

MERIDIAN

REVISTA DE MATEMATICĂ A ELEVILOR DIN ROVINARI

FONDATORI

REDACTORI COORDONATORI

INST. RADU DORINA

PROF. PRUNESCU ROMEO PROF. POMANĂ LIVIU

COLECTIV DE REDACȚIE

REDACTOR ȘEF: Elev. TUDOSIE ROBERT

REDACTOR ȘEF ADJ: Elev. CURICI CRISTIAN

SECRETAR: Elev. MARIN ANDRA

REDACTORI: Elev. MORENCIU IONUȚ

Elev. TATARCIUC ELENA

Elev. LUCULESCU DAMIAN

Elev. COMAN ANA MARIA

Elev. AILINCĂI ALINA

Elev. ANTON FLAVIUS

Elev. MUNTEANU ALEXANDRU

DIRECTOR REVISTĂ: INST. RADU DORINA

TEHNOREDACTARE: INST. LUCA SIMONA

ȘCOALA GENERALĂ NR. 1

LOC. ROVINARI, JUD. GORJ

TEL: 0253/371255

<http://www.didactic.ro/index.php?cid=reviste&page=4>

PUBLICAȚIE PERIODICĂ

ANUL II / NR. 1

NOIEMBRIE 2005



DIN SUMAR

Articole și note matematice	3
Modulul unui număr real	3
Calculul unor sume	8
Rezolvarea problemelor compuse	13
Medalion: Euclid – părintele geometriei	16
Probleme rezolvate	19
Probleme propuse	31
Ciclul primar	31
Ciclul gimnazial	40
Testarea Națională	47
Probleme de concurs	52
Ciclul primar	52
Ciclul gimnazial	53
A 56-a Olimpiadă Națională	58
Teste recapitulative	60
Ciclul primar	60
Ciclul gimnazial	63
Matematica distractivă	71
Pentru cei isteți	71
Probleme distractive	73
Știați că	75
Curiozități	76

ARTICOLE ȘI NOTE MATEMATICE

Modulul (valoarea absolută) unui număr real

Noțiunea de modul, $| \quad |$, este introdusă odată cu prezentarea numerelor întregi; ea fiind necesară atât la ordonare cât și la operațiile cu ele. În clasa a VII-a întâlnim modulul numerelor raționale, iar în clasa a VIII-a, modulul unui număr real. Ne propunem în continuare să facem o recapitulare a noțiunilor legate de modul, vom rezolva cele mai des întâlnite probleme cu modul din gimnaziu, iar în încheiere probleme mai dificile, necesare pentru pregătirea olimpiadelor școlare.

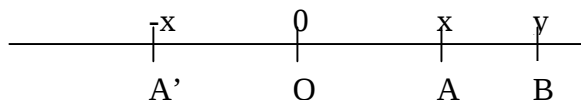
$$\text{Fie } x \in \mathbb{R}, \text{ definim, } |x| = \begin{cases} x, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Exemplu: } |-5| = 5; \left| \frac{7}{3} \right| = \frac{7}{3}; |-\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$$

Proprietăți:

1. $|x| \geq 0$, pentru oricare $x \in \mathbb{R}$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
2. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$; $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, $y \neq 0$; $|x^n| = |x|^n$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
4. $|x| = |-x|$; $|x - y| = |y - x|$.

Din punct de vedere geometric, modulul numărului „ x ” reprezintă distanța de la punctul „ A ” de abscisă „ x ”, situat pe axa numerelor, până la punctul O .



$$|x| = d(A; O) = d(A'; O) - \text{distanța de la un punct la origine;}$$

$$|x - y| = d(A; B) = d(B; A) - \text{distanța dintre două puncte.}$$

Legătura dintre modul și radical este dată de: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Vom nota cu **max(a;b)**; **min(a;b)** cel mai mare număr, respectiv cel mai mic număr dintre a și b.

Exemplu: $\max(2;5)=5$; $\min(2;5)=2$

Atunci: 1. $|x| = \max(x; -x)$;

$$2. \max(x; y) = \frac{x + y + |x - y|}{2};$$

$$3. \min(x; y) = \frac{x + y - |x - y|}{2};$$

$$4. |x - y| = \max(x; y) - \min(x; y), \text{ unde } x, y \in \mathbb{R}.$$

Rezolvarea ecuațiilor cu modul.

1. $|x| = a$, $a \geq 0$, are soluțiile $x = \pm a$.

Exemple: $|x| = 3$, $x = \pm 3$; $|x| = 0$, $x = 0$; $|x| = -2$ imposibil.

2. $|x - a| = b$, $x - a = \pm b$, $x = a \pm b$

$|x + a| = b$, $x + a = \pm b$, $x = -a \pm b$, dacă $b \geq 0$.

Exemple: $|x - 3| = 7$, de unde $x - 3 = \pm 7$. Se obține $x = 10$ și $x = -4$ soluțiile ecuației.

3. $|x - a| = |x - b|$. Cele două cantități trebuie să fie egale ca mărime: $x - a = x - b$ (i) și $x - a = -(x - b)$ (ii).

4. $|x - |x - a|| = b$, $b \geq 0$. Se obține $x - |x - a| = \pm b$ de unde $|x - a| = x \pm b$ și atunci $x - a = \pm(x \pm b)$, având de rezolvat patru ecuații.

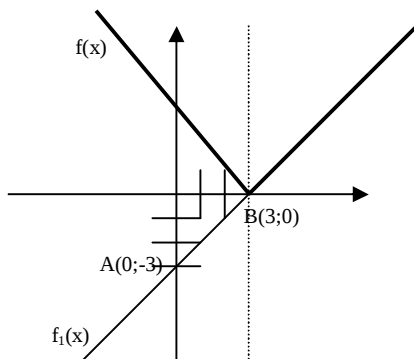
Graficul unei funcții $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de forma $f(x) = |ax + b|$.

Una din metode este explicitarea modulului și reprezentarea celor două ramuri pe intervalele respective.

În general pentru construcția graficului lui $|f(x)|$, trebuie construit graficul lui $f(x)$, partea de grafic situată deasupra axei ox rămâne neschimbată, iar părțile situate sub axă îi construim simetricul față de ox.

Exemplu: Să se construiască graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = |x - 3|$.

Construim graficul funcției $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x - 3$.



Observații: 1. Graficul unei funcții $f(x)$ este simetric față de axa verticală $x = a$ (axă de simetrie) dacă $f(a - x) = f(a + x)$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. În exemplul de mai sus $x = 3$ este axă de simetrie.

2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$ reprezintă o familie de drepte paralele cu axa ox . Pentru $m = 0$ se obține chiar axa absciselor.

Aceste observații ne sunt utile în rezolvarea unor ecuații cu module, ce conțin un parametru $m \in \mathbb{R}$. O ecuație de forma $f(x) = m$ are atâtea soluții câte puncte comune are graficul lui $f(x)$ cu dreapta $y = m$.

Vom rezolva în continuare câteva **exerciții pregătitoare pentru examene și olimpiade școlare**.

1. Să se rezolve ecuația: $\sqrt{(x-3)^2} - 3 + x = 0$.

Soluție: Se obține $|x-3| = 3-x$. Deci $3-x \geq 0$, $x \leq 3$ este condiția ca egalitatea să aibă sens. Se rezolvă ecuațiile $x-3 = 3-x$ cu soluția $x = 3$ și $x-3 = -(3-x)$ care este adevărată pentru orice $x \in (-\infty; 3]$.

2. Să se rezolve ecuația $|2 - |1-x|| = 1$ (revista „Meridian” nr. 2).

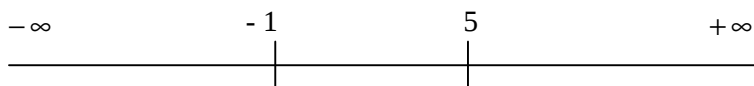
Soluție. Avem $2 - |1-x| = 1$ și $2 - |1-x| = -1$. Se obține $x \in \{-2; 0; 2; 4\}$

3. Să se rezolve ecuația $|x^2 - 9| + |2x - 6| = 0$ (propusă „Testarea națională 2004”).

Soluție: se obține $|(x-3)(x+3)| + |2(x-3)| = 0 \Leftrightarrow |x-3|(|x+3| + 2) = 0$
Cum $|x+3| + 2 > 0$ vom avea $|x-3| = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

4. Să se rezolve ecuația $3x - 2|x + 1| - |x - 5| = 3$ (propusă „Olimpiada de matematică 2004”)

Soluție: $|x + 1| = \begin{cases} x + 1; x + 1 \geq 0 \\ -(x + 1); x + 1 < 0 \end{cases}$ și $|x - 5| = \begin{cases} x - 5; x - 5 \geq 0 \\ -(x - 5); x - 5 < 0 \end{cases}$.



Avem de rezolvat trei ecuații pe intervalele: $(-\infty; -1)$; $[-1; 5]$ și $[5; +\infty)$.

Dacă $x \in (-\infty; -1)$ ecuația devine: $3x + 2(x + 1) - (5 - x) = 3$ cu soluția $x = 1$, inacceptabilă deoarece $1 \notin (-\infty; -1)$.

Dacă $x \in [-1; 5]$ ecuația devine: $3x - 2(x + 1) - (5 - x) = 3$ cu soluția $x = 5$, imposibilă deoarece $5 \notin [-1; 5]$.

Dacă $x \in [5; +\infty)$ ecuația devine: $3x - 2(x + 1) + (5 - x) = 3$ cu soluția $x \in [5; +\infty)$.

5. Să se determine $y \in \mathbb{R}$ știind că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem

$$|x + y| = |x| + |y|.$$

Soluție: Pentru $x = 1$; $|1 + y| = 1 + |y|$, de unde $y \geq 0$ (1). Pentru $x = -1$; $|-1 + y| = 1 + |y|$, de unde $y \leq 0$ (2).

Din (1) și (2) se obține $y = 0$.

