

**CONTINUITATE ȘI TRADIȚIE LA COLEGIUL MILITAR „DIMITRIE  
CANTEMIR” BREAZA**

---

Profesorii de matematica din județul Prahova, ca și mulți din țară, știu că la Colegiul Militar „Dimitrie Cantemir” din Breaza a funcționat și funcționează una dintre cele mai valoroase catedre de matematica din România. Încă de la reînființare, din 1950, acolo au poposit absolvenți de frunte ai facultăților de matematica de la marile universități din țară. În afara de temeinică pregătire a celor încadrați dealungul timpului, acolo s-a creat o atmosferă unică în felul ei, de apropiată colaborare, de stimulare a interesului pentru pregătirea elevilor, de respect și pretuire reciprocă, atmosferă care s-a transmis de la o generație la alta. La aceasta a contribuit atât stabilitatea unor profesori (unii au predat de la absolvirea facultății și până la pensionare, Baghina Vasile, Hadarca Iacob, Toma Nicolae, Ungureanu Ion, Sbarcea C-tin, Pantea Maria, Ion Stanciu) dar și modelul oferit de mari matematicieni ai României care au debutat ca profesori de matematica în liceele militare precum: Octav Onicescu, Eugen Rusu, N. Mihaileanu, Cezar Cosnita, Grigore Zăpan s.a.

Se știe că anul acesta, când s-au împlinit o sută de ani de activitate neîntreruptă a Societății de Științe Matematice din România, a fost declarat «Anul matematicii în școala românească». În acest cadru, în ziua de 29 noiembrie 2010, la Colegiul militar «Dimitrie Cantemir» din Breaza s-a organizat o manifestare deosebită, dedicată acestui eveniment, în cadrul căreia un rol însemnat a revenit elevilor liceului, care au studiat elemente de istoria matematicii, unele probleme celebre de matematica, modelele morale de perseverență și sacrificiu ale unor matematicieni români s.a. Invitat de onoare la această activitate a fost prof. univ. dr. Miron Oprea, președintele Fundației Oamenilor de Știință Prahova.

Comunicări precum, «Ion Ionescu fondatorul Gazetei Matematice» (elev Mihai Nicoleta și Codorcea Iuliana), «Dan Barbilian poet și matematician» (elev Mihai Alexandra și Badea Silviu) «Traian Lalescu, nume de rezonanță în matematica românească» (elev Vasile Luiza și Neacsu Bogdan) iar într-o rubrică intitulată «Recreații matematice» s-au prezentat vorbe de duh, sau fraze cu mult talc rostite de matematicieni ca, Newton, Einstein, Grigore Moisil s.a. (elevii Panait Florin și Preda Anca). Au mai susținut comunicări elevii: Bozdoc Florin, Partene Cosmin, Panait Florin și Preda Anca.

Tot ei, elevii au fost cei care au înatâmpinat cu căldură și respect pe foști profesori ai liceului, astăzi pensionari, aflați la vârsta senectutii, care cu emoție au revăzut locul în care și-au pus toată priceperea și tot sufletul pentru educația și instruirea celor în nădejdea cărora și-au încredințat apărarea patriei lor, România, profesorii pensionari: Vasile Baghina, Olimpia Popescu, Nicolae Toma, Ion Ungureanu, Constantin Sbarcea, Maria Pantea, Gheorghe Pantea, Ion Stanciu.

Comandantul liceului, colonel dr. Constantin Moraru, ca și directorul adjunct, prof. dr. Aurel Soare au ținut să fie prezenți la această activitate, să asigure pe foști profesori de continuitatea și păstrarea valoroaselor tradiții ale liceului.

La Colegiul militar «Dimitrie Cantemir» s-a creat o tradiție ca, periodic, actuala catedră să se întâlnească cu foștii profesori ai liceului, să-și împartășească din experiența proprie. Profesorii pensionari au prezentat o istorie «trăită pe viu» în predarea matematicii, ca și problemele specifice muncii într-o unitate ca specific militar, concluzia lor că nicio altă formă de învățământ nu poate asigura o mai bună pregătire a viitorilor militari de carieră. Prin aceste întâlniri se reanodă permanent respectul celor de azi față de munca înaintașilor lor.



Comandantul liceului,colonel dr .Constantin Moraru ,ca si directorul adjunct, prof.dr Aurel Soare au tinut sa fie prezenti la aceasta activitate,sa asigure pe fosti profesori de continuitatea si pastrarea valoroaselor traditii ale liceului.

