasa sa „*Culegere de probleme de geometrie*” (apărută în mai multe ediții coordonate de renumiți geometri ca: *C. Ionescu Bujor, Gh. D. Simionescu*), nu menționează proprietatea lui Morley – nici măcar sub formă de problemă. *Să nu fi știut Țițeica sau coordonatorii de existența acestei proprietăți*? În plus, monumentală antologie „*Geometria elementelor remarcabile*” (1957) de *C. Mihăilescu*, nu pomeneste nici un cuvânt de teorema lui Morley. Însă merită menționat faptul că, în timp ce era student (1915), *Dan Barbilian* o sesizează în cercetările sale de geometrie, dar tot indirect (prin intermediul hipocicloidelor lui Steiner înscrise în $\triangle ABC$) (vezi [2]).

Toate cele de mai sus mi-au determinat titlul prezentei lucrări cu toate că în *matematică* nu există *minuni* în sens mistic, dar putem admite existența unor „*minuni în sens rațional*” (și Poincaré admitea astfel de minuni în știință). În lucrarea „*Eroare și paradox în matematică*” (1971) profesorul *Al. Froda* considera proprietatea lui Morley ca un *paradox* când o semnalează sub titlul „*Disimetrie implicând simetrie*” (vezi [4]). Mai semnalăm faptul că această teoremă a primit zeci de demonstrații

folosind o gama foarte variată de metode din: *geometria sintetică, trigonometrie, geometrie analitică, numere complexe, geometrie proiectivă, teoria grupurilor* (Alain Connes, 1998). Mai mult, faptul că demonstrația lui Morley din *Transactions...* este extrem de sofisticată și chiar de neînțeles (stil încâlcit, schimbări curente de notații pentru același obiect în cadrul demonstrației etc.), a stârnit în plus, un viu interes în a da demonstrații mai simple sau, uneori, în a cizela (simplifica) unele demonstrații date în reviste matematice de prestigiu pe parcursul întregului secol XX. De remarcat că aproape toate demonstrațiile au fost date pentru triunghiul echilateral cel mai mic - interior triunghiului ABC.

Pentru început vom face unele precizări de *Geometrie sintetică* cu privire la unghiuri.

Fiind dat un unghi $\angle AOB$ (determinat prin vârful O și laturile sale, *semidreptele* OA și OB), în cele ce urmează vom considera două tipuri de unghiuri: *unghiuri neorientate* în care $\angle AOB = \angle BOA$ și *unghiuri orientate* unde $\angle AOB \neq \angle BOA$ (deci există o *latură inițială* și o *latură finală* a unghiului).

În aceste cazuri, unui unghi $\angle AOB < 180^\circ$ (deci poate fi considerat ca unghi al unui triunghi ABC) îi corespund două unghiuri exterioare și două tipuri de trisectoare, așa cum se vede în Fig. 2 și Fig. 3.

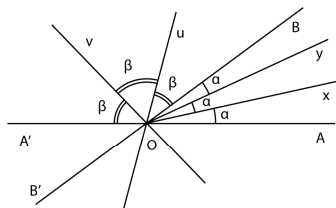


Fig. 2

Unghiul BOA' este exterior unghiului AOB cu trisectoarele interioare Ox, Oy și exterior Ou, Ov, a.i. $\alpha + \beta = 60^\circ$

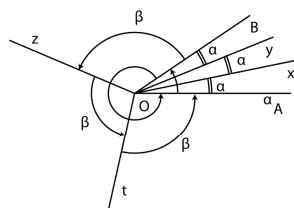


Fig. 3

Unghiul BOA (parcurs în sens direct) este exterior unghiului AOB, cu trisectoarele exterior Oz, Ot, a.i. $\alpha + \beta = 120^\circ$

În lumina celor de mai înainte vom avea pentru fiecare vârf al unui triunghi 6 trisectoare: 2 *interioare* și 4 *exterior* (corespunzătoare celor două tipuri de unghiuri exterioare unghiurilor triunghiului ABC).

