

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU³⁾

Clasa a IX-a

- a) Să se determine numerele x și y , știind că are loc egalitatea
1.
$$\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \left(y^2 + 1 + \frac{1}{y^2 + 1} \right).$$
- b) Se pot determina numerele x și y din egalitatea $\frac{2xy}{1+x^2y^2} = \frac{1}{2} \left(y^2 + 1 + \frac{1}{y^2 + 1} \right)$?
conf. univ. dr. Andrei Vernescu
2. Fie $n \geq 2$ și $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < 1$, $0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n < 1$. Demonstrați că dacă există $x \in (0, 1)$ astfel încât

$$0 < [x + a_1] + [x + a_2] + \dots + [x + a_n] = [x + b_1] + [x + b_2] + \dots + [x + b_n] < n$$

 dacă și numai dacă există $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ astfel ca $\max\{a_i, b_i\} < \min\{a_{i+1}, b_{i+1}\}$.
conf. univ. dr. Cristinel Mortici
3. Fie $\triangle ABC$ și $\triangle DEF$ două triunghiuri cu proprietatea că au același ortocentru. Dacă O_1 și O_2 sunt centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC , respectiv DEF , să se arate că:
 a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$; b) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CD}$.
. Lucian Tuțescu, Craiova, Ion Nedelcu, Ploiești
4. Dacă a, b sunt numere reale fixate, să se demonstreze că cel puțin una dintre ecuațiile :
 $ax^2 + 2bx + 1 = 0$, $x^2 + 2ax + b = 0$, $ax^2 + 2x + b = 0$ are rădăcini reale.
dr. Dorin Mărghidanu, Corabia
5. Să se rezolve ecuația: $\left[\frac{3x-1}{4} \right] + \left[\frac{9x+1}{12} \right] = 5x + 2 - \left[\frac{9x+5}{12} \right]$, unde $[a]$, reprezintă partea întreagă a numărului a .
Mariana Mitea, Cugir
6. Se dau numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$ sau $a, b, c \in (-\infty, 0)$. Să se demonstreze că cel puțin una dintre ecuațiile:
 $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ nu are soluții reale.
Marian Teler, Profesor Costești, județul Argeș
7. Să se rezolve ecuația: $\frac{x+y}{2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + 3 = \sqrt{3x-2} + \sqrt{3y-2}$.
Mariana Mitea, Cugir
9. Dacă $a \in \mathbb{Z}$ arătați că ecuația:
 $3x^5 + 2ax^4 - (2a+1)x^3 + (2a+3)x^2 + 3x + 2a + 5 = 0$, nu admite rădăcini întregi.
Cezar Oțunu, Daneți, Dolj

³⁾ Se primesc soluții până la 25 octombrie 2011

* Problemele 1-4 au fost propuse la Concursul „ Danubius”, 2011

Clasa a X-a

1. a) Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = x + \log_2 x$. Să se demonstreze că funcția f este bijectivă.
 b) Să se rezolve ecuațiile $f(x) = 1$, $f(x) = 3$, $f(x) = 6$, $f(x) = 11$. Se consideră apoi numerele 1, 3, 6, 11, ..., definite după regula dată de egalitățile precedente. Care este numărul următor în această succesiune?

conf. univ. dr. Andrei Vernescu

2. Fie z_1, z_2, z_3 numere complexe ce satisfac relațiile :

$$1 + z_1 z_2 z_3 = 0, \quad (1)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}. \quad (2)$$

Să se demonstreze că produsul a două numere din $\{z_1, z_2, z_3\}$ este egal cu unitatea .

prof. dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

3. Fie $z \in \mathbf{C}$ cu proprietatea că $(\exists) m, n \in \mathbf{N}^*$ prime între ele astfel încât z^m și z^n sunt numere reale. Să se arate că $z \in \mathbf{R}$.

prof. Lucian Tuțescu, Craiova

4. Să determine toate funcțiile $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, pentru care avem ,
 $f(x + y) = a^y f(x) + b^x f(y)$, oricare ar fi x, y numere reale , iar a, b nur
 reale date , pozitive și distincte .