La Colegiul militar « Dimitrie Cantemir » s-a creat o traditie ca, periodic, actuala catedra sa se intalneasca cu fostii profesori ai liceului , sa-si impartaseasca din experienta proprie Profesorii pensionari au pezentat o istorie « traita pe viu » in predarea matematicii,ca si problemele specifice muncii intr-o unitate ca specific militar,concluzia lor ca nicio alta forma de invatamant nu poate asigura o mai buna pregatire a viitorilor militari de cariera.Prin aceste intalniri se reanoada permanent respectul celor de azi fata de munca inaintasilor lor.

Prof.univ.dr.Miron Oprea, care a fost de doua ori presedinte al comisiei de bacalaureat din colegiul « Dimitrie Cantemir » le-a impartasit actualilor profesrori si elevi aprecierile sale deosebit din frumoase asupra seriozitatii cu care sant pregatiti elevii din aceasta unitate de invatamant.De asemenea dl prof.univ.dr Miron Oprea a facut o surpriza deosebita profesorului pensioar ,Vasile Baghina,inmanadu-i Gazeta Matematica din anii 1946 cand acesta era rezolvitor la gazeta matematica,iar prof.Olimpia Popescu oferindu-i Gazeta Matematica din 1947,cand prof.Vasile Baghina ,ca elev al Liceului militar Craiova, primea din mana Generalului Buicliu ,un sprijinitor si colaborator al Gazetei, premiul la olimpiada nationala de matematica

***Porofesor Alexandru Ditei***

Seful catedrei de matematica a Colegiului Militar „Dimitrie Cantemir” Breaza

**BASM MATEMATIC: CUM A DESCOPERIT PITAGORA TEOREMA SA**  
(după Guido Hauck<sup>1</sup>)

De mult, în vechea Eladă, exista în apropierea orașului *Crotona* o colonie alcătuită numai din triunghiuri dreptunghice. Se numea *Trigonía*.

Fiecare triunghi avea o ipotenuză și două catete, care formau împreună o familie. Capul familiei era însă ipotenuza.

Într-o zi, nu se mai știe cum s-a întâmplat, într-o familie a unui triunghi isoscel s-a iscat o ceartă între ipotenuză și catete.

Catetele au explicat că nu mai vor să se lase dădăcite de ipotenuză, că ele împreună sunt mai lungi decât ipotenuza. Chiar întreaga stabilitate a familiei s-ar baza pe ele, deoarece ele închid unghiul drept.

Ipotenuza, pe de altă parte, pretindea că ei îi revine meritul principal în menținerea triunghiului, căci, dacă n-ar subîntinde catetele, trăinicia unghiului drept s-ar risipi îndată.

În vremea aceea, trăia în *Crotona* un om tare înțelept pe nume *Pitagora*. Era un mare prieten al triunghiurilor dreptunghice și adeseori el se plimba până în *Trigonía*, unde se întreținea îndelung cu prietenele sale.

Într-o seară, trecând pe lângă casa acelui triunghi dreptunghic isoscel, auzi gălăgie. După ce a aflat motivul discuției interveni:

- Nici nu se pune câtuși de puțin problema ca împreună sunteți mai mari decât ipotenuza, importantă este valoarea interioară a fiecăreia dintre voi, valoare ce se măsoară după *capacitatea de muncă*. Dacă vreți să arbitrez disputa voastră ar trebui să vă văd cum munciți. Deci, iute! puneți-vă șorțurile de lucru și să vă văd la treabă.

Certăreții îl priviră mirat și spuseră în cor:

- Șorțuri de lucru? Nu avem așa ceva!

- Cum? Nu aveți șorțuri? se miră *Pitagora*. Numai șorțul dă omului valoarea sa. Fără el este un *perde vară*. Veniți imediat cu mine la pielar. Vreau să vă ajut să căpătați fiecare câte un șorț.

Au plecat împreună la pielar, unde acesta a găsit în magazie câteva bucăți de piele.

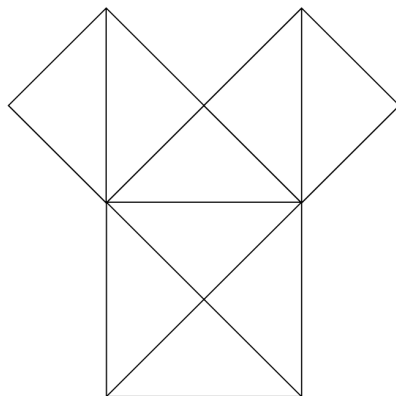
- Din ele voi croi 8 triunghiuri dreptunghice isoscele, toate de aceleași dimensiuni cu triunghiul al cărui membrii sunt în dispută, spuse *Pitagora*.

