

PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL GIMNAZIAL ²⁾

CLASA a V-a

1. Dacă $a + b = 33$ și $a + c = 11$ arătați că $5a + 3b + 2c$ este pătrat perfect.
Gheorghe Megelea, Bușteni
2. Aflați perechile de numere naturale (a, b) pentru care $(a - 3) \cdot (b + 4) = 18$
Dumitru Oprea, Dragodănești, Dâmbovița
3. Se consideră numărul $A = 13 + 12 \cdot 13 + 12 \cdot 13^2 + 12 \cdot 13^3 + \dots + 12 \cdot 13^{2003}$.
 - a) Să se arate că $A = 13^{2004}$;
 - b) Să se scrie numărul A ca o sumă de două pătrate perfecte;
 - c) Să se scrie numărul A ca o sumă de 13 numere naturale consecutive.*Alexandrina Stanciu, Ploiești*
4. Să se arate că numărul $A = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{2007}$ se divide cu 10
Liviu Ardelean, Sibiu
5. Să se determine numărul natural de forma $\overline{abcd}$, știind că dacă se scrie la dreapta cifra 6, se obține un număr de 3 ori mai mic ca numărul ce s-ar obține din numărul inițial cu cifra 8 la stânga sa.
Eugen Niță, Ploiești
6. Care sunt numerele de forma $\overline{aba}$ unde $b = a + 1$ și $\overline{aba}$ se divide cu 2?
Liviu Ardelean, Sibiu
7. Suma a două numere naturale este 112. Împărțind unul dintre numere la celălalt se obține câtul 1 și restul 2. Aflați diferența celor două numere.
Nicolae Scuratovschi, Constanța
8. Fie $a = 1 + 3 + 5 + \dots + 213$.
 - a) Arătați că a este pătrat perfect.
 - b) Determinați cifra zecilor numărului a^{2009} .*Dumitru Dobre, Rm. Vâlcea*
9. Suma a patru numere naturale este 2009. Dacă din fiecare număr considerat se scade același număr, obținem 137, 297, 211, respectiv, 164. Să se determine cele patru numere.
Eugen Niță, Ploiești
10. Determinați numerele de forma $\overline{abc}$ știind că: $a^a = a + 2b + 3c$.
Gheorghe Achim, Mizil
11. Arătați ca numărul $\frac{7^{114} \cdot 5^{13} \cdot 216 + 7^{113} \cdot 5^{13} \cdot 6^4}{455}$ este natural.
Luminița Corneci, Vălenii de Munte
12. Fie numerele $x = \left[2^{22} \cdot 4^{23} \cdot 8^{24} \cdot 16^{25} : 32^{32} + (7^{23})^5 \right] : \left\{ \left[(2^5)^7 \right]^3 + 49^{20} \right\}$ și
 $y = 25^{13} : 5^{26} + 3^{42} : 9^{21} + 4^{15} : 8^{10}$.
 a) Arătați că $x + y$ este pătrat perfect. ***
2) Se primesc soluții pana la 10 iunie 2010

CLASA: a VI-a

1. Aflați $x \in \mathbb{N}$ astfel încât 14 să se dividă cu $(3x + 2)$.
Liviu Ardelean, Sibiu
2. Demonstrați că numărul $A = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{100}$ nu este pătrat perfect.
Gheorghe Megelea, Bușteni
3. a) Scrieți numerele 14 și 14^2 ca sumă de trei pătrate perfecte.
b) Arătați că orice putere naturală a lui 14 se poate scrie ca o sumă de trei pătrate perfecte.
I. Lupea Ploiești și I. Tomescu, Mizil
4. Fie unghiurile AOB, BOC, COD adiacente două câte două care au suma măsurilor lor de 150° și îndeplinesc condițiile: $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \frac{a}{b}$; $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOC)} = \frac{a}{c}$ unde a, b și c sunt numere naturale prime care verifică relația $3a + b + 6c = 51$. Dacă [OM și [ON sunt bisectoarele unghiurilor BOC, respectiv COD, aflați măsura unghiului MON.
I. Tomescu, Mizil
5. Fie punctele A, B, C, D coliniare în această ordine. M este mijlocul segmentului AB, N este mijlocul segmentului CD, iar $MN = 9\text{cm}$. Cu cât este egală suma lungimilor segmentelor $AD + AC + BC + BD$?
Mariana Mitea, Cugir
6. Arătați că fracția $\frac{5n+7}{7n+10}$ este ireductibilă, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Unghiul format de bisectoarele unghiurilor adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ are măsura de 115° .
a) Să se determine $m(\sphericalangle AOC)$.
b) Dacă semidreapta opusă bisectoarei unghiului $\sphericalangle AOC$ formează cu [OB un unghi cu măsura de 57° , să se determine $m(\sphericalangle AOB)$ și $m(\sphericalangle BOC)$.