6. Determinați $m \in \mathbb{Z}$ astfel încât ecuația

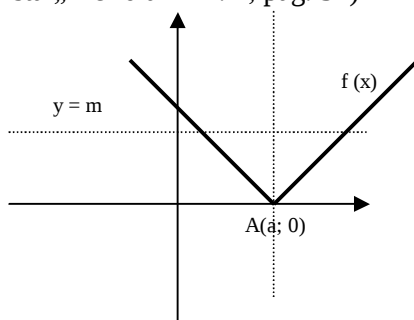
$$|x| + |x - 1| + |x - 2| + \dots + |x - 2005| = m$$

să aibă soluție unică. (Revista „Meridian” nr. 2, pag. 52)

Soluție: Ca să înțelegem cum descoperim soluția vom face câteva constatări:

1. Să se determine m (dacă există), astfel ca ecuația $|x - a| = m$, $a \geq 0$ să aibă soluție unică.

Graficul lui $f(x) = |x - a|$ este cel din figură. Dacă $m < 0$ ecuația nu



are nici o soluție, dacă $m > 0$ are două soluții, iar pentru $m = 0$, găsim soluția unică $x = a$ (axa de simetrie a graficului lui f).

2. Să se determine m (dacă există) astfel ca ecuația $|x - a| + |x - b| = m$; $0 < a < b$ să aibă soluție unică.

Dacă $f(x) = |x - a| + |x - b|$, atunci

$$f(x) = \begin{cases} a + b - 2x; & x < a \\ b - a; & x \in [a; b] \\ 2x - (a + b); & x \geq b \end{cases}$$

Se observă că $x = \frac{a+b}{2}$ este axă de

simetrie. Pentru $x \neq \frac{a+b}{2}$ ecuația

nu are soluție unică, iar $x = \frac{a+b}{2}$

este soluție unică și se obține pentru

$m = b - a$. Această observație ne arată că soluția unică este la jumătatea intervalului $[a; b]$.

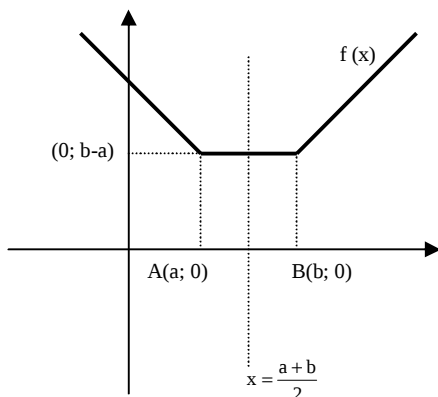
Revenind la ecuația propusă constatăm că intervalele $[0; 2005]$; $[1; 2004]$; $[2; 2003]$; ... ; $[1002; 1003]$ au toate mijlocul în punctul de abscisă

$x_0 = \frac{2005}{2}$ care este soluția unică, ținând seama de observația precedentă.

$$\text{Vom avea } \left| \frac{2005}{2} \right| + \left| \frac{2005}{2} - 1 \right| + \dots + \left| \frac{2005}{2} - 1002 \right| + \left| \frac{2005}{2} - 1003 \right| + \dots + \left| \frac{2005}{2} - 2004 \right| + \left| \frac{2005}{2} - 2005 \right| = m,$$

$$\text{de unde } m = \frac{2006 \cdot 1003}{2} \Rightarrow m = 1003^2.$$

Observații: 1. Într-o astfel de ecuație, chiar dacă avem un număr par sau impar de module, se caută mijlocul comun al intervalelor care apar, aceasta fiind soluția unică.



Ecuția $|x-3|+|x-10|+\left|x-\frac{1}{2}\right|+|x+2|+|x+9|=m$ are soluția

unică $x=\frac{1}{2}$ și se obține pentru $m=14$.

2. În cazul când nu există același centru al intervalelor, problema unicității nu se mai pune.

Ecuția $|x-1|+|x-3|+|x-5|+|x-9|=m$ nu are soluție unică oricare ar fi m .

Prof. David Viorel
Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari

Calculul unor sume

1. Sume de numere naturale

1.1 Suma primelor n numere naturale:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Pentru calculul sumei vom ține cont de faptul că:

$$1 + n = 2 + (n-1) = 3 + (n-2) = \dots$$

Vom scrie suma de două ori, a doua oară așezând termenii în ordine inversă.

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1) + n$$

$$S_1 = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Adunând cele două egalități membru cu membru se obține:

$$S_1 = \underbrace{\left(\frac{n+1}{1} + \frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{3} + \dots + \frac{n+1}{n-1} + \frac{n+1}{n}\right)}_{n\text{-ori}}$$

Adică $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemplu: $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = 5050$.

1.2. Suma primelor n numere naturale pare:

$$S_2 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$$

Avem succesiv $S_2 = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$, adică

$$S_2 = n(n+1)$$

1.3. Suma primelor n numere naturale impare:

$$S_3 = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$$

Vom repeta procedeul aplicat pentru calculul lui S_1 și vom obține:

$$2S_3 = \underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + 2n}_{n\text{-ori}} = 2n^2, \text{ adică } S_3 = n^2.$$

1.4. Generalizare:

Dacă termenii sumei $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ au proprietatea că $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = r$ (constant), adică $a_k = a_{k-1} + r$, oricare $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n$, atunci:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

unde n – este numărul termenilor sumei.

Vom spune că termenii sunt în progresie aritmetică, deoarece

$$a_k = \frac{a_{k+1} + a_{k-1}}{2} \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}, 2 \leq k \leq n - 1.$$

Observații: 1. În acest caz al n -lea termen are proprietatea:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

2. Numărul termenilor se află din $n = \frac{a_n - a_1}{r} + 1$.

Exemplu: Să se calculeze suma: $S = 2 + 7 + 12 + 17 + \dots + 497 + 502$.

Cum $7 - 2 = 12 - 7 = 17 - 12 = \dots = 502 - 497 = 5$ atunci termenii sumei sunt în progresie aritmetică. Avem $n = \frac{502 - 2}{5} + 1 = 251$ termeni.

$$\text{Se obține } S = \frac{(2 + 502) \cdot 251}{2} = 63252.$$

1.5. Sume de puteri

$$S_4 = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (1)$$

Înmulțim ambii membri ai egalității cu x (baza puterilor) și obținem:

$$xS_4 = x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + x^{n+1} \quad (2).$$

Scădem relația (1) din relația (2) și obținem: $S_4 = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$.

Exemplu: Să se calculeze suma $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{100}$.

Avem succesiv $S = \frac{2^{100+1} - 1}{2 - 1} = 2^{101} - 1$.

1.6. Generalizare

Dacă termenii sumei $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ au proprietatea că $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_n}{b_{n-1}} = q$ (const.), adică $b_k = b_{k-1} \cdot q$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n - 1$, atunci

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Vom spune atunci că termenii sumei sunt în progresie geometrică, deoarece $b_k^2 = b_{k+1} \cdot b_{k-1}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n - 1$.

Observație: Al n-lea termen al unei astfel de sume are proprietatea:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Exemplu: Să se calculeze suma $S = 3 + 6 + 12 + \dots + 3072 + 6144$.

Se observă că $\frac{6}{3} = \frac{12}{6} = \dots = \frac{6144}{3072} = 2$ și deci termenii sumei sunt în progresie geometrică. Cum $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, numărul termenilor sumei se află din $6144 = 3 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow n = 12$.

Atunci $S = 3 \cdot \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 3 \cdot (2^{12} - 1)$.

1.7. Sunt utile și formulele:

$$S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_6 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

2. Sume de numere raționale

$$2.1. \boxed{S_7 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}.$$

Observăm că fiecare fracție se poate scrie astfel:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}; \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \dots; \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Avem } S_7 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \boxed{S_7 = 1 - \frac{1}{n+1}}$$

2.2. Generalizare

Calculul sumei $S_n = \frac{r}{a_1 \cdot a_2} + \frac{r}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{r}{a_{n-1} \cdot a_n}$, unde $r = a_k - a_{k-1}$,

oricare ar fi $k \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n$, se face scriind suma sub forma

$$S_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \Rightarrow S_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n}.$$

Exemplu: Calculați suma $S = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101}$.

$$\text{Scriem } S = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{99 \cdot 101} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101}.$$

$$2.3. \boxed{S_8 = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}}$$

$$\text{Avem } S_8 = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} \Rightarrow S_8 = 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\boxed{S_8 = 2 - \frac{2}{n+1}}$$

3. Sume care implică factorialul unui număr natural

$$3.1. \boxed{S_9 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n!} \quad \text{unde } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

Vom scrie $S_9 = (2-1) \cdot 1! + (3-1) \cdot 2! + \dots + (n+1-1) \cdot n!$ și vom obține

$$S_9 = 2 \cdot 1! - 1 \cdot 1! + 3 \cdot 2! - 1 \cdot 2! + \dots + (n+1) \cdot n! - 1 \cdot n!.$$

Cum $(k+1) \cdot k! = (k+1)!$ vom avea $S_9 = 2! - 1! + 3! - 2! + 4! - 3! + \dots + (n+1)! - n!$
 $S_9 = (n+1)! - 1!$.

$$3.2. S_{10} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$$

Scriem $S_{10} = \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{n-1}{n!}$. Cum $\frac{k}{k!} = \frac{1}{(k-1)!}$, avem

$$S_{10} = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \Rightarrow S_{10} = 1 - \frac{1}{n!}$$

4. Sume de numere iraționale

$$4.1. S_{11} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

Raționalizând numitorii obținem:

$$S_{11} = \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Rightarrow S_{11} = \sqrt{n} - 1$$

$$4.2. S_{12} = \frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$$

După raționalizare se obține:

$$S_{12} = \frac{2\sqrt{1}-1\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6} + \dots + \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n^2+n} \Leftrightarrow$$

$$S_{12} = \frac{\sqrt{1}}{1} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \dots + \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow S_{12} = 1 - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

Exerciții propuse:

1. Arătați că $N = 2^{13} + 2^{23} + 2^{33} + \dots + 2^{2003}$ este divizibil cu 10^3 .

Etape locală, Argeș 2003, clasa a V-a

2. Arătați că $A = 1 + 3 + 5 + \dots + 2003$ este pătrat perfect.

Etape locală, Maramureș 2003, clasa a V-a

3. Arătați că există $y \in \mathbb{Q}$ astfel încât

$$y^2 = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 6} + \frac{1}{3 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 100}$$

Etape locală, Constanța 2003, clasa a VI-a

4. Se consideră $q = \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{63}$. Arătați că $\frac{1}{3} < q < \frac{4}{3}$.