După ce a croit cele 8 triunghiuri așa cum îi spusese *Pitagora*, pielarul a cusut împreună catetele a patru triunghiuri, astfel încât ipotenuzele lor să fie marginile unui șorț. Astfel el a obținut un șorț în formă de pătrat cu latura egală cu ipotenuza triunghiului.

Din celelalte patru triunghiuri rămase a cusut două câte două împreună de-a lungul ipotenuzei, obținând două șorțuri pătrate cu latura egală cu a unei catete.

Cele trei șorțuri le-a incins la brăurile catetelor și al ipotenuzei.

- Ia priviți acum la șorțurile voastre, toate sunt pătrate, pătratul ipotenuzei are 4 triunghiuri, iar celelalte două pătrate, ale catetelor, au împreună de



<sup>1</sup> Guido Hauck (1845-1905) cunoscut geometru german

asemena 4 triunghiuri. Șorțurile pe care vi le-am pus măsoară valoarea voastră. Ipotenuza, așadar, are aceeași valoare cu catetele luate la un loc. De aceea nici una dintre părți să nu se mai fâlească înaintea celorlalte. Fiți îngăduitoare și lucrați împreună în pace și bună înțelegere.

Asta au și făcut, s-au împăcat și au pornit spre casă cu șorțurile fluturând în vânt, ca niște steaguri.

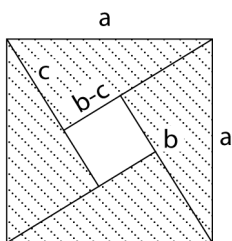
Celorlalte triunghiuri din Trigonია le-au plăcut aceasta extraordinar de mult, iar când un triunghi a aflat de la cine au primit frumoasele șorțuri, s-a dus imediat la Crotona și l-a rugat pe Pitagora să-i confecționeze și familiei sale șorțuri.

Acesta s-a scărpinat în cap și-i zise:

- Hmm! Nu va fi la fel de ușor ca pentru triunghiul isoscel. El avea catetele egale, pe când în cazul tău, catetele sunt inegale. Dar să încercăm !

Apoi triunghiul cu catetele inegale s-a dus împreună cu Pitagora la pielar.

Acum, cu lecția învățată, pielarul a confecționat de îndată 8 bucăți triunghiulare de aceleași dimensiuni cu a noului triunghi.



Apoi împreună cu Pitagora a încercat, din nou, să coasă împreună patru dintre triunghiuri și să le dea forma de pătrat. A cusut mereu câte o catetă mică de una mare, astfel încât, conform regulii, ipotenuzele să cadă la exterior. A obținut un șorț de formă pătrată ca și înainte, numai că în mijlocul lui era o gaură. Aceasta avea forma unui pătrat cu latura cât diferența dintre cateta mare și cateta mică.

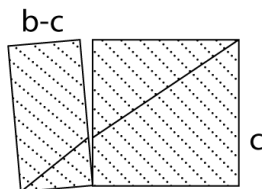
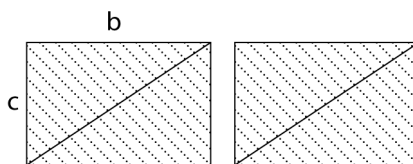
- Nu-i nimic, spuse Pitagora, o să găsim un petec pentru această gaură. Să așezăm deocamdată cele patru triunghiuri care au rămas.

Ca în

cazul de dinainte, a cusut câte două dintre triunghiurile rămase, de-a lungul ipotenzelor, astfel încât a obținut două triunghiuri egale.

Fără să-și piardă cumpătul, Pitagora probă latura mai mare a unui dreptunghi la brâul catetei mai mari, iar pe celălalt îl probă cu latura mai mică la brâul catetei mai mici.

- Un șorț este prea scurt, celălalt prea lung. Va trebui să ținem seama de aceasta, reflectă Pitagora.



Tăie apoi o bucată din șorțul considerat mai lung, astfel încât să obțină un pătrat.

Bucata îndepărtată era un dreptunghi cu o latură cât cateta mică, iar cealaltă latură cât diferența celor două catete.

Continuă să coasă șorțul mic pătrat la brâul catetei mici, șorțul dreptunghiular rămas la șorțul dreptunghiular destinat catetei mari, șorțul pătrat la brâul ipotenuzei și în fine șorțul alcătuit dintr-un dreptunghi la care s-a cusut dreptunghiul mic la brâul catetei mari.