În aceste condiții, există următoarele *triunghiuri Morley* (rezultate din trisectoare de același tip):

I) Triunghiuri Morley (rezultate din intersecția trisectoarelor interioare):

Din intersecția trisectoarelor unghiurilor interioare ale $\triangle ABC$, rezultă 12 puncte, toate situate în interiorul $\triangle ABC$. Aceste 12 puncte se grupează câte 3, formând vârfurile a 4 *triunghiuri echilaterale*, după cum urmează (Fig. 4)

1) punctele rezultate din intersecția celor mai apropiate de laturile $\triangle ABC$ ($\triangle DEF = tr. Morley$)

2) punctele rezultate din intersecția celor mai îndepărtate de laturile $\triangle ABC$ ($\triangle D'E'F' = tr. Morley$)

3) punctele rezultate din intersecția celei mai apropiate cu cea mai îndepărtată de laturile

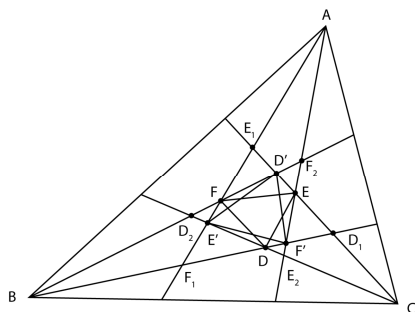


Fig. 4

$\triangle ABC (\triangle D_1E_1F_1 = \text{tr. Morley})$

4) punctele rezultate din intersecția celei mai îndepărtate cu cea mai apropiată de laturile $\triangle ABC (\triangle D_2E_2F_2 = \text{tr. Morley})$.

Se observă că triunghiurile Morley $D_1E_1F_1$ și $D_2E_2F_2$ au laturile așezate pe trisectoare.

II) Triunghiuri Morley (rezultate din intersecția trisectoarelor unghiurilor exterioare neorientate)

Cele 12 puncte de intersecție ale trisectoarelor se grupează câte 3 după aceleași criterii ca la **I)** și vor forma 4 triunghiuri Morley.

III) Triunghiuri Morley (rezultate din intersecția trisectoarelor unghiurilor exterioare orientate). Cele 12 puncte de intersecție se grupează câte 3 după aceleași criterii ca la **I)** și vor forma 4 triunghiuri Morley.

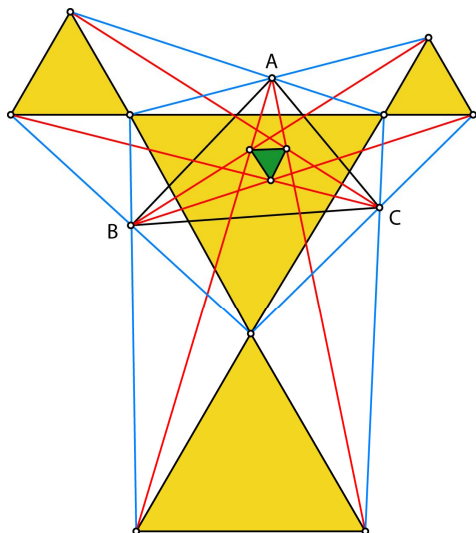


Fig. 5

cunoscute, publicate în reviste ca: *Math. Magazine*, *The Mathematical Gazette*, *Sphinx* etc.

1. **Demonstrația lui A. Letac** (Sphinx, 1939). Vom urmări pe Fig. 1. Pentru simplificare considerăm $\hat{A} = 3\alpha$; $\hat{B} = 3\beta$; $\hat{C} = 3\gamma$, astfel că $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$. Dacă R =raza cercului circumscris $\triangle ABC$, prin aplicarea teoremei sinusurilor în $\triangle BDC$ avem:

$$\frac{BD}{\sin \gamma} = \frac{BC}{\sin(\beta + \lambda)} \Rightarrow \frac{BD}{\sin \gamma} = \frac{2R \sin 3\alpha}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{2R \sin 3\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)} \Rightarrow BD = \frac{2R \sin 3\alpha \sin \gamma}{\sin(60^\circ - \alpha)}$$

Însă $\sin 3\alpha = 4 \sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$ și deci $BD = 8R \sin \alpha \sin \gamma \sin(60^\circ + \alpha)$.

Analog găsim că $BD = 8R \sin \gamma \sin \alpha \sin(60^\circ + \gamma)$. Putem considera în $\triangle ABC$ că $R=1$.

Din teorema cosinusului aplicată în $\triangle BDF$, obținem:

$$DF^2 = BD^2 + BF^2 - 2BD \cdot BF \cos \beta = 64 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma [\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \gamma) \cos \beta] \dots (*)$$

Din combinațiile **I)** cu **II)** cu **III)**, vor rezulta 108 puncte de intersecție care se grupează 6 câte 6 pe 9 drepte (3 câte 3 paralele) formând 27 de triunghiuri Morley dintre care 12 sunt cele din **I)**, **II)** și **III)** (ca mai sus). În acest mod rezultă o veritabilă *configurație* (constelație) *Morley* atașată unui $\triangle ABC$. În Fig. 5 reprezentăm 5 triunghiuri Morley rezultate din **I)** și **II)** – evident, nu sunt toate triunghiurile Morley posibile.