5. Calculați suma $A = 3 + 33 + 333 + \dots + \underbrace{333\dots3}_{n\text{-ori}}$.

Etapă locală, Maramureș 2003, clasa a VI-a

6. Arătați că $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots + \frac{1}{2002^2} < \frac{2001}{4004}$.

Etapă locală, Satu Mare 2003, clasa a VI-a

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor naturale ecuația:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (x+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2001 - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2001}$$

Etapă locală, Galați 2003, clasa a VII-a

8. Calculați suma:

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{2002^2} + \frac{1}{2003^2}}$$

Etapă locală, Argeș 2003, clasa a VIII-a

9. Valoarea numărului:

$$A = \frac{1}{1 + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{3361} + \sqrt{3364}} \text{ este } \dots$$

Etapă locală, Galați 2003, clasa a VIII-a

10. Arătați că $\frac{1}{5n+1} + \frac{1}{5n+2} + \dots + \frac{1}{25n} > \frac{6}{5}$.

Etapă locală, Timiș 2003, clasa a VIII-a

**Bivolaru Iulieta,
G.S.I. Turceni**

Rezolvarea problemelor compuse

Problemele compuse oferă situații foarte variate, rezolvarea lor presupunând nu numai cunoașterea regulilor și metodelor generale, ci și o gândire personală, activă și creatoare, o atenție concentrată.

Examinarea unei probleme compuse se face, de regulă, prin metoda analitică sau prin metoda sintetică, cele două metode putând fi folosite simultan sau una dintre ele poate să predomină, aceasta impunându-și

specificul asupra căilor de rezolvare care să ducă la găsirea soluției. Rezolvarea unei probleme compuse constă în descompunerea ei în probleme simple care, prin rezolvarea succesivă, să ducă la găsirea soluției finale.

Prin metoda sintezei se pleacă de la datele problemei spre găsirea soluției ei, iar prin metoda analizei se pleacă de la întrebarea problemei spre datele ei și stabilirea relațiilor matematice între ele.

În practică s-a demonstrat că metoda sintezei este mai accesibilă, dar nu solicită prea mult gândirea elevilor. Mai mult, se constată că unii elevi, pierd din vedere întrebarea problemei și sunt tentați să calculeze valori de mărimi care nu sunt necesare în găsirea soluției problemei.

Metoda analitică pare mai dificilă, dar solicită mai mult gândirea elevilor și îi ajută să privească probleme în totalitatea ei, întrebarea problemei fiind mereu în atenția lor.

O dată cu analiza logică a problemei se formulează și planul de rezolvare.

În clasa I, planul problemei se întocmește la început oral, elevii neavând suficiente cunoștințe și deprinderi de scriere, manieră care se continuă și în clasa a II-a, în unele situații. Se recomandă ca în clasa a II-a planul de rezolvare să se facă oral sau în scris, în egală măsură, iar în clasele a III –a și a IV-a, după întocmirea planului oral, să se treacă la scrierea planului.

Forma în care poate fi scris planul este variată, dar cea mai eficientă este sub forma întrebărilor.

O atenție deosebită trebuie să se acorde problemelor ce admit mai multe procedee de rezolvare, pentru că prin rezolvarea lor se cultivă mobilitatea gândirii, creativitatea sa, se formează simțul estetic al școlarilor. Formarea priceperilor de a găsi noi procedee de rezolvare, constituie o adevărată gimnastică a minții, educându-se astfel atenția, spiritul de investigație și de perspicacitate al elevilor.

De multe ori, elevii nu sesizează de la început existența mai multor căi de rezolvare.

Sarcina învățătorului este aceea ca prin analiza întreprinsă cu clasa, prin întrebări ajutătoare să-i determine pe elevi să gândească și alte modalități de exprimare.

Exemplificare:

“Vlad avea 745 lei. Din acești bani a cumpărat o minge cu 175 lei, o bluză cu 295 lei, pantaloni scurți la prețul de 120 lei și o carte cu 25 lei.

Ce sumă i-a mai rămas? “

Unii elevi pot rezolva problema efectuând operațiile necesare în ordinea acțiunilor cuprinse în enunț, alți elevi, analizând mai bine problema, renunță la ordinea acțiunilor cuprinse în enunț și caută valorile între care pot stabili o relație utilă, mai economicoasă și mai simplă, pentru rezolvarea problemei.

Cum organizăm datele problemei ?

745lei.....175lei295lei.....120 lei.....25 lei.....? lei

I.

745 lei – 175 lei = 570 lei
 570 lei – 295 lei = 275 lei
 275 lei – 120 lei = 155 lei
 155 lei – 25 lei = 130 lei
 745 lei 175 lei
 570 lei 295 lei
 275 lei 120 lei
 155 lei 25 lei
 130 lei

II.

175 lei + 295 lei + 120 lei + 25 lei = 615 lei
 745 lei – 615 lei = 130 lei
 175 lei + 295 lei + 120 lei + 25 lei
 745 lei - 615 lei
 130 lei

Al doilea procedeu are la bază ca modalitate de rezolvare folosirea modelului logico-matematic obținut prin etape succesive.

Rezolvarea problemelor după un plan de rezolvare necesită și folosirea schemelor, desenelor, graficelor, iar pentru formarea unei gândiri sintetice, formule numerice sau literale.

Într-o oră de matematică este preferabil să se rezolve doar 2 – 3 probleme la care să se insiste asupra raționamentului, asupra diferitelor căi posibile de rezolvare, asupra schemei, punerii în formulă numerică și literală, compunerii unor probleme analoage, pornind de la exercițiu și formulă, decât să se rezolve, în mod superficial, mai multe probleme fără respectarea cerințelor amintite mai sus.

Inst. Radu Dorina
Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari

MEDALION

Părintele geometriei

EUCLID (330-275 î.Hr.) este unul dintre marii matematicieni ai antichității eline. A studiat la Academia din Atena; a fost profesor la școala pe care a întemeiat-o în Alexandria (în anul 323 î.Hr.). Despre viața lui nu se cunosc decât puține informații, că era o fire indulgentă și extrem de modest.

Opera sa, "Elemente", a fost timp de 2000 de ani principală carte de unde se putea învăța geometria.

Ea sintetizează cunoștințele matematice din acea vreme și este cea dintâi expunere sistematică a matematicii elementare. "Elementele" nu sunt o operă originală a lui Euclid. Lui îi revine însă meritul de a fi adunat, ordonat și completat în această operă toate teoremele și problemele cunoscute înaintea lui și de a le fi expus cu o claritate rar întâlnită.

A fost tradusă în circa 300 de limbi străine, având mai mult de 1000 de ediții tipărite și numeroase alte ediții în manuscris, ținând, astfel, recordul drept cea mai citită carte științifică din lume.

În opera sa sunt și contribuții originale precum: demonstrația faptului că 2 nu este pătrat perfect (așa cum se procedează acum în manualele școlare), teorema împărțirii întregi; stabilirea teoremei catetei și a înălțimii unui triunghi dreptunghic; a reciprocității teoremei lui Pitagora, definirea puterii unui punct față de cerc și altele. În această lucrare a fost inițiată tradiția de a indica sfârșitul unei demonstrații prin cuvintele: **qoud erat demonstrandum** (ceea ce era de demonstrat).

Claritatea expunerii lui Euclid a rămas proverbială. Despre Pascal se spune că în copilărie a citit "Elementele" ca pe o poveste. Newton, când a văzut cu ce claritate sunt expuse teoremele și problemele, nu le-a citit, spunând că sunt periculoase deoarece nu te mai lasă să gândești.

Euclid a organizat și a condus secția de matematici a vestitei biblioteci din Alexandria pe timpul lui Ptolemeu I, regele Egiptului. Se povestește că Ptolemeu



l-ar fi întrebat, dacă pentru studiul geometriei nu există un drum mai scurt decât “Elementele”, la care Euclid a răspuns: “în geometrie nu există drumuri egale”.

Iată 5 dintre axiomele care apar în “Elemente”:

- Cele egale cu aceleași sunt egale între ele;
- Dacă la egale se adună egale, se obțin egale;
- Dacă din egale se scad egale, cele rămase sunt egale;
- Acelea ce coincid una cu alta sunt egale între ele;
- Întregul este mai mare decât partea.

Euclid a fost primul care a reușit să definească punctul, dreapta, planul.

„Punctul este ceva ce nu are nici o parte.”
„Linia este lungime fără lățime.”
„Dreapta este linia situată la fel față de toate punctele ei.”
„Suprafața este ceea ce are numai lungime și lățime.”
„Planul este suprafața situată la fel față de toate dreptele conținute.”

Tot în această lucrare, Euclid a pronunțat și celebrul postulat, al cincilea, postulat care, de peste douăzeci de secole îi poartă numele:

„Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă”

Se pare că Euclid a fost și un excelent profesor, blând și modest. Se spune că odată un student, după ce a învățat la școala lui Euclid prima teoremă a întrebat:

- Dar, cu ce mă aleg învățând aceste lucruri?

Atunci Euclid a poruncit sclavului:

- Dă-i acestuia trei bănuți, fiindcă el vrea să câștige din ceea ce învață!



Ce știa Euclid?

Algebră – că:

- Ø $a(b + c + d + \dots) = ab + ac + ad + \dots$
- Ø $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2$
- Ø $ab + \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2$
- Ø $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$

Geometria plană – că:

- Ø să construiască un pătrat echivalent cu un poligon;
- Ø să construiască un arc capabil de un unghi dat;
- Ø să construiască cercul înscris și cercul circumscris într-un triunghi dat;
- Ø cunoștea teorema bisectoarei;
- Ø cunoștea cazurile de asemănare ale triunghiurilor;
- Ø că raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare;
- Ø că o catetă este media geometrică între ipotenuză și proiecția ei pe ipotenuză;
- Ø teorema reciprocă teoremei lui Pitagora.

Geometrie în spațiu – că:

- Ø perpendicularele într-un punct pe o dreaptă sunt situate într-un plan;
- Ø două perpendiculare pe același plan sunt paralele și reciproc;
- Ø solidele paralelipipedice cu aceeași bază și cu înălțimi egale au volumele echivalente;
- Ø o prismă triunghiulară se descompune în trei piramide de volume echivalente;
- Ø volumul oricărui con este echivalent cu a treia parte din volumul unui cilindru cu aceeași bază și înălțime;
- Ø intersecția a două plane perpendiculare pe un al treilea plan este o perpendiculară pe acest plan.