Când Pitagora se uită mai bine, observă că pentru a fi un pătrat, șorțului catetei mari îi lipsea un petec pătrat cu latura cât diferența catetelor și exclamă:

- Dar este la fel de mare ca și gaura din șorțul ipotenuzei!

Pielarul croi două bucăți de piele de formă pătrată având ca șablon gaura pătrată din șorțul ipotenuzei și le cusă în cele două găuri.

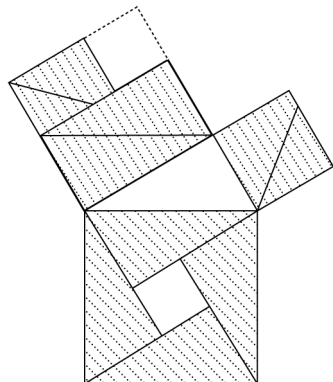
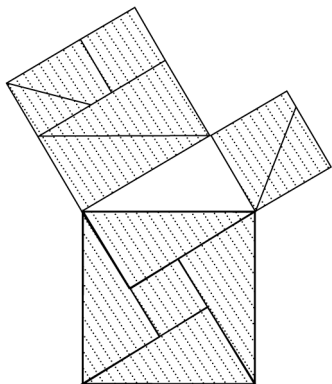
Pitagora a devenit tot mai îngândurat și mai grav, apoi deodată a sărit în sus de bucurie și a exclamat:

- Ura, am descoperit teorema ce-mi va purta numele în istorie! Uitați-vă, pătratul ipotenuzei se compune din aceleași bucăți ca și cele două pătrate ale catetelor și anume din câte patru triunghiuri dreptunghice de aceeași mărime și de câte un petec pătrat. Deci teorema este valabilă, în general, pentru orice triunghi dreptunghic:

*Pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor.* Mergeți și spuneți tuturor triunghiurilor dreptunghice să fie mândre de acest fapt, a adăugat el.

Plin de bucurie, triunghiul se grăbi să se întoarcă acasă cu șorțurile realizate de Pitagora și vesti pe toate străzile Trigoniei noutatea. Se stârni vâlvă mare și peste tot se auzea râsând:

*"Pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor"*



De acum fiecare triunghi dreptunghic voia să verifice teorema pe el însuși și toate triunghiurile veniră în fugă la Pitagora să-l roage să le croiască și lor șorțuri.

- Lăsați-mă să mă gândesc, le-a spus Pitagora triunghiurilor. Cele câteva piei nu ajung pentru toate șorțurile pe care mi le cereți. Dar trebuie să existe o soluție.

După un timp, Pitagora a mers la ocolul vitelor și a ales o sută de boi grași, pe care i-a sacrificat și jertfit zeilor<sup>2</sup>, ca mulțumire pentru faptul că i-au inspirat frumoasa teoremă. Pieile le-a dus la tăbăcar ca să le pregătească pentru confecționarea șorțurilor dorite de prietenele sale. Le invită apoi pe toate la sărbătoarea de jertfă. Până noaptea târziu au șezut împreună, iar triunghiurile l-au glorificat pe Pitagora și i-au cântat:

*Pitagora ne-a dat teorema*

*Egalității șorțurilor, hei!*

*Vitele se vaită de-acuma,*

*Se bucură însă oameni și zei.*

*Pitagora ne-a dat teorema*

*Vitele-o știu pe propria piele.*

*Învăț-o de grabă de teama*

*Să n-ajungi să fi printre ele.*

(revestit de I. Dăncilă, București)

### Bibliografie :

- [1] A. Bernhard, «Geometrie für die siebte und achte Klasse und Waldorfschulen», Editura Freies Geistesleben, G.m.b.H. Stuttgart, 1993
- [2] E. Fourrey, «Curiosités géométriques», Librairie Vuibert, 1907

<sup>2</sup> -unii istorici au consemnat această hecatombă

**SIMETRIA ÎN  $\mathbb{N}$**   
(Palindromuri în  $\mathbb{N}$ )

**MIRON OPREA**

În celebra lucrare “*Galileo’s Finger. The Ten Great Ideas of Science*” (apărută la Londra în 2003), distinsul om de știință *Peter Atkins* (laureat al premiului Nobel), consideră *simetria* ca una din cele 10 mari idei ale Științei cu rezonanță fundamentală în procesele cognitive ale omului. Cuvântul *simetrie* provine din termenii grecești *sym*=aceeași și *metria*=măsură, care împreună înseamnă *aceeași măsură*. Grecii în antichitate etichetau opere de artă sau de arhitectură ca fiind simetrice, dacă puteau să identifice din ele, o porțiune care să fie cuprinsă în celelalte părți de un număr întreg de ori. Însă mari filozofi ca Platon și Aristotel în lucrările lor, asociau *simetria* cu *frumusețea*, idee ce a caracterizat simetria până aproape de sfârșitul secolului al XVIII-lea. *Simetria* a intrat puternic în vizorul matematicienilor începând cu secolul al XIX-lea, ceea ce a determinat o dezvoltare considerabilă a așa ziselor “*transformări prin simetrie*” ale figurilor geometrice care au adus neașteptate rezolvări ale unor dificile probleme de geometrie. (vezi [5])