Pentru a demonstra proprietatea de echilateralitate a triunghiurilor Morley, două sunt căile regale (și evidente): fie se arată că *laturile sunt congruente*, fie că *unghiurile au ca măsură 60°* . De aici rezultă multitudinea de demonstrații trigonometrice a proprietății tr. Morley.

În cele ce urmează voi da câteva demonstrații *trigonometrice* și *geometrice* pentru triunghiul Morley DEF (cel mai mic situat în interiorul

$\triangle ABC$), care reprezintă cizelări a unor demonstrații

Cum: $(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \gamma) + \beta + 180^\circ$ aceste unghiuri pot fi considerate ca unghiurile unui triunghi, astfel că, după teorema sinusurilor: $\sin(60^\circ + \alpha); \sin(60^\circ + \gamma); \sin \beta$ sunt laturile acestui triunghi.

Aplicând teorema cosinusului acestui triunghi, avem

$\sin^2 \beta = \sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \gamma) - 2 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ + \gamma) \cos \beta$. Deci (*) este:

$DF = 8R \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$; și datorită simetriei sale rezultă: $(DF = BD = BF) \Leftrightarrow \triangle DEF =$ echilateral.

2. O demonstrație trigonometrică (pentru a arăta că $\widehat{EDF} = \widehat{DEF} = \widehat{EFD} = 60^\circ$)

Vom demonstra mai întâi următoarea *lemă*.

Fie MNP (Fig.6) un triunghi oarecare și $0^\circ < x < 90^\circ$; $0^\circ < y < 90^\circ$ astfel că

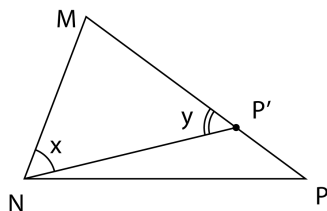


Fig. 6

$$\widehat{MNP} + \widehat{MPN} = x + y < 180^\circ \text{ precum și } \frac{MN}{\sin y} = \frac{MP}{\sin x},$$

atunci $\widehat{MNP} = x$ și $\widehat{MPN} = y$.

Demonstrație:

Construim NP', astfel încât $\widehat{MNP'} = x$; din ipoteză rezultă că

$\widehat{MP'N} = y$ și conform teoremei sinusurilor aplicată în $\triangle MNP'$, avem $\frac{MN}{\sin y} = \frac{MP'}{\sin x}$. Deci $MP = MP' \Leftrightarrow P' \equiv P$

și că $\triangle MNP = \triangle MNP'$ ceea ce înseamnă că $\widehat{MNP} = x$; $\widehat{MPN} = y$.

Am văzut în 1 că $BD = 8R \sin \alpha \sin \gamma \sin(60^\circ + \alpha)$ și

$BF = 8R \sin \gamma \sin \alpha \sin(60^\circ + \gamma)$. Deci avem că $\frac{BD}{\sin(60^\circ + \alpha)} = \frac{BF}{\sin(60^\circ + \gamma)}$; cum

$60^\circ + \alpha + 60^\circ + \gamma + 120^\circ + 60^\circ - \beta = 180^\circ - \beta = \widehat{BFD} + \widehat{BDF}$ și după lema de mai sus avem că

$\widehat{BFD} = 60^\circ + \alpha$; $\widehat{BDF} = 60^\circ + \gamma$. Analog avem:

$\widehat{AFE} = 60^\circ + \beta$; $\widehat{AEF} = 60^\circ + \gamma$; $\widehat{CDE} = 60^\circ + \beta$ și $\widehat{CED} = 60^\circ + \alpha$.

Urmează că $\widehat{EDF} = 360^\circ - (\widehat{BDF} + \widehat{BDC} + \widehat{CDE}) = 360^\circ - (60^\circ + \gamma + 180^\circ - \beta - \gamma + 60^\circ + \beta) = 60^\circ$.

Analog rezultă $\widehat{DEF} = \widehat{DFE} = 60^\circ$ și $\triangle DEF =$ echilateral.

3. Fie $\triangle A_1B_1C_1$ triunghi Morley (Fig. 5) obținut din intersecția trisectoarelor exterioare cele mai apropiate de laturile triunghiului ABC din cazul II). Să demonstrăm că $\triangle A_1B_1C_1$ ste echilateral.