PROBLEME REZOLVATE

CLASA a V-a

1. Să se demonstreze că mulțimile $A = \{5n + 2; 5n + 3; 5n + 7; 5n + 8 \mid n \in \mathbf{N}\}$ și $B = \{n^2 \mid n \in \mathbf{N}\}$ sunt disjuncte.

Soluție:

Avem ultima cifră a numărului n^2 aparținând mulțimii $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$, oricare ar fi n număr natural. Dar ultima cifră a numărului $5n$ aparține mulțimii $\{0, 5\}$, oricare ar fi n număr natural. Atunci orice element din mulțimea A are ultima cifră din mulțimea $\{2, 3, 7, 8\}$. Așadar A și B sunt disjuncte.

2. Fie mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbf{N} \mid x = 2^{2^n}, n \in \mathbf{N}^*, n \leq 2\} \quad B = \{y \in \mathbf{N} \mid y^2 = x, x \in A\}$$

$$C = \{z \in \mathbf{N} \mid z = y^2 - 1, y \in B\}$$

Determinați elementele mulțimilor și calculați $A \cup B$, $A \cap B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$.

Soluție:

Din $n \in \mathbf{N}^*$ și $n \leq 2 \Rightarrow n \in \{1, 2\} \Rightarrow x = 2^{2^n} \in \{4, 16\}$. Deci $A = \{4, 16\}$.

Din $y^2 = x \Rightarrow y^2 \in \{4, 16\} \Rightarrow y \in \{2, 4\} \Rightarrow B = \{2, 4\}$.

Din $z = y^2 - 1 \Rightarrow z \in \{3, 15\} \Rightarrow C = \{3, 15\}$.

$$A \cup B = \{2, 4, 16\}$$

$$A \cap B = \{4\}$$

Așadar

$$B - A = \{2\}$$

$$B - C = \{2, 4\} = B.$$

3. Stabiliți dacă următoarele două mulțimi sunt disjuncte:

$$A = \{(m+1)^2 \mid m \in \mathbf{N}\} \text{ și } B = \{6^n + 1, 6^n + 2, 6^n + 6, 6^n + 7 \mid n \in \mathbf{N}\}.$$

Soluție:

Analog problema 1 de mai sus, elementele mulțimii A au ultima cifră din mulțimea $\{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$. Cum 6^n are ultima cifră din mulțimea $\{1, 6\}$, atunci orice element din B are ultima cifră din mulțimea $\{2, 3, 7, 8\}$. Deci A și B sunt disjuncte.

4. Mulțimile A și B au următoarele proprietăți: a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$; b) fiecare mulțime are câte două elemente; c) dacă $x \in A$, atunci $(x + 1) \in B$. Determinați mulțimile A și B.

Soluție:

Din condițiile b) și c) $\Rightarrow 1 \in A \Rightarrow 2 \in B \Rightarrow 3 \in A \Rightarrow 4 \in B$, pentru că $1 \notin B$, deoarece $0 \notin A$. Așadar $A = \{1, 3\}$ și $B = \{2, 4\}$.

5. Determinați elementele mulțimilor A și B dacă: a) A și B au câte trei elemente numere naturale consecutive; b) cel mai mic element al mulțimii A este succesorul celui mai mare element al mulțimii B; c) suma elementelor mulțimii $A \cup B$ este egală cu 27.

Soluție:

Fie $A = \{x, x + 1, x + 2\}$ și $B = \{y, y + 1, y + 2\}$ (din condiția a). Din condiția b, obținem $x = y + 2 + 1 = y + 3$, deci $A = \{y + 3, y + 4, y + 5\}$. Așadar $A \cup B = \{y, y + 1, y + 2, y + 3, y + 4, y + 5\}$ și din condiția c rezultă că $y + y + 1 + y + 2 + y + 3 + y + 4 + y + 5 = 27$, obținând $y = 2$. Deci $B = \{2, 3, 4\}$ și $A = \{5, 6, 7\}$.

6. Fie mulțimile $P = \{5x + 3; 4\}$ și $Q = \{x^2; 2y + 1\}$, unde x și y sunt numere naturale.

- a) Determinați x și y astfel încât mulțimea $P \cup Q$ să aibă două elemente;
- b) Dacă $y = 2$, determinați x astfel încât $P \cup Q$ să aibă trei elemente.

Soluție:

a) $P \cup Q$ are două elemente $\Rightarrow P = Q$. Cum $5x + 3$ are ultima cifră 3 sau 8, oricare ar fi x, rezultă că nu este pătrat perfect $\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 2y + 1 = 5x + 3 \Rightarrow 2y + 1 = 13 \Rightarrow y = 3$.

b) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow 5x + 3 = 13 \neq 5 = 2y + 1 \Rightarrow P \cup Q = \{4, 5, 13\}$.

7. Calculați suma elementelor mulțimii:

$$\{2a + 3b \mid 10a + 17b = 400, a, b \in \mathbb{N}\}$$

Soluție:

$$10a + 17b = 400 \Rightarrow 10(a + b) + 7b = 400 \Rightarrow 7b \equiv 10 \Rightarrow b \equiv 10 \Rightarrow$$

$b \in \{0, 10, 20\}$ pentru că dacă $b = 30$, atunci $17b = 510 > 400$.

Dacă

$$b = 0 \Rightarrow 10a = 400 \Rightarrow a = 40$$

$$b = 10 \Rightarrow 10a = 230 \Rightarrow a = 23$$

$$b = 20 \Rightarrow 10a = 60 \Rightarrow a = 6$$

Așadar mulțimea are elementele $\{80, 76, 72\}$, iar suma lor este 228.

8. Fie mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2n+2} \cdot 10^{n+1} - 10 \cdot 2^{3n} \cdot 5^n = 2000\}$ și

$B = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{111_2} \leq \overline{xx}_{10} \leq \overline{1101_2}\}$. Să se verifice dacă A și B sunt disjuncte.

Soluție:

Avem

$$2^{2n+2} \cdot 10^{n+1} - 10 \cdot 2^{3n} \cdot 5^n = 2000 \Rightarrow$$

$$2^{2n+2} \cdot 10^{n+1} - 10 \cdot 2^n \cdot 5^n \cdot 2^{2n} = 2000 \Rightarrow$$

$$2^{2n+2} \cdot 10^{n+1} - 10^{n+1} \cdot 2^{2n} = 2000 \Rightarrow$$

$$2^{2n} \cdot 10^{n+1} \cdot (2^2 - 1) = 2000 \Rightarrow 2^{2n} \cdot 10^{n+1} \cdot 3 = 2000$$

ceea ce este fals $\Rightarrow A = \Phi$.

$$\text{Avem } \overline{111_2} = 2^2 + 2^1 + 2^0 = 7 \quad \text{și} \quad \overline{1101_2} = 2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$$

$$\Rightarrow \overline{xx} = 11 \Rightarrow B = \{1\}. \text{ Deci } A \text{ și } B \text{ sunt disjuncte.}$$

CLASA a VI-a

1. Să se arate că numărul:

$$A = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \right]$$

este pătrat perfect, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

$$\text{Ținând cont că } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}, \text{ oricare ar fi } k \in \mathbb{N}^* \quad (1)$$

$$\Rightarrow A = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) =$$

$$= n(n+1) \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \right) = n(n+1) \cdot \frac{n}{n+1} = n^2 - \text{pătrat perfect.}$$

2. Calculați: $S = \frac{1}{1986 \cdot 1987} + \frac{1}{1987 \cdot 1988} + \dots + \frac{1}{1999 \cdot 2000}$.

Soluție:

Ținând cont de relația (1) de mai sus obținem

$$S = \frac{1}{1986} - \frac{1}{2000} = \frac{14}{1986 \cdot 2000} = \frac{7}{1986000}.$$

3. Arătați că numărul $a = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{4n}$ se divide cu 120, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție:

Observăm că $3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$, așadar putem scrie numărul a astfel:

$$\begin{aligned} & (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^4 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + K + 3^{4n-4} \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) \\ & = 120 \cdot (1 + 3^4 + K + 3^{4n-4}) \parallel 120. \end{aligned}$$

4. Să se determine $n \in \mathbb{N}$, pentru care $\frac{n^2 + 2}{n + 2} \in \mathbb{N}$.

Soluție:

$$\begin{aligned} \frac{n^2 + 2}{n + 2} &= \frac{n^2 + 2n - 2n - 4 + 4 + 2}{n + 2} = \frac{n(n + 2) - 2(n + 2) + 6}{n + 2} = n - 2 + \\ &+ \frac{6}{n + 2} \in \mathbb{N} \Rightarrow (n + 2) \in D_6 = \{1, 2, 3, 6\}. \text{ Scăzând } 2 \text{ peste tot} \\ &\Rightarrow n \in \{0, 1, 4\}. \end{aligned}$$

5. În jurul unui punct avem unghiurile AOB, BOC, COD, DOA astfel încât $m(\angle BOC) = 2 \cdot m(\angle AOB)$, $m(\angle COD) = 3 \cdot m(\angle AOB)$ și $m(\angle DOA) = 2 \cdot m(\angle BOC)$.

- Să se calculeze măsurile unghiurilor din jurul punctului O;
- Arătați că punctele B, O și D sunt coliniare;
- Calculați măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor AOB și AOD.

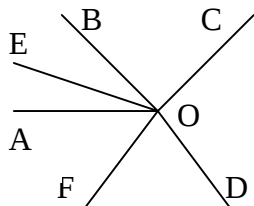
Soluție:

a) Avem

$$\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OD + \hat{D}OC = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}OB + 2 \cdot \hat{A}OB + 3 \cdot \hat{A}OB + 4 \cdot \hat{A}OB = 360$$

$$\Rightarrow \hat{A}OB = 36^\circ \Rightarrow \hat{B}OC = 72^\circ$$



$$\Rightarrow \widehat{C\hat{O}D} = 108^\circ \Rightarrow \widehat{D\hat{O}A} = 144^\circ.$$

b) $\widehat{B\hat{O}D} = \widehat{B\hat{O}C} + \widehat{C\hat{O}D} = 180^\circ \Rightarrow B, O, D$ sunt coliniare.

c) Fie (OE bisectoarea unghiului AOB și (OF bisectoarea unghiului

$$AOD \Rightarrow \widehat{E\hat{O}F} = \frac{\widehat{A\hat{O}B}}{2} + \frac{\widehat{A\hat{O}D}}{2} = 90^\circ.$$

6. Pe latura (Ox a unui unghi propriu xOy se consideră punctele A și B ($A \in (OB)$)), iar pe latura (Oy punctele C și D astfel încât $[OC] \equiv [OA]$ și $[OD] \equiv [OB]$. Dreptele AD și BC se intersectează în I. Demonstrați că: a) $[BC] \equiv [AD]$; b) $\triangle AIB \equiv \triangle CID$; c) (OI bisectoarea unghiului xOy.

