

PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL GIMNAZIAL²⁾

CLASA a V-a

1. Care sunt numerele naturale mai mici decât 500 care împărțite la 13 dau un cât egal cu triplul restului .

Nicolae Scuratorschi, Constanța

2. Se considera sirul:

3;7;11;15;....

a) Completați sirul cu încă 3 termeni;

b) Care este al 2005-lea termen din sir?

Calculați suma primilor 40 de termeni din sir.

Ștefan Smarandoiu, Rm. Valcea

3. Completați tabelul:

			12				3				
--	--	--	----	--	--	--	---	--	--	--	--

astfel încât suma numerelor din oricare trei casute vecine să fie aceeași, iar suma tuturor numerelor să fie 276. Justificați!

Ștefan Smarandoiu, Rm. Valcea

4. În urmă cu 35 de ani, unchiul Marcel avea vârsta nepoatei de acum. Determinați vârsta, în prezent, a fiecăruia, știind că peste 10 luni, nepoata va împlini o vârstă de 7 ori mai mică decât cea a unchiului.

Eugen Nita, Ploiești

5. Calculați: $a-b$; $4 \times b - 6 \times a$ și $7 \times b + 7 \times a$, unde: a este numărul numerelor de două cifre care au suma cifrelor mai mare decât produsul lor, iar, b este numărul numerelor de două cifre care au produsul cifrelor mai mare decât suma lor.

Ion Marcel Neferu, Dragășani

6. Suma a trei numere naturale este 480. Dacă împărțim al doilea număr la primul obținem câtul 3 și restul 9, iar dacă împărțim al treilea număr la al doilea, obținem câtul 2 și restul 3. Aflați cele trei numere.

Nicolae Scuratorschi, Constanța

7. Patru oameni se află la intrarea unui tunel întunecos, prin care nu pot trece simultan decât 2 oameni. Ei au nevoie de 1,2,5 respectiv 10 minute pentru a traversa tunelul și dispun de o torță care arde doar 17 minute. Cum pot traversa cei patru oameni tunelul?

8. Într-o pauză numărul elevilor plecați în recreație este dat de diferența dintre numărul băieților rămași în clasă și cel al fetelor rămase în clasă. Știind că în clasă au rămas 18 băieți, aflați numărul de elevi ai clasei.

Dogaru Alexandru, Dragășani

9. a) Câte numere naturale cuprinse între 19 și 91 folosesc în scrierea lor cifra 5?
b) În câte zerouri se termină numărul $21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 89$?

Nicolae Ivășchescu, Craiova

10. Fie numărul $a = 2581114 \dots 2006$, format prin alăturarea cifrelor numerelor din șirul 2, 5, 8, 11, 14, ..., 2006.

1) Scrieți următoarele 3 numere ce urmează în șir după 14.

2) Calculați suma $2+5+8+11+\dots+119$.

3) Câte cifre are numărul a ?

Ștefan Smarandoiu, Rm. Valcea

2) Se primesc soluții până la 10 noiembrie 2011

CLASA a VI-a

1. Numerele naturale $\overline{abc}$ scrise în baza 10, împărțite la 40 dau restul egal cu 30.

- a) Câte astfel de numere sunt?
- b) Aflați suma lor.

Dănoiu Adriana, Pânșești Măglași, Jud. Vâlcea

2. La un turneu de tenis participă 64 de jucători. În fiecare rundă se desfășoară 32 de meciuri între jucători care au același punctaj. Câștigătorul unui meci primește câte un punct. Turneul se încheie când există un jucător al cărui punctaj diferă de punctajele celorlalți jucători.

- a) Câte runde se desfășoară în cadrul turneului ?
- b) Câte meciuri se desfășoară în cadrul turneului ?
- c) Câți participanți au obținut, în final, 3 puncte ?

Mircea Fianu - București

3. Fie mulțimea $A = \left\{ 5^a \cdot 7^b \mid a, b \in \mathbf{N} \right\}$.

- a) Determinați cele mai mici patru elemente din A care au proprietatea că sunt pătrate perfecte.
- b) Demonstrați că printre oricare 5 elemente din mulțimea A există cel puțin două al căror produs este pătrat perfect.