Demonstrație: În $\triangle AB_1C$ scriem teorema sinusurilor

$$\begin{aligned} \frac{AB_1}{\sin \frac{\pi - 3\gamma}{3}} &= \frac{AC}{\sin \left[\pi - \left(\frac{\pi - 3\alpha}{3} + \frac{\pi - 3\gamma}{3} \right) \right]} \Leftrightarrow \frac{AB_1}{\sin(60^\circ - \gamma)} = \frac{2R \sin 3\beta}{\sin(60^\circ - \gamma)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{AB_1}{\sin(60^\circ - \gamma)} = \frac{8R \sin \beta \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ - \beta)}{\sin(60^\circ + \beta)} \end{aligned}$$

Deci $AB_1 = 8R \sin \beta \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)$ unde R = raza cercului circumscris triunghiului ABC și știm că $\sin 3x = 4 \sin x \sin(60^\circ + x) \sin(60^\circ - x)$. Analog găsim $AC_1 = 8R \sin \gamma \sin(60^\circ - \gamma) \sin(60^\circ - \beta)$. Aplicând teorema cosinusului în $\triangle AB_1C_1$, avem: $B_1C_1^2 = 64R^2 \sin^2 \beta \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma) + 64R^2 \sin^2 \gamma \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma) - 128R^2 \sin \beta \sin \gamma \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma) \cos(120^\circ + \alpha) = 64R^2 \sin^2(60^\circ - \beta) \sin^2(60^\circ - \gamma) [\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \cos(120^\circ + \alpha)]$
Cum $\beta + \gamma + 120^\circ + \alpha = 180^\circ$ [deci $\beta, \gamma, 120^\circ + \alpha$ sunt unghiurile unui triunghi ale cărui laturi sunt $\sin \beta; \sin \gamma; \sin(120^\circ + \alpha)$], avem $\sin^2(120^\circ + \alpha) = \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 \sin \beta \sin \gamma \sin(120^\circ + \alpha)$ și rezultă că $B_1C_1 = 8R \sin(60^\circ - \alpha) \sin(60^\circ - \beta) \sin(60^\circ - \gamma)$. Datorită structurii acestei expresii, avem că: $C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C_1$, adică $\triangle A_1B_1C_1$ = triunghi echilateral.

4. O reciprocă a teoremei Morley (prelucrare după [9])

Presupunem rezolvată problema pusă în teorema lui Morley, astfel că e dat $\triangle DEF$ echilateral în cadrul configurației Morley și să reconstituim $\triangle ABC$. Notăm $\widehat{AEF} = x; \widehat{CED} = y; \widehat{AFE} = z; \widehat{BFD} = t; \widehat{BDF} = u; \widehat{CDE} = v$ și $\widehat{A} = 3\alpha; \widehat{B} = 3\beta; \widehat{C} = 3\gamma$. (Vezi Fig.7)

Vom evalua succesiv unghiurile formate în punctele D, E, F, cunoscând că suma unghiurilor în jurul fiecărui punct este 360° , avem:

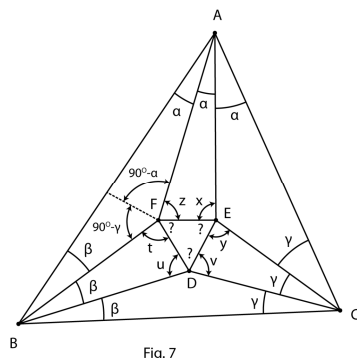
$$\widehat{AEC} = 180^\circ - (\alpha + \gamma); 360^\circ = 180^\circ - (\alpha + \gamma) + x + 60^\circ + y \Rightarrow x + y = 120^\circ + \alpha + \gamma; x + z = 180^\circ - \alpha.$$

Procedând analog și în celelalte puncte D și F, vom fi conduși să evaluăm unghiurile x, y, z, t, u, v din sistemul liniar:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x + y = 120^\circ + \alpha + \gamma \\ z + t = 120^\circ + \alpha + \beta \\ u + v = 120^\circ + \beta + \gamma \\ x + z = 180^\circ - \alpha \\ t + u = 180^\circ - \beta \\ y + v = 180^\circ - \gamma \end{array} \right\} \text{ care este nedeterminat, pentru că}$$

rămân invariant la transformările liniare

$$\text{de forma: } \left\{ \begin{array}{l} x = x' + k \\ y = y' - k \\ z = z' - k \\ t = t' + k \\ u = u' - k \\ v = v' + k \end{array} \right.$$



ceea ce înseamnă că deplasarea vârfurilor A, B, C pe arce ale cercurilor circumscrise triunghiurilor AEF, BFD, CDE în același sens de k grade, lasă invariante unghiurile α, β, γ și modifică unghiurile de la baze în conformitate cu transformările liniare date. Problema care se pune este *dacă*

prin aceste deplasări se păstrează și unghiurile ΔABC , fiindcă, în acest caz, unui Δ echilateral DEF dat, i-ar corespunde o infinitate de configurații Morley (adică o infinitate de triunghiuri ABC asemenea între ele).