În ultimii 50 de ani, *simetria* a devenit o preocupare nu numai pentru matematicieni, ci pentru aproape toți cercetătorii din toate domeniile de cercetare științifică. Secole de-a rândul simetria devenise o preocupare aproape exclusivă a matematicienilor cu ajutorul căreia matematicienii și esteticienii studiau *formele* corpurilor, ființelor și chiar a ideilor. Așa se face, că acum aproape 20 de ani, a luat naștere *Asociația Internațională de Simetologie*. O primă extindere a noțiunii de simetrie s-a făcut la începutul sec. XX, odată cu apariția *structurilor matematice* și a *gândirii structurale* și în matematică. Extinderea și generalizarea noțiunii de operație din geometrie și aritmetică la *obiecte abstracte*, au dus direct la *operația inversă* (și implicit a “inversului”) și la obiecte (sau elemente) simetrice ceea ce a determinat apariția *noțiunii de grup* care va deveni instrumentul fundamental pentru studiul simetriei. *Calea operațională* a fost “*calea regală*” prin care simetria a putut să devină una din cele 10 mari idei ale științei actuale. În cele ce urmează, vom introduce noțiunea de simetrie în  $\mathbb{N}$  (mulțimea numerelor naturale) pe calea *scrierii* (implicit și citirii) numerelor naturale.

Vom considera numerele naturale scrise în baza zece, astfel că orice număr natural

$$n = \overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k} = \sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^{k-i} \text{ cu } a_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}.$$

*Def. 1:* Se numește *inversul (răsturnantul) numărului natural*  $\sum_{i=0}^k a_i \cdot 10^{n-1}$ , *numărul natural*  $\sum_{i=0}^k a_{k-i} \cdot 10^{k-i}$

Aceasta înseamnă că inversul unui număr natural este numărul natural scris (și citit) de la dreapta la stânga:  $\text{inv}(183465) = 564381 = \text{răst}(183465)$ . În mod analog și în *cuvintele* și *propozițiile* dintr-o limbă se pot lua în considerare *răsturnatele* lor. De exemplu: *airtemis* este răsturnatul cuvântului *simetria* din limba română.

*Def. 2:* Un număr natural se *zice* că este *simetric*, când coincide cu răsturnatul său. Deci dacă  $\overline{a_0 a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n} = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$  atunci *n* este simetric.

Numerele 141; 73437; 6776 sunt simetrice deoarece coincid cu răsturnatele lor. Sunt de exemplu în limba română (ca de fapt în orice limbă) cuvinte (și chiar propoziții) care coincid cu răsturnatele lor. Astfel avem cuvintele: *potop*, *rotor*, *radar*, etc.

Cuvintele cu această proprietate se numesc *palindromuri*, iar inventarea lor este atribuită egipteanului *Sotades el Obscen* din Maronea, care a trăit în sec. III î. Hr.. Analog, numerele naturale care coincid cu răsturnatele lor se numesc *palindromuri numerice*. Studiul *palindromurilor* în artă, literatură, muzică genetică etc. a dus la o serie de progrese în aceste domenii (vezi [1], [2]).

*Observații:* 1) Se observă că  $121_{(10)} = 1111001_{(2)}$  ceea ce înseamnă că *simetria numerelor este intim legată de baza de numerație în care este scris numărul*. Un număr poate fi simetric într-o bază și să nu fie simetric în altă bază.

2) Operațiile aritmetice din  $\mathbb{N}$  (adunarea, scăderea, înmulțirea) nu păstrează simetria. De exemplu:  $98+89=187$ ;  $454-22=432$ ;  $89 \times 98=8722$ .

3) Se observă că adunând un număr cu răsturnatul (inversul) său și procedând în continuare la fel cu suma obținută, după un număr oarecare de repetări, obținem un număr simetric.

De exemplu:  $238+832+0701=1771$  (după două adunări)

$78+87+561+627+3531=4884$  (după patru adunări)

$89+98+781+\dots=888132000231888$  (după 24 adunări)

Există următoarea proprietate (încă nedemonstrată) în stadiul de *conjectură*.