Dorin Mărghidanu, Corabia

5. Fie numarul : $a = \sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}$

a) demonstrați ca $a \in \mathbf{N}$

b) pentru $a = 4$ rezolvați ecuația $[a + x] + \log_3[a + x] + 3^{[a+x]} = 31$.
 (prin $[x]$ s-a notat partea întreaga a numărului real x)

Radu Nicolae, Ploiești

7. Sa se rezolve in R ecuatia:

$$\sqrt{x^2 + 1} + \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{2k}{x^2 + 1} \right)^2 = 3$$

Mihai Ozunu, Danești, Dolj

8. Fie $z \in \mathbf{C}^* - \{0, 1\}, n \in \mathbf{N}^*$

a) Sa se determine z stiind ca z^n, z^{n+1}, z^{n+2} sunt afixe ale varfurilor unui triunghi dreptunghic.

b) Sa se reprezinte geometric imaginile punctelor obtinute.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

*** Problemele 1-4 au fost propuse la Concursul „ Danubius” ,2011**

Clasa a XI-a

1. Să se arate că ecuația $2^x = x^2$ are exact trei rădăcini reale, dintre care una este irațională.
conf. univ. dr. Andrei Vernescu

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă. Demonstrați că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$, există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} \frac{f'(c) - f'(a)}{c-a}.$$

conf. univ. dr. Cristinel Mortici

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ și funcția $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, de două ori derivat pe $(a, b) \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in (a, b)$, cu proprietățile :

i) f este convex - descrescătoare pe (a, x_0) ;

ii) f este concav - crescătoare pe (x_0, b) .

Să se demonstreze că f nu este derivabilă în x_0 .

dr. Dorin Mărghidanu, Corabia

4. Se dă matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu următoarele proprietăți:

i) Elementele de pe coloana principală sunt egale,

ii) Sumele elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană sunt egale cu 2008.

Să se demonstreze că $\det(A) \geq 0$. În ce situație are loc egalitatea ?

Marian Teler, Costești

5. Determinați matricele $A, B \in M_2(N)$ astfel încât $AB = I_2$

Marian Teler, Costești

6. a. Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{an+1}{2n+3} \right)^{2007n}$, (Discuție după $a \in (0, \infty)$)

b. Fie $a_n = \sum_{k=1}^n \log_{\frac{1}{3}} \left[\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2} \right]$, Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

Boncescu Florin Cristian, Ciuleanu Ionela, Studenți București

7. Fie matricile $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Să se demonstreze că pentru orice

$n \in \mathbb{N}^*$ există $a_n \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n - B^n = a_n(A - B)$.

Cătălin Năchilă, Ploiești

8. Fie matricile inversabile A și $B \in M_n(\mathbb{C})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ astfel încât

$AB + B^{-1}A^{-1} + I_n = O_n$. Să se demonstreze că matricea $A + B + A^{-1}B = O_n$.

Petre Năchilă, Ploiești

Problemele 1-3 au fost propuse la Concursul „ Danubius”, 2011

Clasa a XII-a

1.

Rezolvați în S_5 ecuația:

$$x^{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prof. Liviu Smarandache, Craiova

2.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuă care admite o primitivă F cu $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 0$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

cu proprietatea că $g(0) = F(0)$ și

$$f\left(\frac{2x+y}{3}\right) \leq \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \leq f\left(\frac{x+2y}{3}\right), \quad \forall y > x$$

Demonstrați că g este continuă și orice primitivă a sa este crescătoare.

conf. univ. dr. Cristinel Mortici

3.

Se consideră șirul de numere reale $(I_n)_{n \geq 1}$, definit de egalitățile

$$I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$$

a) Să se arate că

$$(1) \quad 1 - \ln 2 < I_1 < \frac{1}{2};$$

$$(2) \quad 1 - \frac{\pi}{4} < I_2 < \frac{1}{3}.$$

b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să i se determine limita

conf. univ. dr. Andrei Vernescu

4.

$$\text{Fie } A(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ și } M = \{A(m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$$

a) Să se demonstreze că $A(m) \cdot A(n) \in M, (\forall) m, n \in \mathbb{Z}$

b) Să se demonstreze că $(M, \cdot)$ este grup comutativ

c) Să se demonstreze că grupul $(M, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$

Marian Teler, Profesor Costești, Județul Argeș

5.

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietățile

a) $f(\sin x) \in \mathbb{Q}, (\forall) x \in \mathbb{R}$,

b) Există $a, b \in [-1, 1]$ astfel încât $f(a) \neq f(b)$.

Să se demonstreze că funcția f nu admite primitive.

Marian Teler, Costești

*** Problemele 1-3 au fost propuse la Concursul „Danubius”, 2011**