Din sistemul liniar, prin scăderi de ecuații, obținem:

$$(x+y)-(t+u)=-60^0+\alpha+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow x-u=t-y \text{ și analog}$$

$$(u+v)-(z+x)=0; (z+t)-(y+v)=0. \text{ De unde } x-u=t-y=v-z=2\lambda \text{ cu } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\text{De asemenea } (x+z)-(x+y)=60^0-(\gamma+2\alpha) \text{ și } z-y=60^0-(\gamma+2\alpha)$$

$$\text{deci } z+t=z+y+2\lambda=120^0+\alpha+\beta.$$

$$\text{Din sistemul } \begin{cases} z-y=60^0-(\gamma+2\alpha) \\ z+y=120^0+\alpha+\beta-2\lambda \end{cases} \text{ obținem } y \text{ și } z.$$

Deci soluția generală a sistemului liniar este:

$$(2)x=60^0+\gamma+\lambda; y=60^0+\alpha-\lambda; z=60^0+\beta-\lambda; t=60^0+\alpha+\lambda; u=60^0+\gamma-\lambda; v=60^0+\beta+\lambda$$

Din cele de mai înainte rezultă următoarea

Teoremă: Fiind dat un triunghi echilateral DEF, o condiție necesară de existență a unui ΔABC având ca unghiuri $3\alpha; 3\beta; 3\gamma$ date, astfel încât trisectoarele sale din A, B, C unite câte două să determine acest triunghi echilateral DEF, este ca unghiurile triunghiurilor AEF, BFD și CDE, având ca baze laturile lui DEF și ca vârfuri vârfurile ΔABC , să verifice sistemul liniar (1) care admite ca soluție generală (2) cu $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considerând $\lambda = 0$, vom demonstra o teoremă reciprocă a teoremei lui Morley. În acest scop, vom reface configurația Morley pornind de la un triunghi echilateral DEF dat, pe baza soluției (2) a sistemului (1). Vom construi cu vârfurile D, E, F și în exteriorul triunghiului DEF, perechile de unghiuri $(x, y); (z, t); (u, v)$ având câte o latură comună EF, FD, DE asociată perechilor (x, z) , respectiv (t, u) , respectiv (v, y) . Fie A, B, C intersecțiile laturilor necomune ale unghiurilor (x, z) , respectiv (t, u) , respectiv (v, y) . Dacă demonstrăm că ΔABC are unghiuri în A, B, C pe $3\alpha, 3\beta, 3\gamma$ rezultă configurația Morley și, deci, *reciprocă teoremei lui Morley*. Construim unghiurile

$$x = \widehat{AEF} = 60^0 + \gamma; t = \widehat{BFD} = 60^0 + \alpha; v = \widehat{CDE} = 60^0 + \beta$$

$$z = \widehat{AFE} = 60^0 + \beta; u = \widehat{BDF} = 60^0 + \gamma; y = \widehat{CED} = 60^0 + \alpha$$

și vom avea deasemenea

$$\widehat{AFB} = 180^0 - (\alpha + \beta); \widehat{BDC} = 180^0 - (\beta + \gamma); \widehat{CEA} = 180^0 - (\alpha + \gamma)$$

Ducem în F, spre exterior, o semidreaptă FG care formează unghiurile: $\widehat{AFG} = 90^0 - \alpha$ și $\widehat{BFG} = 90^0 - \beta$, iar din A, respectiv B, perpendicularele AG și BH pe FG.

Vom dovedi că $G \equiv H$.

Observăm că în triunghiurile dreptunghice AFG și BFH avem $\widehat{FAG} = \alpha$ și $\widehat{FBH} = \beta$. Dacă H coincide cu G, dreapta AGHB va fi o latură a ΔABC , care admite pe AF și AE, pe BF și BD ca trisectoare.

Aplicând teorema sinusurilor în ΔAEF și BFD avem:

$$\frac{AF}{\sin x} = \frac{EF}{\sin \alpha} \text{ și } \frac{DF}{\sin \beta} = \frac{BF}{\sin u} \Rightarrow EF \sin x = AF \sin \alpha; BF \sin \beta = DF \sin u.$$

Însă $AF \sin \alpha = FG$ și $BF \sin \beta = FH \Rightarrow H \equiv G$ dacă $FG = EF \sin x = DF \sin u = FH$ adică $\sin x = \sin u$ (căci $EF = DF$). Regăsim astfel soluția (2).