*“Suma dintre un număr și răsturnatul său, după un număr finit de repetări, conduce întotdeauna la un număr palindromic.”*

Ne propunem, să cercetăm distribuția numerelor simetrice în  $\mathbb{N}$ . Se observă că numere simetrice apar începând cu numerele naturale cu două cifre și anume vom avea o distribuție pe subintervale:

$[10, 10^2)$  sunt 9 numere simetrice: 11; 22; 33; 44; 55; 66; 77; 88; 99.

$[10^2, 10^3)$  sunt 9·10 numere simetrice: 101; 111; 121; .....; 999

$[10^3, 10^4)$  sunt  $9 \cdot 10^2 = 900$  numere simetrice

$[10^4, 10^5)$  sunt  $9 \cdot 10^3 = 9000$  numere simetrice

Se observă o creștere a numărului numerelor palindromice pe măsură ce numărul are mai multe cifre. Astfel în semiintervalul  $[10^{2n}, 10^{2n+1})$  în care fiecare număr are  $2n+1$  cifre și care conține  $10^{2n+1} - 10^{2n} = 9 \cdot 10^{2n}$  numere naturale, simetrice în ordine crescătoare sunt: 100.....001; .....; 99.....99 care sunt în număr de  $9 \cdot 10^n$ .

$$\text{Deci: Prob. (sim. cu } 2n+1 \text{ cifre)} = \frac{9 \cdot 10^n}{9 \cdot 10^{2n}} = 10^{-n}$$

Deasemenea în semiintervalul de numere naturale  $[10^{2n+1}, 10^{2n+2})$  în care fiecare număr are  $2n+2$  cifre și care conține  $10^{2n+2} - 10^{2n+1} = 9 \cdot 10^{2n+1}$  numere naturale, simetrice sunt  $9 \cdot 10^n$

$$\text{Deci Prob. (sim. cu } 2n+2 \text{ cifre)} = \frac{9 \cdot 10^n}{9 \cdot 10^{2n+1}} = 10^{-n-1}$$

#### **Bibliografie:**

- [1] Mario Livio: “*Ecuția care n-a putut fi rezolvată*”, Ed. Humanitas, București, 2007
- [2] Martin Gardner: “*Amuzamente matematice*”, Ed. Științifică, București, 1968
- [3] Peter Atkins: “*Amprenta lui Galileo*”, Ed. All, București, 2008
- [4] Tiberiu Roman: “*Simetria*”, Ed. Tehnică, București, 1963
- [5] Dumitru Smaranda și Nicolae Soare: “*Transformări geometrice*”, Ed. Academiei, București, 1988

CE ESTE PALEOARITMETICA?

PROF. DUMITRU OPREA

ȘI ÎNV. MAGDALENA DINA, DRAGODĂNEȘTI, DÂMBOVÎȚA

Orice absolvent de liceu sau poate chiar de Școală generală, la cursurile de Biologie a auzit de marele zoolog francez *Georges Cuvier* (1769-1832) care a formulat așa zisa “*Lege a corelației organelor*” în organismele vii. Această celebră lege biologică stabilește faptul că între diferitele părți (organe) ale unui organism viu, există o strânsă interdependență, astfel încât o “*modificare*” într-o parte (organ) determină transformări în alte părți (organe). Folosind această lege, *Cuvier* a reconstituit structura unor vietăți pornind numai de la câteva oase din scheletul acestora, creând astfel o veritabilă știință care ulterior s-a dezvoltat în ceea ce se numește azi *Paleontologie* (*paleozoologia+paleobotanica*).

Prin analogie, matematicienii francezi care se ocupau de jocuri, au intitulat jocurile matematice care aveau ca obiectiv reconstituirea unor operații aritmetice din anumite rămășițe (frânturi) ale numerelor componente- *Paleoaritmetică*. Evident că forma acestor jocuri este destul de variată: de la forma cifrică până la forma când operația este dată prin cuvinte (care au semnificație în context) și care au semnificație și cifric.