Soluție:

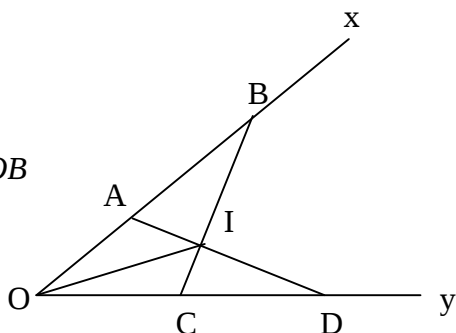
a) Avem

$$\left. \begin{array}{l} OA \equiv OC \\ OD \equiv OB \\ \hat{O} - \text{comun} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{L.U.L.} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \triangle AOD \equiv \triangle COB$$

$$\Rightarrow AD \equiv BC.$$

b)

$$\left. \begin{array}{l} AB = OB - OA \\ CD = OD - OC \\ OA \equiv OC, OB \equiv OD \end{array} \right\} \Rightarrow AB \equiv CD \quad (1)$$



Din a) $\Rightarrow \widehat{O\hat{B}C} \equiv \widehat{O\hat{D}A}$ (2) și $\widehat{O\hat{A}D} \equiv \widehat{O\hat{C}B} \Rightarrow$ că și suplementele lor sunt congruente $\widehat{B\hat{A}I} \equiv \widehat{I\hat{C}D}$ (3).

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow \triangle AIB \equiv \triangle CID$.

c) Din b) rezultă $AI \equiv CI$. Cum $OA \equiv OC$ și OI latură comună $\Rightarrow \triangle IOA \equiv \triangle IOC \Rightarrow \widehat{I\hat{O}A} \equiv \widehat{I\hat{O}C} \Rightarrow$ (OI este bisectoarea unghiului xOy.

7. Se dau punctele $M_0, M_1, \dots, M_{2004}$ (în această ordine) pe dreapta d și $M_0M_1 = 1\text{mm}, M_1M_2 = 2\text{mm}, \dots, M_{2003}M_{2004} = 2004\text{mm}$. Să se calculeze: a) lungimea segmentului M_0M_{2004} ; b) este M_{1002} mijlocul segmentului $[M_0M_{2004}]$? Justificați.

Soluție:

$$a) M_0 M_{2004} = 1 + 2 + K + 2004 = \frac{2004 \cdot 2005}{2} = 2009010 \text{ mm}$$

$$b) M_0 M_{1002} = 1 + 2 + K + 1002 = \frac{1002 \cdot 1003}{2} = 502503 \text{ mm} \Rightarrow M_{1002} \text{ nu}$$

este mijlocul segmentului $M_0 M_{2004}$.

8. Fie triunghiul ABC cu $\angle B \equiv \angle C$. Pe latura AB se ia un punct M, iar pe AC un punct N astfel încât $[BM] \equiv [CN]$. Demonstrați că:

a) $[BN] \equiv [CM]$;

b) $[PB] \equiv [PC]$, unde P este intersecția dreptelor BN și CM;

c) (AP este bisectoarea unghiului BAC).

Soluție:

a)

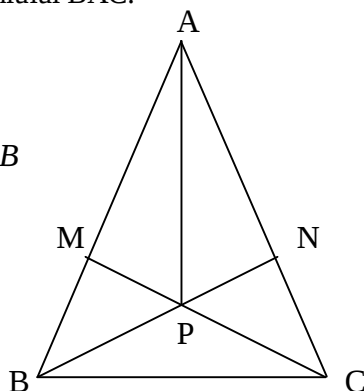
$$\left. \begin{array}{l} BM \equiv CN \\ \hat{B} \equiv \hat{C} \\ BC - \text{comună} \end{array} \right\} \text{L.U.L.} \Rightarrow \Delta MBC \equiv \Delta NCB$$

$$\Rightarrow MC \equiv BN$$

$$b) \text{ Din a) } \Rightarrow \hat{MCB} \equiv \hat{NBC} \Rightarrow \Rightarrow \Delta PBC - \text{isoscel} \Rightarrow PB \equiv PC$$

c)

$$\left. \begin{array}{l} AB \equiv AC \\ PB \equiv PC \\ AP - \text{comună} \end{array} \right\} \text{L.L.L.} \Rightarrow \Delta PAB \equiv \Delta PAC \Rightarrow \hat{BAP} \equiv \hat{CAP} \Rightarrow (AP \text{ este}$$



bisectoarea unghiului BAC.

CLASA a VII-a

1. Dacă $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}$, $y \neq 0$, $x + y = 17$ și $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$, atunci $x - y = ?$

Soluție:

$$\frac{x}{y} = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = k \Rightarrow x = 3k, y = 5k \Rightarrow 8k = 17 \Rightarrow k = \frac{17}{8}$$

$$\Rightarrow x = \frac{51}{8}, y = \frac{85}{8} \Rightarrow x - y = -\frac{34}{8} = -\frac{17}{4}.$$

2. Suma a trei numere naturale este 87. Dacă se mărește primul număr cu 150% din el, al doilea se micșorează cu 25% din el, iar al treilea număr se micșorează cu 5, numerele obținute sunt egale. Aflați numerele.

Soluție:

$$x + 150\% \cdot x = y - 25\% \cdot y = z - 5 \Rightarrow$$

$$\frac{5}{2} \cdot x = \frac{3}{4} \cdot y = z - 5 \Rightarrow x = \frac{2}{5}z - 2$$

și $y = \frac{4}{3}z - \frac{20}{3} \Rightarrow x + y + z = \frac{2}{5}z - 2 + \frac{4}{3}z - \frac{20}{3} + z = 87$. Rezolvând ecuația obținem soluția $z = 35$. Înlocuind pe z , obținem $x = 12$ și $y = 40$.

3. Determinați numerele naturale $\overline{abc}$, știind că $a + b$, $b + c$, $c + a$ sunt invers proporționale cu $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}$, iar media aritmetică a numerelor a, b, c este un număr prim.

Soluție:

$$\left. \begin{array}{l} a + b = 5k \\ \frac{a+b}{5} = \frac{b+c}{6} = \frac{a+c}{7} = k \Rightarrow b+c=6k \\ a+c=7k \end{array} \right\} \Rightarrow 2a + 2b + 2c = 18k \Rightarrow$$

$$a + b + c = 9k \Rightarrow a = 3k, b = 2k, c = 4k, m_a = 3k.$$

$$m_a = \frac{a+b+c}{3} \text{ are maxim valoarea } 9 \text{ (pentru că } a, b, c \text{ sunt cifre)}$$

$\Rightarrow m_a \in \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow 3k \in \{2, 3, 5, 7\} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow a = 3, b = 2, c = 4$. Așadar am obținut numărul 324.

4. Dacă numărul $\overline{bc}$ reprezintă 4% din numărul $\overline{abc}$, calculați $a + b + c$.

Soluție:

$$\overline{bc} = \frac{4}{100} \cdot \overline{abc} \Rightarrow 100 \cdot \overline{bc} = 4 \cdot \overline{abc} \Rightarrow \overline{bc00} = 4 \cdot \overline{abc} \Rightarrow c = 5 \text{ și } 4b + 2$$

sunt ultima cifră 0 $\Rightarrow b \in \{2, 7\}$.

$$b = 2 \Rightarrow 4a + 1 = 25 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a + b + c = 13$$

$$b = 7 \Rightarrow 4a + 1 = 75 \text{ fals.}$$

5. În triunghiul isoscel ABC avem $AB = AC = 12$ cm și $BC = 8$ cm, $M \in (AB)$ și $N \in (AC)$ astfel încât $MN \parallel BC$. Aflați distanțele MB și MN astfel încât perimetrul trapezului BMNC să fie egal cu 20 cm.

Soluție:

Fie $MB = x$.

Rezultă că și $NC = x$ și $AM = 12 - x$.

$$MN \parallel AB \xrightarrow{\text{t.f.a.}} \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{8} = \frac{12 - x}{12} \Rightarrow MN = \frac{2(12 - x)}{3}$$

Atunci:

$$P_{MNCB} = 2x + \frac{24 - 2x}{3} + 8 = 20 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow MB = 3 \Rightarrow MN = 6.$$

6. Fie M mijlocul laturii CD a paralelogramului ABCD și $AM \cap BC = \{Q\}$. Calculați $AQ:MQ$.

Soluție:

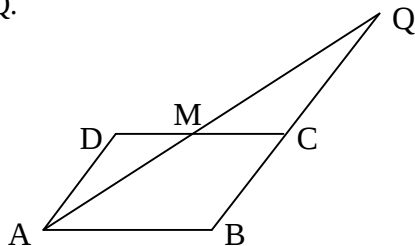
$$AD \parallel BC \xrightarrow{\text{t.f.a.}} \triangle ADM \sim \triangle QCM.$$

Dar $DM \equiv MC$

$$\Rightarrow \triangle ADM \equiv \triangle MQC \Rightarrow$$

M este mijlocul segmentului AQ

$$\Rightarrow \frac{AQ}{MQ} = 2.$$



7. În triunghiul ABC, $D \in (BC)$ și $E \in (AC)$, $AD \cap BE = \{O\}$. a) Dacă $[AD]$ este mediană, atunci $AO \cdot EC = 2AE \cdot OD$? b) Dacă $AO \cdot EC = 2AE \cdot OD$, atunci $[AD]$ este mediană?

Soluție:

a) Fie AD mediană $\Rightarrow BD \equiv DC$.