Cu aceste valori, repetând raționamentul făcut în F și în punctele D și E, deducem că și BC și CA satisfac cerința configurației Morley, având ca trisectoare BF; BD; CE; CD.

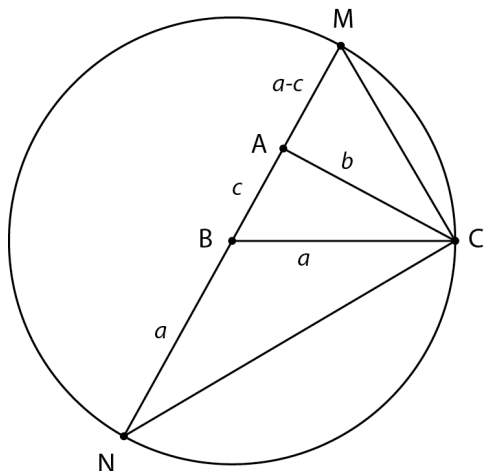
În acest mod am stabilit

Reciproca teoremei lui Morley: fiind dat un $\triangle DEF$ echilateral, există un singur $\triangle ABC$ cu $\hat{A} = 3\alpha$; $\hat{B} = 3\beta$; $\hat{C} = 3\gamma$ date, astfel încât trisectoarele lui să fie concurente două câte două în vârfurile D, E, F ale triunghiului dat.

Bibliografie:

- [1] Leon Bankoff: „A simple proof of the Morley Theorem”, Mathematical Magazine, vol. 74, Nr. 4, October 2001
- [2] D. Barbilian: „Pagini inedite” (vol. II), Ed. Albatros, Bucuresti, 1984
- [3] Constantin Cocea: „200 probleme din geometria triunghiului echilateral”, Ed. Asachi, 1992, Iasi
- [4] Al. Froda: „Eroare și paradox în matematică”, Ed. Științifică, Bucuresti, 1971
- [5] J. Hadamard: „Leçons de géométrie élémentaire. Géométrie plane”, Ed. Tehnică, Bucuresti, 1960
- [6] D.J. Newman: „The Morley Miracle”, The Mathematical Intelligencer, vol. 18, Nr.1/1996, New York
- [7] L. Niclescu și V. Boskoff: „Probleme practice de géométrie”, Ed. Tehnică, București, 1990
- [8] M. Pimsner și S. Popa: „Probleme de géométrie élémentaire”, Ed. Didactică și Pedagogică, Bucuresti, 1979
- [9] N. Teodorescu: „Metodologii de analiză și rezolvare a problemelor: teorema, reciproca și configurația lui Morley”, Gazeta Matematică, Nr.7/1983
- [10] V. Vodă: „Surprize în matematica elementară”, Ed. Albatros, București, 1981

O NOUĂ DEMONSTRAȚIE A TEOREMEI LUI PYTHAGORA



Fie $\triangle ABC$ cu $\hat{A} = 90^\circ$ și cu lungimile laturilor măsurate cu aceeași unitate: $|BC| = a$; $|CA| = b$; $|AB| = c$.

Construim un cerc cu centrul în unul din capetele ipotenuzei (de exemplu B) și cu raza $|BC| = a$. Fie MN diametrul cercului pe care este așezată cateta AB a $\triangle ABC$. Se observă că $\angle ANC = \angle ACM$ ca având laturile perpendiculare.

Deci $\triangle ACM \sim \triangle ANC$ și

$$\frac{b}{a+c} = \frac{a-c}{b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

Prof. Grațiana Calcan

După cum se știe *Matematica* (ca știință) s-a născut în *Grecia antică* (sec VI – II î.Cr.) prin apariția conceptului de *număr* (evident natural) și a conceptului de *figură geometrică*, constituindu-se, respectiv, în cele două discipline fundamentale: *aritmetica* și *geometria*. Mult mai târziu, în sec. XIV – XVI apare *algebra*, ca, începând cu sec. XVII, să apară și discipline hibride: *geometria analitică* (geometrie + algebră), *geometria diferențială* (geometrie+calcul diferențial), *geometrie integrală* (geometrie + calcul integral + calculul probabilităților) etc.

Secolele XVIII și XIX au reprezentat o veritabilă explozie a matematicii prin noi concepte care au dat naștere la noi discipline (cu aplicații spectaculoase): *ecuațiile diferențiale*, *calculul variațional*, *calculul vectorial și tensorial* etc. În a doua jumătate a sec. XX, asistăm la un proces de hibridizare care a luat amploare odată cu organizarea de olimpiade matematice la nivel național, dar, mai ales, internațional, când programele școlare de matematică diferă de la o țară la alta, astfel că problemele de concurs trebuie să solicite cunoștințe teoretice, ce sunt comune tuturor participanților ca: *algebră clasică*, *aritmetică* și *teoria numerelor*, *geometrie sintetică* și *trigonometrie*.