Florin Smeureanu și Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea

4. Se știe că $7^{2010} = \overline{a_n \dots a_2 a_1 a_0}$. Calculați $\overline{a_1 a_0} = ?$

Ștefan Smarandoiu, Rm. Valcea

5. Aflați numerele $\overline{ab}$ pentru care avem $a + b + a^b + b^a = \overline{aa}$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova

6. Găsiți numărul natural n pentru care avem:

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1004,5}{2001}.$$

Nicolae Ivășchescu, Craiova

7. Fie numărul $A = 101001000100001\dots$

- a) Dacă A se termină cu cifra 1, iar cifra 1 apare scrisă de 2011 ori în A , de câte ori este scrisă cifra 0?
- b) De câte ori apare cifra 0 în scrierea numărului A dacă acesta are 2011 cifre?

Marius Perianu, Slatina

8. Aratati că : a) $1 + 3^5$ se divide cu 61.

b) $3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2006}$ se divide cu 61.

Gh.Achim, Mizil

9. Iepurele Rică are săritura de 72 cm, iar broșcuța Oac de 20 cm. Ei fac o întrecere pe nisip. După câte sărituri, de la plecare, broșcuța Oac nimerește peste urmele iepurelui?

Mariana Fleancu, Câmpulung

10. Ionel are același număr de luni cât are bunicul sau de ani, și același număr de zile câte săptămâni are tatăl său. Știind că toți trei au împreună 140 de ani, ce vârstă au ei.

Ionela Ionescu, Vălenii de Munte

CLASA a VII-a

1. a) Dacă x și y sunt direct proporționale cu 2 și respectiv 5, aflați cât la sută din y reprezintă x .

b) Arătați că:
$$\frac{1}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 99 \cdot 101} < \frac{1}{60}$$

- c) Dacă x, y, z sunt numere naturale nenule astfel încât
$$\frac{xy}{x+y} = \frac{yz}{y+z} = \frac{zx}{z+x},$$
 atunci arătați că $x = y = z$.

Cecilia Diaconescu- Pitești, Manuela Oncescu - Câmpulung

2. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ din relația: $(2^2)^{998} + 16^{449} = 2^n$, și apoi calculați ultima cifră a numărului: $x = 2001^n + 2002^n + 2003^n + 2004^n$

Dumitru Oprea, Dragodănești, Dambovița

3. Un triunghi ABC are latura AC de lungime 6cm. Fie punctul D pe latura (BC), astfel încât $DC = 3\text{cm}$, $BD = 9\text{cm}$. Știind că $AD = 4\text{cm}$, să se calculeze AB.

Vasile Șerdean, Camelia Magdas, Cluj

4. Doua lumânări au aceeași lungime și ard uniform, dar prima se consumă în 5 ore iar a doua în 6 ore. Dacă ele sunt aprinse simultan, după cât timp prima va avea lungimea egală cu dublul lungimii celei de a doua?

Iuliana Turcu și Adrian Turcu, Găiești

5. Calculați:
$$\frac{10}{2001} + \frac{20}{2001} + \frac{30}{2001} + \dots + \frac{20000}{2001}.$$

Viorica Dina, Moreni

6. Dacă $x, y, z, a, b, c \in \mathbb{N}^*$ și $x^{2a} \cdot y^b = 2^{13}$, $y^{2b} \cdot z^c = 2^7$ calculați $x^{2a} \cdot y^{7b} \cdot z^{3c}$.

Iuliana Turcu și Adrian Turcu, Găiești

7. Un număr natural împărțit la 15 dă restul 11, iar împărțit la 8 dă restul 3, arătați că $n+7$ se divide cu 6.

Gheorghe Achim, Mizil

8. Comparați numerele: $a = 9^{10} + 3^{30}$ și $b = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{30}$.

Gabriel Răducan, București

9. Demonstrați că dacă nouă numere raționale pozitive sunt **respectiv** direct proporționale cu numerele 1,1,2,6,12,15,25,30 și 44 atunci suma pătratelor primelor opt numere este egală cu pătratul celui de-al noulea număr.