8. Numerele $x + y, y + z$ și $z + x$ sunt direct proporționale cu trei numere consecutive. Arătați că x este media aritmetică a numerelor z și y .

9. Aflați numerele naturale în baza 10 cuprinse între numerele 2000 și 3000 care împărțite la 213 să dea câtul egal cu restul.
Vasile Măgureanu, Vădăstrița, Olt
10. Aflați numerele naturale de forma $\overline{abc}$, mai mici decât 500, dacă:
a) dau restul 5 la împărțirea cu 9;
b) $(a+b+c) : 7$ și $(acb + 2) : 7$.
Nicolae Stănică, Brăila
11. Arătați că numărul $a = 2^{2n+1} \cdot 5^{2n+2} + 4^{n+1} \cdot 25^n$ se divide cu 18, oricare ar fi n număr natural.
Liviu Ardelean, Sibiu
12. Să se afle suma cifrelor numărului $A = 2^{n+2} \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^{n+1} + 2010, n \in \mathbb{N}, n > 3$.
Dan Coma, Vădăstrița, Olt

CLASA: a VII-a

1. Sa se rezolve ecuația:

$$\frac{x+2}{3} + \frac{x+7}{4} + \frac{x+14}{5} + \dots + \frac{x+142}{13} = 66$$

Ozunu Felicia, Vulcan, Hunedoara

2. Arătați că suma

$$S = \frac{61}{18} + \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 103} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} \right)$$

este un pătrat perfect.

Mihaela Doinaru, Sinaia

3. Arătați că $\sqrt{9n^2 + 8n + 2} \notin \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Maria Frusinoiu, Ploiești

4. Arătați că dacă $x, y, z \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\sqrt{xyz} = \overline{zz}$ atunci numărul

$$N = \frac{\overline{xyz} + \overline{xzy} + \overline{yxz} + \overline{yzx} + \overline{zxy} + \overline{zyx}}{2 \cdot \overline{zz1}} \text{ se divide cu } 4.$$

Mihaela Doinaru, Sinaia

Comparați numerele:

5. $a = [20 + (-2)^{24} : (-4)^{10} + (-5)^9 : 25^4]^n \cdot [-3^2 + (-1)^{n+1}]$ și

$b = [-7^4 + (-7)^4 + (-1)^{n^2}] \cdot [-2^3 - (-1)^n]$ unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Nicolae Radu, Ploiești

6. Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu măsura unghiului A egală cu 90° .

Fie D $\in$ (AC) și E în semiplanul deschis determinat de dreapta AC și punctul B, astfel încât $EC \perp AC$ și $[EC] \equiv [AD]$. Arătați că:

- $[AE] \equiv [BD]$;
- Unghiurile DBE și AEB sunt complementare;
- Unghiurile DBE și AEB nu pot fi congruente.

Stefan Smarandache, București

7. În paralelogramul ABCD notăm cu M mijlocul lui AD și cu L intersecția dreptelor AC și BD. Paralela prin L la AB taie laturile AD și BC în S și respectiv Q, iar paralela prin L la BC taie laturile AB și CD în P și respectiv R. Sa se arate ca:

- Aria patrulaterului PQRS este jumătate din aria paralelogramului ABCD.
- Patrulaterul PQRS este trapez.
- Dreptele SR, PQ și AC sunt concurente.