Fie $CF \parallel AD$, $F \in BE \xrightarrow{\text{t.f.a.}}$

$$\triangle AOE \sim \triangle CFE \Rightarrow \frac{AO}{CF} = \frac{AE}{EC} \Rightarrow$$

$$AO \cdot EC = AE \cdot CF \quad (1).$$

Dar $OD \parallel FC$ și D este mijlocul lui BC

$\Rightarrow OD$ este linie mijlocie în $\triangle BFC$

$\Rightarrow FC = 2 \cdot OD \quad (2).$

Din (1) și (2) $\Rightarrow AO \cdot EC = 2 \cdot AE \cdot OD.$

b) Fie $CF \parallel AD$, $F \in BE$.

Analog punctul a) $\Rightarrow AO \cdot EC = AE \cdot CF.$

Dar $AO \cdot EC = 2 \cdot AE \cdot OD \Rightarrow CF = 2 \cdot OD,$

și cum $CF \parallel OD \Rightarrow OD$ este linie mijlocie în $\triangle BFC \Rightarrow D$ este mijlocul lui $BC \Rightarrow AD$ este mediană.

8. În triunghiul ABC , fie $P \in (AB)$ și $E \in (AC)$ astfel încât $PE \parallel BC$ și $3AP = 2AB$. Fie M mijlocul lui (AC) și $PE \cap BM = \{S\}$. Arătați că S este centrul de greutate al triunghiului ABC .

Soluție:

$$\text{Din } PE \parallel BC \xrightarrow{t. \text{Thales}} \frac{AP}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{2}{3} \cdot AC.$$

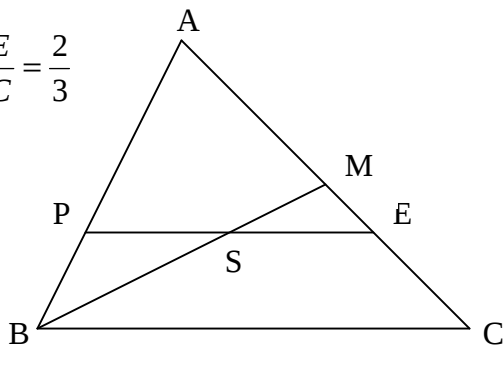
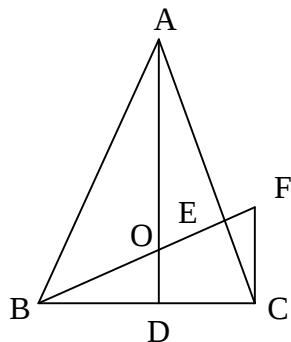
Atunci cum $ME = AE - AM$

$$\Rightarrow ME = \frac{2}{3} \cdot AC - \frac{1}{2} \cdot AC$$

$$\Rightarrow ME = \frac{1}{6} \cdot AC.$$

$$SE \parallel BC \xrightarrow{t. \text{Thales}} \frac{MS}{MB} = \frac{ME}{MC} = \frac{\frac{1}{6} \cdot AC}{\frac{1}{2} \cdot AC} = \frac{1}{3}. \text{ Cum } BM \text{ este mediană} \Rightarrow S$$

este centrul de greutate al $\triangle ABC$.



CLASA a VIII-a

1. Fie numărul $A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Aflați numerele a și b , știind că $A \in [a, b]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar intervalul $[a, b]$ are lungime maximă.

Soluție:

$$\text{Avem } A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$\text{Cum } x^2 + 1 \geq 2x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow A \leq 2.$$

$$\text{Cum } A = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \geq 0 \Rightarrow A \in [0; 2].$$

2. Rezolvați ecuația: $\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{2}{x^2 - x + 2} + \dots + \frac{2004}{x^2 - x + 2004} = 2004$.

Soluție:

Ecuația devine

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} - 1 + \frac{2}{x^2 - x + 2} - 1 + K + \frac{2004}{x^2 - x + 2004} - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{-x^2 + x}{x^2 - x + 1} + \frac{-x^2 + x}{x^2 - x + 2} + K + \frac{-x^2 + x}{x^2 - x + 2004} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(-x^2 + x) \cdot \left(\frac{1}{x^2 - x + 1} + K + \frac{1}{x^2 - x + 2004} \right) = 0.$$

$$\text{Cum } x^2 - x + 1 = x^2 - x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow -x^2 + x = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot (x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ sau } x = 1.$$

3. Să se arate că:

$$(a + b + c)^2 \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ac} + c\sqrt{ab}, (\forall) a, b, c \in [0, +\infty).$$

Soluție:

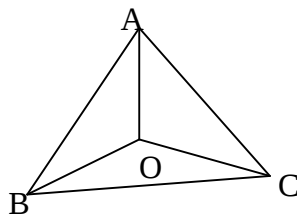
$$\text{Folosind inegalitatea mediilor } \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{ab \cdot ac} + \sqrt{ab \cdot bc} + \sqrt{ac \cdot bc} \leq \frac{1}{2} \cdot (ab + ac + ab + bc + ac + bc) = ab + ac + bc.$$

$$\text{Cum } (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq ab + ac + bc$$

$\forall a, b, c \geq 0 \Rightarrow$ inegalitatea cerută.

4. Fie O, A, B, C patru puncte necoplanare astfel încât $OA \perp OB \perp OC \perp OA$. Arătați că triunghiul ABC este ascuțitunghic.



Soluție:

Dacă $\hat{A}BC \geq 90^\circ \Rightarrow$ proiecția pe planul (OBC) a unghiului ABC , care este unghiul OBC ar fi $\geq 90^\circ$, ceea ce este fals pentru că $\triangle OBC$ este dreptunghic.

5. Se dă triunghiul ABC , dreptunghic în A , având catetele $AB = 2\sqrt{2}$ și $AC = \sqrt{3}$. Pe planul triunghiului, de aceeași parte a sa, se ridică perpendicularele $AD = 8, BE = 4, CF = 2$. Să se arate că triunghiul DEF este dreptunghic.

Soluție:

Din teorema lui Pitagora în $\triangle ABC \Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 = 11 \Rightarrow BC = \sqrt{11}$. Avem trapezul dreptunghic $ABED$.

Fie $EM \perp AD \Rightarrow AM = 4, MD = 4, EM = 2\sqrt{2}$, și aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle EMD$, obținem $DE^2 = 24$.

Analog în trapezele dreptunghice $BCFE$ și $ACFD$, obținem $EF^2 = 15$ și $DF^2 = 39$.

Observăm că $DF^2 = DE^2 + EF^2 \Rightarrow$ din reciproca teoremei lui Pitagora că triunghiul DEF este dreptunghic.

6. Pe planul hexagonului regulat $ABCDEF$ de latură a se duce perpendiculara $MA = a$.

a) Calculați $d(M, BC)$;

b) Dacă $AP \perp MC, P \in (MC)$, demonstrați că triunghiul APD este dreptunghic.

Soluție:

a) Fie

$$\left. \begin{array}{l} AN \perp BC \\ MA \perp (ABC) \\ AN, BC \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T.3.1} \\ \Rightarrow MN \perp BC \Rightarrow d(M, BC) = MN. \end{array}$$

$$\text{În } \triangle ABC, \hat{A}BN = 60^\circ \Rightarrow \sin \hat{A}BN = \frac{AN}{AB} \Rightarrow AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Din teorema lui Pitagora în } \triangle MAN \Rightarrow MN^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

b) Avem

$$\left. \begin{array}{l} AC \perp CD \\ MA \perp (ABC) \\ AC, CD \subset (ABC) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{T.3.1} \\ \Rightarrow MC \perp CD. \text{ Cum și } AC \perp CD \Rightarrow CD \perp (MAC). \end{array}$$

Dar $AP \subset (MAC) \Rightarrow AP \perp CD$. Cum $AP \perp PC \Rightarrow AP \perp (PCD)$. Dar $PD \subset (PCD) \Rightarrow AP \perp PD \Rightarrow \triangle APD$ este dreptunghic.

7. Fie A și B două puncte ale unui plan α , O un punct exterior planului α , iar M și N mijloacele segmentelor AO și BO. Două drepte paralele duse prin M și N intersectează planul α în punctele P și Q. Demonstrați că $[MN] \equiv [PQ]$.

Soluție:

MN este linie mijlocie în triunghiul ABC $\Rightarrow AB \parallel MN$.

Cum $MN \subset (MNPQ)$ și

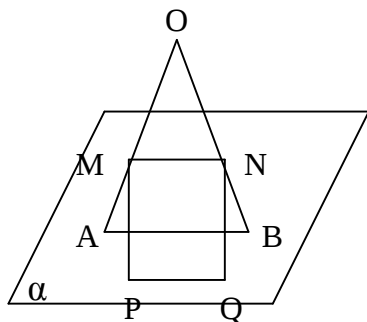
$AB \not\subset (MNPQ) \Rightarrow AB \parallel (MNPQ)$.

Dar $AB \subset \alpha$ și

$\alpha \cap (MNPQ) = PQ \Rightarrow AB \parallel PQ$.

Cum $AB \parallel MN \Rightarrow MN \parallel PQ$.

Dar $MP \parallel NQ \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram $\Rightarrow MN \equiv PQ$.



PROBLEME PROPUSE

CLASA I

1. Numără de la 0 la 20
 - a) în ordine crescătoare:
 - b) în ordine descrescătoare.
2. Găsește vecinii numerelor: 1, 5, 7, 9.
3. Află numărul natural ai cărui vecini au suma 8.
4. La diferența vecinilor numărului 3 adaugă vecinul mai mic al numărului 5.
5. Observați regula de formare a șirului și continuați scrierea lui cu încă patru numere:

5, 7, 9, 11, ..., ..., ..., ...
 18, 15, 12, ..., ..., ..., ...
6. Șapte fluturi în grădină
 Se rotesc lâng-o tulpină.
 Mâța stă și mi-i pândește,
 Grivei latră și-o gonește.

Doi din fluturii zglobii
 S-au ascuns în bălării.
 Ceilalți zboară tocmai sus
 Socotește, câți sunt sus?
7. - Bună ziua, ciupercuțe,
 Patru mari și trei micuțe!
 - Bună ziua, voinicel!
 Știi acum câte suntem?
8. Află suma a patru numere consecutive, știind că unul dintre numere este 2. Găsește toate posibilitățile!
9. Dacă Irina mănâncă 6 bomboane, observă că în cutie mai rămân 9 bomboane.
 Câte bomboane ar fi trebuit să mănânce dacă dorea să-i mai rămână doar 4 bomboane?