Nicolae Ivășchescu, Craiova

10. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și S suma resturilor obținute prin împărțirea numerelor 1,2,..., 1000 la n^2 .

a) Calculați S în cazul $n=10$;

b) Aflați n astfel încât $S=1500$.

Iuliana Turcu și Adrian Turcu, Găiești

11. Pe tablă este scris numărul 18. La fiecare minut numărul se înmulțește sau se împarte fără rest fie la 2 fie la 3, iar rezultatul se scrie pe tablă în locul numărului inițial.

Să se arate că numărul scris pe tablă după 60 minute nu poate fi 96.

Vasile Șerdean, Gherla, Cluj

CLASA a VIII-a

1. Se consideră numărul „ n ”,

$$n = \frac{a(a+1) + (a+1)(a+2) + (a+2)(a+3)}{2}; a \in \mathbb{N}.$$

Aflați forma numerelor naturale „ a ”, pentru care numărul „ n ” devine număr natural impar.

Dănoiu Adriana, Păușești Măglași, Jud. Vâlcea

2. Să se calculeze:

a) $(2\sqrt{7} + 3\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{7} - 2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{7} + 3\sqrt{5})(2\sqrt{7} - 3\sqrt{5})$

b) $\left(\frac{7}{\sqrt{11}+2} - \frac{2}{\sqrt{11}-3}\right) : \left(\frac{2}{\sqrt{7}} + \frac{4}{\sqrt{63}} - \frac{1}{\sqrt{28}}\right)$

Emanuel Matei, Pitești

3. Găsiți numerele naturale $\overline{abc}$ astfel încât să avem $\sqrt{\overline{abc}} + \sqrt{c} = a + b + c$.

Nicolae Ivășchescu, Craiova

4. Fie $p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} + \dots + \frac{\sqrt{1936}-\sqrt{1935}}{\sqrt{1936 \cdot 1935}}$; și $p = \frac{a}{b}$; $(a;b) = 1$; Calculați $a+b$.

Florin Smeureanu, Rm. Vâlcea

5. În triunghiul dreptunghic ABC, AB = 45 cm și AC = 60 cm. Știind că AD este perpendicular pe BC, D ∈ BC, M ∈ AD astfel încât AM = CN, unde N ∈ DC astfel încât ND = NC și BM perpendicular pe AN. Să se afle:

a) Lungimea laturii BC;

b) Aria patrulaterului AMNC și distanța de la M la AC;

Luminita Cornei, Valenii de Munte

6. Calculați aria unui triunghi ABC ale cărui înălțimi au lungimile de 24 cm, 30 cm și 40 cm.

Iuliana Turcu și Adrian Turcu, Găești

7. Arătați că pentru oricare $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ avem :

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right) \geq \frac{64}{(a+b)(a+c)(c+b)}$$

Nicolae Ivășchescu, Craiova

8. Fie ABCD trapez dreptunghic cu $AB \parallel CD$ și $AB < CD$, $AC \perp BD$ și $m(\angle BDC) = 60^\circ$.

a). Demonstrați că $CD = 3AB$;

b). Fie O intersecția diagonalelor trapezului. Dacă P este simetricul lui D față de O și S este mijlocul segmentului [AC], atunci dreapta PS împarte triunghiul BOC în două suprafețe de arii egale.

Elena Tudor, Sinaia

9. Pe circumferința unui cerc se consideră așezate 100 de numere naturale care au suma 506. Să se demonstreze că există cel puțin două perechi de numere vecine astfel încât suma elementelor fiecărei perechi să fie cel puțin egală cu 10.

Petre Năchilă, Ploiești

10. Fie A un număr natural având 2011 cifre dintre care 404 cifre de 2; 404 cifre de 6 și restul de cifre egale cu 1. Arătați că $\sqrt{A}$ este un număr irațional.

Ioana Crăciun și Gheorghe Crăciun, Ploiești