Lațăr Ilarie Radu, Ploiești

8. Arătați că are loc relația: $1 + \sqrt{2007 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010} + 1 = 2008 \cdot 2009$

Mariana Mitea, Cugir

9. În exteriorul pătratului ABCD de latură AB = 5cm se construiesc triunghiurile echilaterale MAB, NBC, PCD și QAD.

a) Să se calculeze aria triunghiului MBN, știind ca aria patrulaterului MNPQ este egală cu

$$25(2 + \sqrt{3}) \text{ cm}^2.$$

b) Să se arate că diagonalele patrulaterelor ABCD și MNPQ au același mijloc.

Ionela Ionescu, Vălenii de Munte

10. Arătați că numărul $\sqrt{2008^{2009} + 2009^{2011}}$ este irațional.

Gabriela Tănase, Cămpina

CLASA: a VIII-a

1. Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $\sqrt{7-x} + \sqrt{x+9} = 4$.
Mariana Mitea, Cugir
2. Arătați că $(\sqrt[n]{n}) \cdot n \in \mathbb{N}$, numărul $25 \cdot 36^n + 5 \cdot 6^{n+1} + 9$ este pătrat perfect
Gheorghe Achim, Mizil
3. Să se arate că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, numărul $A = \frac{1}{3} \left[\underbrace{11\dots 11}_{3n \text{ cifre}} - \underbrace{33\dots 33}_{n \text{ cifre}} \underbrace{00\dots 00}_{n \text{ cifre}} \right]$ este un cub perfect. Numerele sunt scrise în baza 10.
Mihaela Doinaru, Sinaia
4. Fie cubul ABCDA'B'C'D' cu lungimea muchiei de a cm, M și N mijloacele muchiilor [AA'] și [DD'], P proiecția lui B' pe CN și Q proiecția lui B' pe (BCNM). Calculați:
a) perimetrul și aria triunghiului PQB';
b) $\cos \angle((B'PQ), (ABC))$
Ioan Pascaru, Ploiești
5. Determinați valorile întregi ale numărului x pentru care $\sqrt{\frac{5x-1}{x-1}}$ este număr întreg.
Gabriela Tănase, Câmpina
6. Arătați că numărul $a = \sqrt{14+6\sqrt{5}} + \sqrt{14-6\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} + \frac{10}{\sqrt{5}}$ este natural.
Serenela Gabriela Răducu, Pitești
7. Fie ABCD un trapez cu bazele AB și CD, AB = 50 cm, CD = 25 cm, AD = 15 cm și BC = 20 cm. Dacă $AD \cap BC = \{M\}$, iar P este un punct exterior planului (ABC) astfel încât PM este perpendiculară pe planul (ABC) și $PM = 24\sqrt{3}$ cm, aflați:
a) aria trapezului ABCD;
b) distanța de la C la planul (PAB).
Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești
8. Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuația:
 $(x+7) + (x+11) + (x+15) + \dots + (x+107) = 1742$
Alina Matei, Pitești
9. Fie paralelogramul ABCD pe planul căruia se ridică perpendicularele a, b, c, d ($A \in a, B \in b, C \in c$ și $D \in d$) și pe aceste perpendiculare se iau punctele $M \in a, N \in b, P \in c$ și $Q \in d$ (de aceeași parte a planului).
a) Dacă E este mijlocul segmentului MP și F este mijlocul segmentului NQ, demonstrați că EF este perpendiculară pe (ABC);
b) Dacă $AM=3t, CP=13t$ și $QD=10t$ ($t > 0$), determinați lungimea segmentului BN astfel încât punctele M, N, P, Q să fie coplanare.
Maria și Anton Negrilă, Ploiești
10. Aflați $x, y, z \in \mathbb{R}$ și care verifică relația:
 $\sqrt{x^2 - 12x + 61} + \sqrt{y^2 - 20y + 149} + \sqrt{z^2 - 16z + 73} \leq 15$
Manuel Matei, Pitești