10. Verifică egalitățile:

$$6 + 4 = 4 + 6 = 9$$

$$2 + 7 = 8 + 1 = 9$$

$$8 + 2 = 5 + 5 = 10$$

$$3 + 5 = 2 + 6 = 8$$

$$5 + 4 = 6 + 3 = 9$$

$$3 + 6 = 6 + 3 = 8$$

11. Suma a două numere naturale este 17. Primul număr are cifra unităților zero. Găsește al doilea număr. Câte soluții ai găsit?

12. Mă gândesc la un număr. Îi adaug 7 și obțin 15. La ce număr m-am gândit?

13. Află numărul perelor dintr-o farfurie, știind că acesta reprezintă suma vecinilor numărului 9 micșorată cu 4.

14. Dacă acum 7 ani eu aveam 3 ani, câți ani voi avea peste 6 ani?

15. În fiecare zi, bunica ia câte 5 ouă de găină din cuib. Câte ouă va aduna în cinci zile?

16. În clasa I sunt înscriși 22 de elevi. Câte bănci sunt în clasă, dacă în fiecare bancă stau câte doi elevi? (Rezolvarea o faci cu ajutorul desenului).

17. Irina desenează animale și rațe. A desenat în total 7 animale și rațe. Câte animale și câte rațe a desenat, dacă după ce a numărat picioarele desenate, a găsit 18 picioare?

18. Completează casetele cu termenul corect:

$$\begin{array}{lcl}
 & \nearrow & 4 + 3 + \square \\
 10 & \rightarrow & \square + 7 + 0 \\
 & \searrow & 3 + \square + 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \nearrow & 6 + 8 + \square \\
 15 & \rightarrow & \square + 7 + 5 \\
 & \searrow & 9 + \square + 4
 \end{array}$$

19. Ce număr trebuie adăugat la suma numerelor 8 și 3 pentru a obține 20?

20. Mihai are 7 creioane colorate. După ce mai primește 12 creioane colorate, el îi oferă colegii sale de bancă 5 creioane colorate. Câte creioane colorate mai are acum Mihai?

Problemele au fost propuse de:

Înv. DIACONESCU MARIANA - Șc. Gen. Nr. 5 TG-JIU (4, 8, 12, 15)

Inst. LUCULESCU ILEANA - Șc. Gen. Tismana (5, 9, 13, 16)

Inst. BANȚA NICOLETA - Șc. Gen. Runcu (1, 7, 10, 20)

Inst. LUCĂ SIMONA - Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari (3, 14, 17, 19)

Înv. CHIȚORAN NICOLETA - Șc. Gen. Ocnița – jud. Vâlcea (2, 6, 11, 18).

CLASA a II-a

1. Mă gândesc la un număr. Îi adaug 49, scad cel mai mare număr impar de două cifre diferite și obțin 1.
La ce număr m-am gândit?
2. Află suma numerelor pare cuprinse între 0 și 20.
3. Indică predecesorii numerelor 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 și află suma lor.
4. Găsește numerele de forma $\overline{ab}$ unde:
a) $a - b = 2$ b) $a + b = 7$
5. Mama, tata și fiul au împreună 76 de ani.
Câți ani vor avea împreună peste 6 ani?
6. De ziua lui, Ionuț a primit de la colegul său de bancă 18 timbre. Pentru că acum avea dubluri la unele timbre, a dat din timbrele primite, jumătate prietenului său. În prezent, colecția sa de timbre numără 100 de timbre.
Câte timbre avea Ionuț în colecția sa înainte de ziua lui?
7. Calculează $a - b + c - d$ știind că $a = b + 13 = c + 24 = d + 36 = 50$.
8. Dacă $a + 113 = 338 + 115$, află $a - 113$

9. Află suma a cinci numere consecutive pare, știind că al doilea număr este triplul lui 8.
10. Diferența a două numere este 30. Dacă se dublează scăzătorul, diferența devine 20. Află cele două numere.
11. Tata are cu 36 ani mai mulți decât mine și are tot cu atâția ani mai puțini decât bunica. Câți ani avem împreună dacă vârsta tatălui meu este de 41 de ani.
12. Află numerele a , b , c a căror sumă este 121, al doilea număr este egal cu primul, iar suma ultimelor două este 98.
13. Al treilea termen al unei adunări este cu 41 mai mic decât primul termen, iar al doilea termen este cu 19 mai mare decât diferența primului și al treilea.
Care este suma celor trei termeni, dacă primul este 90?
14. Cât trebuie să mai adaug celui mai mic număr de trei cifre diferite ca să obțin suma dintre 251 și răsturnatul său?
15. Doi prieteni aleargă unul spre altul. După ce primul a parcurs 38 m, iar al doilea cu 27 m mai mult, distanța dintre ei rămâne de 125 m.
Află câți metri au fost la început între cei doi prieteni?
16. Cât trebuie să iau din cel mai mare număr de trei cifre consecutive pentru a obține suma dintre 184 și răsturnatul său?
17. Suma a două numere naturale este cu 10 mai mică decât triplul lui 40.
Află numerele știind că al doilea este dublul lui 29.
18. Scrie trei numere naturale consecutive, de forma $\overline{ab}$, a căror sumă este 33.
19. Dacă $a - 115 = 239$, iar $b - 89 = 175$, află suma $a + b = ?$

20. Bunica are 91 de păsări. Știind că numărul găinilor și al rațelor este 78, iar numărul rațelor și al găștelor 62, află câte găini, câte rațe și câte găște are bunica.

Probleme au fost propuse de:

Înv. BORUGĂ MARIA - Șc. Gen. Nr. 3 Rovinari (1, 2, 12, 15)

Inst. TEICĂ LOREDANA - Șc. Gen. Nr.1 Rovinari (3, 5, 18, 20)

Inst. POPESCU CORNELIA - Șc. Gen. C-tin Săvoiu Tg-Jiu (4, 6, 14)

Inst. PRIESCU NICOLETA - Liceul Roșia-Jiu (7, 8, 10)

Înv. VASILOIU C -TIN - Șc. Gen. Nr 1 Rovinari (13, 16, 17)

Inst. POPEANGĂ ANCUȚA - Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari (9, 11, 19)

CLASA a III-a

1. Cu cifrele 9, 0, 7, 5, 2, 4 scrie:
 - a) cel mai mare număr par;
 - b) cel mai mic număr par;
 - c) cel mai mare număr impar cu cifra sutelor 9.
2. Mă gândesc la un număr. Dacă succesul lui este cel mai mare număr format din patru cifre impare diferite, la ce număr m-am gândit ?
3. Alina are 7 ani. Dacă triplăm vârsta ei, obținem cu 12 ani mai mult decât vârsta fratelui ei. Câți ani are fratele Alinei?
4. O veveriță mănâncă zilnic cu 2 alune mai mult decât în ziua precedentă.
Știind că într-o săptămână a mâncat 63 de alune, află câte alune a mâncat în fiecare zi.
5. Într-o curte sunt 100 de păsări. Dintre acestea, 64 sunt găini, iar restul sunt rațe, găște și curci în mod egal.
Câte păsări sunt din fiecare fel?
6. Aflați toate perechile de numere naturale pentru care avem:
$$a + 3 \times b = 11$$
7. Află cel mai mic număr natural care îndeplinește toate condițiile următoare:
 - a) nu are cifre care să se repete;

lăţimea terenului este de 65 m. Află lungimea şi lăţimea terenului de fotbal din spatele blocului.

17. Un tren accelerat are 5 vagoane de clasa I cu câte 10 compartimente a câte 6 locuri fiecare compartiment şi 7 vagoane de clasa a II –a cu câte 10 compartimente a câte 8 locuri fiecare compartiment.
Câte locuri are trenul în total ?
18. Andrei şi Mihai au împreună 54 de timbre. Ştiind că Mihai are de cinci ori mai multe timbre decât Andrei află câte timbre are fiecare.
19. Colega mea de bancă a cumpărat o carte, o riglă şi un caiet. Rigla a costat 6 000 lei, caietul cât două rigle, iar cartea cât patru caiete.
Ce rest a primit ea de la 100 000 lei?
20. Calculaţi suma $a + b + c$ unde: a - este cel mai mic număr de trei cifre cu produsul cifrelor 21, b - este cel mai mic număr de trei cifre cu suma cifrelor 21, iar c - reprezintă suma dintre a şi b micşorată cu 21.

Problemele au fost propuse de :

Înv. ARGINTARU ADRIANA – Şc. Gen. Nr. 1 Rovinari (13, 14, 16, 17).

Inst. STANCU FLOAREA – Şc. Gen. Nr. 14 Piteşti –Argeş (1, 2).

Înv. POPESCU RODICA – Liceul Sportiv Tg – Jiu (6, 9, 11, 20).

Inst. SUROVCEK ION – Şc. Gen. Ocniţa-Vâlcea (7, 8, 12).

Inst. TUDOR MIRELA – Şc. Gen. Nr. 1 Rovinari (3, 4, 5, 15).

Înv. TUDOR MARIA – Şc. Gen. Floreşti (10, 18, 19).

CLASA a IV-a

1. Ai numărul 462 093 785. Elimină cinci cifre pentru a obţine:
 - a) cel mai mare număr par de patru cifre;
 - b) cel mai mic număr de patru cifre;
 - c) cel mai mare număr impar de patru cifre;
 - d) cel mai mic număr de patru cifre care are cifra sutelor 2.
2. Află numărul de forma $\overline{abcd}$, ştiind că are optsprezece sute , cifra zecilor este jumătate din cifra unităţilor, iar cifra unităţilor este un sfert din cifra sutelor.

3. Găsește numărul natural x , știind că dacă la dublul său adunăm jumătatea sa, sfertul său și 1, obținem 133.
4. Diferența a două numere este egală cu 167. Dacă le împărțim obținem câtul 7 și restul 11.
Află cele două numere.
5. Într-o curte sunt găini, rațe și oi. Știind că în total sunt 100 capete și 280 picioare, iar numărul rațelor este o treime din numărul găinilor, să se afle câte oi, câte rațe și câte găini sunt în curte.
6. Dacă la treimea unui număr a adăuga cel mai mic număr natural de patru cifre format din cifre diferite care se împart exact la 2 și a scadea apoi răsturnatul lui 159 a obține câtul dintre 1760 și 8.
Află numărul.
7. Află numerele a , b , c , și d care îndeplinesc simultan condițiile:
 - a este de patru ori mai mare decât b ;
 - c este cu 75 mai mare decât b ;
 - d este de trei ori mai mare decât c ;
 - suma dintre d și c este 500.
8. Află două numere în următoarele condiții:
 - dacă la primul număr adaug 72 obținem al doilea număr;
 - dacă la al doilea număr adaug 184, suma obținută va fi de trei ori mai mare decât primul număr.
9. Află suma a trei numere pare consecutive, știind că unul dintre ele este 4352.
Găsește toate posibilitățile.
10. Suma a trei numere naturale este 303 180. Suma primelor două este 154 860, iar al doilea este cu 83 216 mai mic decât al treilea.
Care sunt numerele?

