

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU ⁴⁾

Clasa a IX - a

Subiecte selectate de catedra de matematică a C.N.I.L. Cărgiale-Ploiești

1. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $|a - b| \leq 2$. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ((x - a)^2 + 1) \cdot ((x - b)^2 + 1)$. Să se demonstreze că f este strict descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right]$ și strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{a+b}{2}, \infty\right)$.

Cezar Apostolescu, Ploiești

2. Fie o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x) = f(2x) = f(3x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
- Să se demonstreze că $f(2^n \cdot 3^m x) = f(x)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
 - Să se dea un exemplu de funcție cu proprietatea din enunț.

Cezar Apostolescu, Ploiești

3. Să se determine funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ cu proprietatea că $f(f(n)) + f(n) = 2n + 6$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Petre Năchilă, Catalin Năchilă, Ploiești

4. Fie $x \in \mathbb{N}^*$ și fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termenul general $a_n = nx$.

Să se demonstreze că orice cifră apare într-o infinitate de termeni ai șirului.

Să se demonstreze că aceeași proprietate o are orice progresie aritmetică strict crescătoare cu termenii numere naturale.

Emil Vasile, Ploiești

5. a) Să se rezolve ecuația:

$$x^{13} + x^{65} = 2x^{78}$$

b) Generalizare.

Petre Năchilă, Catalin Năchilă, Ploiești

6. Să se determine funcțiile monotone $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea :

$$f^2(x) - x^2 = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Cezar Apostolescu, Ploiești

7. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

Petre Năchilă, Catalin Năchilă, Ploiești

8. Să se rezolve ecuația $[x^2] + [x^3] = [x^5]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Petre Năchilă, Catalin Năchilă, Ploiești

9. Fie o funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea că $|xf(x) - yf(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Să se demonstreze că:

a) Funcția f este marginită.

b) Dacă f este periodică, atunci f este constantă.

⁴⁾ **Se primesc soluții până la 15 martie 2010**

Cezar Apostolescu, Ploiești

Clasa a X-a

1. Fie funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = nx^m - mx^n$, unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$. Să se arate că :

a) $f(x) \geq f(1)$, $\forall x \in [0, \infty)$

b) Funcția f este strict descrescătoare pe $[0, 1]$ și strict crescătoare pe $[1, \infty)$.

Cezar Apostolescu, Ploiești

2. Fie $a, b, c, d > 0$ și funcția $f : [-c, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{a(c+x)} + \sqrt{b(d-x)}$. Să se determine valorile extreme ale funcției f .

Cezar Apostolescu, Ploiești

3. În planul P înzestrat cu reperul cartezian xOy se notează cu T mulțimea vectorilor având ambele coordonate numere întregi. Fie $a \in \mathbb{Z}$ și vectorii $\vec{u}(3, 2)$ și $\vec{v}(7 + 3a, 5 + 2a)$. Să se demonstreze că funcția $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow T$, $f((m, n)) = m\vec{u} + n\vec{v}$ este bijectivă.

Emil Vasile, Ploiești

4. Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației

$$(2 + \log_a^2 x)^n + (2 + \log_x^2 a)^n = 54, \text{ unde } a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N}^*.$$

Petre Năchilă, Catalin Năchilă, Ploiești

5. Să se rezolve și să se discute pentru $a > 0$, $a \neq 2$, ecuația :

$$4a^2 \cdot \log_{\frac{2}{a}} x \cdot \log_{\frac{a^2+1}{a^2}} x = (a^2 + 1)^2 x^2 \left(\log_{\frac{a^2+1}{a^2}} x - \log_{\frac{2}{a^2}} x \right)$$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

6. Fie $x, y, z > 1$. Să se determine condițiile necesare pentru ca

$$(\log_x yz)^3 + (\log_y xz)^3 + (\log_z xy)^3 \leq 24.$$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

7. Să se rezolve sistemul:

$$x^{\log_2 x} + y^{\log_4 y} = \frac{14}{3}; \quad \log_2^2 x + \frac{1}{4} \log_2^2 y = \frac{5 - \log_2 3}{2}.$$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

8. a) Fie $a \in \mathbb{Z}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - [ax]$. Să se determine a știind că f este bijectivă și $f = f^{-1}$.

b) Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ știind că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = n + n[x]$, este bijectivă.