De exemplu: Să se reconstituie operațiile:

$$\begin{array}{r} a \ b \ c \ x \\ b \ a \ c \\ \hline * \ * \ * \ * \\ * \ * \ a \\ \hline * \ * \ * \ b \\ * \ * \ * \ * \ * \ * \end{array}$$

$$\begin{array}{r} * \ * \ * \ * \ * \ * \ 4 \quad \text{FORTY} \\ * \ * \ * \quad \text{TEN} \\ * \ * \ 4 \ * \quad \text{TEN} \\ * \ * \ * \ * \quad \text{SIXTY} \\ \hline * \ * \ * \ * \\ * \ 4 \ * \\ \hline * \ * \ * \ * \\ * \ * \ * \ * \\ \hline = \ = \ = \end{array}$$

BAIA  
MARE  
IASI  
SATU  
MARE  
ORASE

$$\begin{array}{r} \square \square \triangle \times \\ \triangle \triangle \\ \hline \triangle \square \square \triangle \\ \square \square \triangle \\ \square \triangle \triangle \triangle \end{array}$$

Pentru rezolvare se folosesc cu multă *atenție* corelațiile dintre cifre și așezarea lor. Fiecare exercițiu necesită o atenție deosebită, *abilitate* și stăpânirea deplină a operațiilor aritmetice cu numere naturale. De asemenea este de precizat că toate exercițiile de *paleoaritmetică* se fac numai în  $\mathbb{N}$  și au în general soluție unică. Unii numesc *paleoaritmetică* și *criptaritmetrie*. De multe ori pentru ușurința identificării fiecărei cifre se încadrează întreaga operație într-un dreptunghi (pătrat) în care cifrele sunt încadrate fiecare într-un pătrat, astfel că se poate raționa pe o matrice formată din linii și coloane (asa cum se notează toate câmpurile tablei de șah cu doi indicii: unul din alfabetul latin și celălalt din cifrele romane și fiecare cifră se scrie în mod unic cu un indicativ care arată coloana și rândul în care se află).

De exemplu (înmulțirea):

|     | A | B | C | D | E | F | x |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| I   |   |   |   | 3 | * | * |   |
| II  |   |   |   | * | 3 | * |   |
| III |   |   | * | * | 9 | * |   |
| IV  |   |   | * | 4 | 5 |   |   |
| V   | * | * | 6 | * |   |   |   |
| VI  | * | * | * | * | * | 0 |   |

Șirul raționamentelor în rezolvare este următorul:

Cifra  $F_{VI}$  a rezultatului fiind “0”, rezultă că  $F_{III}$  trebuie să fie tot “0”.  $E_{IV}$  fiind 5 și provenind dintr-o înmulțire a unei cifre cu 3, rezultă că  $F_I$  este 5. Cum  $3 \times 5 = 15$  și cum după ce am scris pe 5 la  $F_{IV}$ , urmează să adunăm pe 1 la înmulțirea lui 3 de la  $E_{II}$  cu cifra de la  $E_I$ , pentru a obține 4; urmează că  $E_I$  este 1. Este

## AxiomA supliment mAtematic-nr.38

evident acum că cifra de la  $F_{II}$  este 6, căci din cele patru cifre cu soț (2,4,6,8) care înmulțite cu 5 ne dau un număr terminat cu "0", numai  $6 \times 5$  ne dă, pentru primele două cifre ale rândului III pe 90. Mai rămâne de aflat pe  $D_{III}$ . Această cifră înmulțită cu 15 trebuie să ne dea un număr care să aibă ca cifră a zecilor pe 6. Această cifră nu poate fi decât 4. În acest fel am determinat că deînmulțitul este 315, iar înmulțitorul este 436 și « înmulțirea reconstituită » este :

$$\begin{array}{r} 315 \times \\ 416 \\ \hline 1890 \\ 945 \\ \hline 1260 \\ 137340 \end{array}$$

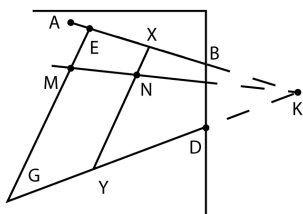
Propunem cititorului următoarele exerciții : Să se reconstituie operațiile de mai sus, precum și următoarele două operații :

$$\begin{array}{r} * * * * * \\ * * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline * * \\ * * \\ \hline * * * \\ * * * \\ \hline = = = \end{array} \quad \begin{array}{r} ? \\ * * * * * 8 * * \end{array}$$

$$\begin{array}{r} A B C D + \\ E D F G \\ \hline A B F D H \end{array}$$

Analizând cu atenție, în lumina celor de mai sus, conținutul problemelor de *construcție geometrică*, mai ales a celor cu elemente inaccesibile, constatăm că ele pot forma, ceea ce s-ar putea numi *Paleogeometrie*. Să analizăm succint două astfel de probleme.

1. Să se ducă printr-un punct dat  $M$ , o dreaptă care să treacă prin punctul de întâlnire inaccesibil al segmentelor  $AB$  și  $CD$ .