În acest mod s-a pus un accent deosebit pe problemele care solicită un „*raționament de bun simț*” din *combinatorică* (aspecte de *numărare*, de *colorare*, de *partiții* etc.) având suport geometric (configurații de puncte, de drepte, de figuri geometrice etc.) ceea ce a determinat o veritabilă disciplină matematică de sine stătătoare: *geometria combinatorică*.

Iată câteva exemple de astfel de probleme:

1) Fie $m+n$ puncte într-un plan. Să se arate că se poate trasa un cerc, care să conțină m puncte în interior și n puncte în exterior

2) Pe un cerc se consideră o mulțime finită de arce care nu acoperă cercul, astfel ca oricare două să aibă intersecția nevidă. Să se arate că toate arcele au un punct comun.

3) Fie A, B, C trei puncte necoliniare în spațiu. Să se arate că există un punct D în spațiu, astfel încât distanțele DA, DB și DC să fie numere naturale.

4) În câte părți este descompus un poligon convex cu n laturi de către toate diagonalele sale, dacă oricare trei (din diagonale) nu se intersectează.

Soluție: Se vede imediat că poligonul convex cu $n+1$ laturi $A_1A_2A_3.....A_nA_{n+1}$ este descompus de diagonalele A_1A_n în poligonul cu n laturi $A_1A_2...A_n$ și în $\Delta A_1A_nA_{n+1}$. Considerând cunoscut numărul $P_{(n)}$ de părți în care se descompune poligonul cu n laturi $A_1A_2...A_n$ cu ajutorul diagonalelor sale, să calculăm câte părți se adaugă datorită asocierii vârfului A_{n+1} (acest număr este cu o unitate mai mare decât numărul părților în care sunt împărțite diagonalele ce ies din vârful A_{n+1} de către celelalte diagonale. În acest fel, vom găsi relația):

$$P(n+1) = P(n) + (n+1) + 1(n-2) + 2(n-3) + ... + (n-3)2 + (n-2)1 =$$

$$= P(n) + (n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = P(n) + \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{4n}{3} - 1$$

Sumând valorile $P(n), P(n-1), ..., P(4)$ obținem:
$$P(n) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

5) Să se arate că un poliedru convex care are 6 vârfuri și 12 muchii, are toate fețele triunghiuri.

Soluție: Folosind relația lui Euler $v + f = m + 2$, din $v=6$ și $m=12$, rezultă $f=8$. Deoarece fiecare față are cel puțin 3 muchii și fiecare muchie se numără de două ori, avem că $2m \geq 3f$, egalitatea realizându-se când fiecare față are exact 3 muchii (este triunghi). În cazul nostru, $2m=24=3f$.

6) Fie un cerc (γ) în plan și $f : (\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Să se arate că există două puncte diametral opuse pe cerc în care funcția ia valori egale.

Soluție. Fie cercul $(\gamma) = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\} = \{(x, y) | x = \cos t; y = \sin t, t \in \mathbb{R}\}$. Continuitatea funcției f revine la continuitatea funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $g(t) = f(M(t))$ unde $M(t) = (\cos t, \sin t)$. Com funcția g este periodică cu perioada 2π , vom considera funcția continuă: $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $h(t) = g(t) - g(t + \pi)$ pentru care avem:

$h(o) = g(o) - g(\pi); h(\pi) = g(\pi) - g(2\pi) = g(\pi) - g(o) = -h(o)$, ceeace înseamnă că $h(o) \cdot h(\pi) \leq 0$. Există, deci $t_0 \in [0, \pi]$, a.î $h(t_0) = 0$ sau $g(t_0) = g(t_0 + \pi)$ sau $f(M) = f(M')$ unde M' este diametral opus lui M , ambele pe (γ) .

7) Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare în spațiu. Să se determine numărul paralelipipedelor ce se pot forma, astfel ca cele patru puncte să fie printre vârfurile paralelipipedelor (Răspuns: 29).