(*)**

9. Să se rezolve ecuațiile :

a) $2^{\frac{3x+4}{x+1}} + 3^{\frac{x+2}{x+1}} = 25^x$

b) $3^{x+\log_3 x} + x \cdot 2^x = 5$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

Clasa a XI - a

Subiecte selectate de catedra de matematică a C.T. Spiru Haret-Ploiești

1. Să se calculeze :

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{C_n^k} ; \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{2^n + 2^{2n-2k}} .$$

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

2. Fie $a, b \in (1, \infty)$, $a \neq b$. Să se determine funcțiile continue $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(a^x) = f(b^x)$, $\forall x > 0$.

Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești

3. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1} \subset [0, \infty)$ definit prin $a_1 = 0$, $a_n + a_{n+1}^2 = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sqrt{n})a_n - n}{\sqrt{n}}$.

Cezar Apostolescu, Ploiești

4. Să se calculeze A^n , pentru $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$, unde

$$A = \begin{pmatrix} 3\cos \alpha - 4\sin \alpha & -4\cos \alpha - 3\sin \alpha \\ 3\sin \alpha + 4\cos \alpha & 3\cos \alpha - 4\sin \alpha \end{pmatrix}$$

Ramona Beșleagă și Gh. Stancu, Ploiești

5. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin $x_1 = 2010$, $x_{n+1} = \frac{x_n^{2010}}{2010} + x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k^{2009}}{x_{k+1}}$.

Ion Badea, Ploiești

6. Să se rezolve în $M_2(\mathbb{C})$ ecuația:

$$X^{2010} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}.$$

Anca Popovici, Ploiești

7. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ de numere reale nenule. Să se arate că :

a) dacă șirul $y_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{x_{k+1}}{x_k} \right]$ este convergent, atunci șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

b) Dacă $a > 0$, $x_n > 0$, $\forall n \geq 1$ și șirul $z_n = \sum_{k=1}^n \left[\frac{a + x_k}{x_{k+1}} \right]$ este convergent, atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ este divergent.

Emil Vasile, Ploiești

8. Fie $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu $a_{ii} = a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $i = \overline{1, 3}$ și produsul elementelor pe orice linie sau coloană să fie 1. Sunt suficiente aceste condiții pentru a spune că $\det(A) > 0$?

Nicolae Breazu, Ploiești

Clasa a XII - a

1. Să se calculeze $\int_0^1 \sum_{k=0}^{2009} \left[x + \frac{k}{2010} \right] dx$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului a .

Ramona Besleaga, Ploiești

2. Fie șirul $(f_n)_{n \geq 0}$ de funcții continue $f_n : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, a > 0$, astfel încât f_{n+1} este o primitivă a lui f_n pe intervalul $[0, a]$ astfel încât $f_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că dacă $f_{2009}(a) = \frac{a}{2010!}$, atunci există $x_0 \in (0, a)$, cu $f_0(x_0) = x_0$

Ion Badea, Ploiești

Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ soluțiile ecuației

$$2009^{x^2-x-2} + 2010^{x^2-x-2} = 2008^{x^2-x-2} + 2011^{x^2-x-2} \quad (1).$$

3. a) Să se determine un polinom $P \in \mathbb{R}[X]$ de grad $n-1, n \geq 2$, astfel încât $\int_{x_i}^{x_{i+1}} P(t) dt = 0, \forall i = 1, n-1$.
- b) Fie $f : [x_1, x_2] \rightarrow [x_3, x_4]$ o funcție bijectivă, strict crescătoare și derivabilă cu derivata continuă, unde x_1, x_2, x_3, x_4 sunt soluțiile ecuației (1) și $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Să se demonstreze că :

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \int_{x_3}^{x_4} f^{-1}(x) dx = -1$$

Ion Badea, Ploiești

4. Să se determine ecuațiile de gradul al treilea cu coeficienți reali care au ca rădăcini sinusurile unghiurilor unui triunghi dreptunghic dat.

Anca Popovici, Ploiești

5. Să se calculeze integrala: unde $x \in (1; \infty)$.

$$\int \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\dots \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}}} dx,$$

Nicolae Breazu, Ploiești

6. Fie funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât F este primitivă a lui f și $[f(x)] = [F(x)] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a . Să se determine o funcție f știind că $f(x) \cdot F(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Emil Vasile, Ploiești

7. Fie $a \geq 0$ și $k \in \mathbb{N}^*$ fixat. Să se studieze convergența șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, unde avem

$$a_n = \int_0^n \frac{(ax+1)^{n-1}}{n^k (2x+1)^{n+1}} dx. \quad \text{Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești}$$

8. Fie funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât F este primitivă a lui f și $[f(x)] = [F(x)] = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $[a]$ este partea întreagă a numărului real a . Să se determine o funcție f știind că $f(x) \cdot F(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Emil Vasile, Ploiești