Soluție (urmărim pe figura alăturată)

Se duc două paralele, din care una prin  $M$  care întâlnește, segmentele  $AB$  și  $CD$  respectiv în  $E$  și  $G$ , iar cealaltă care intersectează pe  $AB$  și  $CD$  în punctele  $X$  și  $Y$ . Astfel se poate determina pe segmentul  $XY$  un punct  $N$  astfel încât  $\frac{XN}{YN} = \frac{EM}{MG}$ . Dreapta  $MN$  este cea căutată,

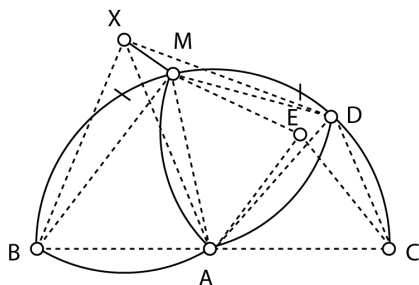
deoarece segmentul  $MN$  este cunoscut, atunci din proporția  $\frac{MN + NK}{NK} = \frac{EM}{KN}$  se poate contrui ușor  $NK$  și

apoi  $MK$  adică distanța dintre punctul dat și punctul inaccesibil  $K$ .

2. Fiind dat un cerc al cărui centru e necunoscut, să se determine cu ajutorul compasului centrul său.

*Soluție* (urmărim pe figura alăturată)

Luăm pe cercul dat punctul  $A$  și cu o rază oarecare  $r$  construim cercul  $(A; r)$  care taie cercul dat în  $B$  și  $D$ . Pe cercul  $(A; r)$  determinăm punctul  $C$  diametral opus lui  $B$ . Construim mai departe cercurile  $(C; |CD|)$  și  $(A; |CD|)$  și notăm prin  $E$  punctul lor de intersecție. Construim în continuare cercul  $(E; |CD|)$  care intersectează cercul  $(A; r)$  în punctul  $M$ . Segmentul  $BM$  este egal cu raza cercului dat.



Cercurile  $(B; |BM|)$  și  $(A; |BM|)$  determină centrul necunoscut al cercului dat.

*Demonstrație:* Triunghiurile isoscele  $ACE$  și  $AEM$  fiind congruente rezultă că  $\widehat{EAM} = \widehat{ACE}$ . Mai departe  $\widehat{BAE} = \widehat{ACE} + \widehat{AEC}$  (unghiul  $BAE$  fiind exterior triunghiului  $ACE$ ) și pe de altă parte  $\widehat{BAE} = \widehat{BAM} + \widehat{EAM}$  din care rezultă că  $\widehat{BAM} = \widehat{AEC}$ . Din asemănarea triunghiurilor isoscele  $ABM$  și  $ACE$  rezultă  $\frac{|BM|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|CE|} \Leftrightarrow \frac{|BX|}{|AB|} = \frac{|AC|}{|CD|}$ , din care rezultă că triunghiurile isoscele  $ABX$  și  $ADX$  sunt congruente și  $|BX| = |AX| = |DX|$  ceea ce înseamnă că  $X$  este centrul cercului dat.

*Observație:* Se constată că centrul cercului s-a determinat dintr-o salbă de șase cercuri, lucru remarcat și în lucrarea din 1797 a lui L. Mascheroni: *La geometria del compasso* (Geometria compasului) apărută în Italia la Pavia. În decursul celor două secole de la lucrarea lui Mascheroni s-a căutat o construcție cu mai puțin de șase cercuri, dar nu s-a reușit, oblema rămânând deschisă cum se remarcă în [1].

Propunem cititorului următoarele probleme din [1]:

- 1) Să se traseze bisectoarea unghiului format de dreptele  $d_1, d_2$  care nu se întâlnesc în cadrul colii de caiet.
- 2) Să se construiască mediana care pleacă din vârful  $C$  inaccesibil a unui triunghi  $ABC$ .

#### *Bibliografie:*

- [1] I. Dăncilă: "Construcții cu rigla și compasul", Ed. Sigma, București, 2003
- [2] B.A.Kordemski: "Matematica distractivă", Ed. Tineretului, București, 1959
- [3] B.Iosub: "Matematica recreativă", Ed. Tehnică, 1952
- [4] E.Gurm: "Matematică recreativă", Ed.Junimea, 1985
- [5] D. Lăzărescu: "Paleoaritmetica și alte probleme de logică", Ed. Albatros, București, 1981
- [6] N.Oprișiu: "Mai în glumă, mai în serios", Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1981
- [7] \*\*\*: "Olimpiada jocurilor raționale", Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1984