Pentru informații mai ample, recomandăm cititorului câteva lucrări în limba română:

- [1] Ioan Tomescu: „Introducere în combinatorică” (Ed. tehnică, 1972)
- [2] Vasile Pop: „Geometrie combinatorică” (Ed. Mediamira, 2010)
- [3] A.M. Iaglom, I.M. Iaglom: „Probleme neelementare tratate elementar” (Ed. tehnică, 1962)
- [4] M. Pimsner, S. Popa: „Probleme de geometrie elementară” (Ed. didactică și pedagogică, 1979)
- [5] L.I. Golovina și I.M. Iaglom: „Inducția în geometrie” (Ed. Tehnică, 1964)

SESIUNEA DE COMUNICĂRI METODICO – ȘTIINȚIFICE A PROFESORILOR DE MATEMATICĂ din

PRAHOVA, Ediția a XXXVII-a, SINAIA - 29 mai 2011

Lucrări în plen

- ☐ *Cuvânt de deschidere*
– Prof. Nicolae Angelescu, SSM Prahova
- ☐ *Mesaj din partea SSM din România*
– Prof. dr. Radu Gologan, Universitatea București
- ☐ *Tezaur folcloric (II): 10 grupuri numerice familiare și izomorfismele dintre ele*
– Prof. univ. dr. Toma Albu, Institutul „Simion Stoilow”, Academia Română, București
- ☐ *Câteva completări la un set de exemple și contraexemple*
– conf. dr. Andrei Vernescu, Univ. „Valahia”, Târgoviște
- ☐ *Criptografia, o motivație pentru învățarea matematicii*
– conf. univ. dr. Cătălin Gherghe, Universitatea București
- ☐ *Cultura și Educația Matematică* – Prof. dr. Doru Ștefănescu, Universitatea București

- *Rotația în probleme de loc geometric*– Prof. Anghel Dafina, C. N. „N. Iorga”, Vălenii de Munte
- *Dimitrie Pompeiu – institutor la Ploiești între 1893-1898*
– conf. univ. dr. ing. Alexandru Popa – UPG Ploiești
- *Generalități despre curbe algebrice plane*– Dr. Alexandru Popescu Zorica, București
- Secțiunea A. Moderator: Nicolae Angelescu, Doru Ștefănescu, Constantin Udriște**
- *Inegalități directe și inverse pentru mediile clasice*
– Prof. dr. Dorin Marghidan, C.N. Al I Cuza Corabia , Olt
- *Aplicații liniare pe multi-spății vectoriale*– Prof. Constantin Scheau – CN „Mihai Viteazul”, Ploiești
- *Probleme de dobândă* - Prof. Olimpia Popescu, Ploiești
- *Determinantul folosit în capitole ale analizei matematice*
– Prof. Ioan Olteanu și prof. ing. Octavian Pică, Sibiu
- *Situații practice studiate cu ajutorul ecuațiilor diferențiale*
– Prof. Ioan Olteanu – Colegiul Tehnic „Independența”, Sibiu
- *Aplicații ale numerelor complexe în calculul unor sume și produse* – prof. Roxana Soare - CN Nichita Stănescu, Ploiești
- *Câteva relații vectoriale cu centrul de greutate*– Prof. Romelia Scheau – CN „Al. I. Cuza”, Ploiești
- *Aplicații ale dezvoltării în serie TAYLOR pentru funcții de n variabile*- Prof. Vasile Coman, C. N. „N. Iorga”, Vălenii de Munte
- *Principiul lui Dirichlet. Aplicații.* – Prof. Dan Coma, Vădăstrița, Olt
- Secțiunea B. Moderator: Andrei Vernescu, Constantin Popovici, Sorin Bucur**
- *Numere perfecte*– Prof. univ. dr. Constantin Popovici – Universitatea București
- *Observații asupra unor inegalități*– Prof. Constantin Rusu, președinte SSM Filiala Râmnicu Sărat
- *Segmente Simson – Wallace*– prof. Adrian Stroe – Liceul Teoretic „Mihai Viteazul”, Caracal
- *O clasă de proprietăți în triunghiuri, generate de cerine transversale*– Prof. Ecaterina Butac, Plopeni
- *Matematică și Artă*– prof. Cristina Costandache – Lic. cu Program Sportiv, Roman
- *Asupra Universului Matematic al Civilizației Umane*– Prof. Georgeta Filipescu, Liceul “Carmen Sylva”, Ploiești
- *Benjamin Franklin la interfața matematicii cu fizica* – Prof. Grațiana Calcan, Școala „C. Stere”, Bucov
- *Matematica-punte de legătură între discipline*- Prof. Udma Arleziana, Colegiul Tehnic “Anghel Saligny”, Roșiori de Vede
- *Modalități de individualizare a învățării în lecția de matematică*
– înv. Maria Nour – Școala Nr.41 ”Sf. Grigore Teologul”, Galați
- *Profesorul Mihai Gavriluț la aniversarea a peste 50 de ani de cariera matematică*
– Prof. Marioara Costăchescu - Liceul cu Program Sportiv, Roman