11. Punând paranteze, există egalitatea:

$$2 \times 27 : 3 + 7 - 1 = 6 \quad ?$$

12. Diferența a două numere este 562 și întrece cu 28 triplul numărului mai mic.
Află numerele.
13. Efectuează:

$$(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100) \times (2004 : 12 - 100 - 60 - 7) =$$
14. Perimetrul unui triunghi este 3 000 m. Lungimea unei laturi este cu 38 m mai mică decât lungimea altei laturi și cu 68 m mai mare decât lungimea celeilalte laturi.
Află laturile triunghiului.
15. Produsul a două numere este 10 302. Dacă se mărește primul număr cu 1, produsul devine 10 404. Află numerele.
16. Doi elevi au împreună 2 520 lei. Află câți lei are fiecare știind că dacă unul dintre ei și-ar dubla suma de bani și ar adăuga la suma dublată și banii celui alt elev, ar obține o sumă de cinci ori mai mare decât suma acestuia din urmă.
17. Află valorile literelor a, b și c știind că suma lor este 889, câtu dintre al doilea și al treilea este 11 rest 5, iar primul este de 14 ori mai mic decât 1 792.
18. Cantitate de ciment ambalat în saci costă 2 574 000 lei. Dacă se cumpără cu 15 saci mai mult, se plătește suma de 2 904 000 lei.
Câți saci cu ciment s-au cumpărat?
19. În anul 1 974 vecinul meu avea vârsta egală cu suma cifrelor anului respectiv.
Câți ani are vecinul meu acum și în ce an s-a născut?
20. Un număr natural format din cinci cifre are cifra miilor 2. Află numărul știind că cifra zecilor de mii este de 4 ori mai mare decât cifra miilor, cifra sutelor este jumătate plus 1 din cifra zecilor de mii, iar zecile și unitățile reprezintă cel mai mare număr natural par format din două cifre.

Problemele au fost propuse de:

Inst. STANCU FLOAREA – Șc. Gen. Nr. 14 Pitești (1, 2, 17, 20)

Inst. SORLEA RAMONA – Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari (7, 8, 13)

Inst. PĂNIȘOARĂ OANA - Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari (6, 11, 18)

Inst. FILIP CLAUDIA – Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari (9, 10, 14)

Înv. PECINGINĂ CARMEN - Șc. Gen. Nr. 1 Rovinari (3, 4, 5, 19)

Înv. PÂRVULESCU MARIA – Șc. Gen. „Alexandru Ștefulescu” Tg-Jiu(12, 13, 16)

CLASA a V-a

1. Să se determine numărul natural n , $9 < n < 100$, știind că are suma cifrelor 11, iar dacă se schimbă cifrele între ele, numărul obținut este cu 45 mai mic decât n .

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

2. Să se determine $x < y < z < t$ știind că:

$$2^x + 2^y + 2^z + 2^t = 680.$$

Prof. Bivolaru Iulietta, G.S.I. Turceni

3. Efectuați:

$$\left[7^{65} : 7^{56} + (5^6)^7 + 6^7 \cdot 6^5 \right] : \left[(3^3)^4 \cdot (2^{2^2})^3 + 7 \cdot 7^2 \cdot (7^3)^2 + (25^3)^7 \right].$$

Prof. Todea Sorin, Șc. Gen. Dobrița

4. Se dau mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} | 2 \leq x \leq 8\}$.

a) Să se determine elementele celor două mulțimi.

b) Să se determine $A \cup B, A \cap B, A - B, B - A$.

Prof. Pomană Liviu, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

5. Să se determine mulțimile A și B știind că:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$

c) $A - B = \{1, 5, 9\}$.

Prof. Nanu Ion, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

6. Să se afle numerele naturale x, y astfel încât:

a) $\overline{3x7y} \equiv 45$; b) $\overline{x26y} \equiv 15$; c) $\overline{1x2y} \equiv 36$.

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

7. Să se determine cifra x și un număr prim n astfel încât:

$$[3 \cdot (137 + n)]^2 = \overline{28x1x6}.$$

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

8. Comparați 79^{18} cu 29^{29} .

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

9. Rezultatul calculului:

a) $(111 + 222 + 333 + 444 + 555 + 666) : (111 \cdot 21)$ este ...

b) $8^{16} : (2 \cdot 2^2 \cdot 4^{10})^2 - 2^1 - 2^0$ este ...

Prof. Badea Steluța, G.S.I. Turceni

10. Aflați ultima cifră a numărului:

a) $N = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{2005}$

Prof. Badea Steluța, G.S.I. Turceni

11. Să se calculeze restul împărțirii numărului $x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 1996 - 1$ la numărul $y = 10100$.

Prof. Mergea Maria, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

12. Arătați că numărul $n = 6 + 6^2 + 6^3 + \dots + 6^{100}$ este divizibil cu 42.

Prof. Tatarciuc Elena, Șc. Gen. Nr. 14, Pitești

13. Determinați $n \in \mathbb{N}$ dacă $2^{2n} + 2^{2n+1} + 4^{n+1} = 56 \cdot 2^{2005}$

Prof. Prunescu Romeo, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

14. Să se arate că $3a + 4b$ este pătrat perfect știind că $a \cdot b = 420$ și diferența dintre a și $a - 2b$ este 30.

Prof. Mihăilescu Delia, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

15. Să se determine numerele de forma $\overline{xx5}$ știind că împărțindu-le la un număr de o cifră se obține restul 7.

Prof. Tatarciuc Elena, Șc. Gen. Nr. 14, Pitești

CLASA a VI-a

1. Câte numere de forma $\overline{x43y}$ sunt divizibile cu 4? Dar cu 9?

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

2. Determinați numerele a, b, c direct proporționale cu 7, 14 și respectiv 21, dacă $3(a + 2b + 3c) = 7abc$.

Prof. Bivolaru Iulietta, G.S.I. Turceni

3. Să se determine $n \in \mathbb{N}$ astfel încât :

a) $\frac{7}{15} \leq \frac{n}{5} + \frac{1}{3} \leq \frac{3}{5}$

b) $\frac{2}{5} \leq \frac{3}{(n+1)^2} \leq \frac{8}{5}.$

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

4. Calculați : $2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) + K + 2005 \cdot \left(1 - \frac{1}{2005}\right).$

Prof. Pomană Liviu, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

5. Să se afle toate fracțiile cuprinse între $\frac{3}{11}$ și $\frac{4}{11}$ dar care au numitorul mai mic ca 11.

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

6. Făcând o reducere de preț cu 15% un magazin obține un beneficiu de 2%. Ce beneficiu în procente era planificat înainte de reducere?

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

7. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare astfel încât C este mijlocul segmentului AB, iar A este mijlocul segmentului BD. Dacă BD = 20 cm, ce lungime are segmentul CD?,

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

8. Unghiul format de bisectoarele a două unghiuri adiacente are măsura de 105°. Care este măsura unghiului format de laturile necomune?

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

9. Se consideră unghiul ascuțit $x\hat{O}y$. În semiplanul determinat de Ox și în care nu se află Oy se duc perpendicularele OA și OB pe Ox și Oy. Fie (OC bisectoarea unghiului $B\hat{O}x$).

a) Dacă măsura unghiului $A\hat{O}C$ este cu 16° mai mare decât măsura unghiului $x\hat{O}y$, să se calculeze măsura unghiului $x\hat{O}y$.

b) Dacă [OB este bisectoarea unghiului $A\hat{O}C$, atunci [Ox este bisectoarea unghiului $y\hat{O}C$.

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

10. Fie unghiurile adiacente și distincte două câte două $A_1\hat{O}A_2 \equiv A_2\hat{O}A_3 \equiv \dots \equiv A_{50}\hat{O}A_{51}$ cu $m(A_1\hat{O}A_{51}) = 50^0$. Să se afle $m(A_{20}\hat{O}A_{25})$.

Prof. Todea Sorin, Șc. Gen. Dobrița

11. Să se afle numerele x și y care verifică egalitatea:

$$1000x + 500y + z = 2006$$

Prof. Nanu Ion, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

12. În jurul unui punct se construiesc n unghiuri congruente de măsură $14^{\circ}24'$. Determinați valoarea lui n .

Prof. Mergea Maria, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

13. Se consideră segmentul $[AB]$ și punctele M și N situate în semiplane opuse față de dreapta AB , astfel încât $[MA] \equiv [MB]$ și $[NA] \equiv [NB]$.

Fie $MN \cap AB = \{O\}$. Demonstrați că:

- a) $[MO]$ este bisectoarea unghiului AMB ;
- b) O este mijlocul lui $[AB]$;
- c) $MN \perp AB$.

Prof. Prunescu Romeo, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

14. Determinați x și y numere naturale știind că $6y - x = x \cdot y$

Prof. Mihăilescu Delia, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

15. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacent suplementare, iar $[Ox]$ și $[Oy]$ sunt bisectoarele lor. Aflați măsurile unghiurilor AOB și BOC știind că $m(\widehat{BOy}) = 5 \cdot m(\widehat{AOx})$.

Prof. Tatarciuc Elena, Șc. Gen. Nr. 14, Pitești

CLASA a VII-a

1. Calculați valoarea raportului $\frac{x}{y}$, $y \neq 0$, dacă $\frac{4x + 7y}{2x + 3y} = 0$, (6).

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

2. O suprafață de pământ este cultivată astfel : trei șesimi este cultivată cu grâu, $\frac{7}{10}$ din rest este cultivată cu porumb, $\frac{7}{12}$ din noul rest este cultivată cu legume, iar restul de 10 ha este cultivată cu vie. Câte ha are suprafața?

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

3. Care este cel mai mic număr întreg care verifică inecuația

$$(3 - \sqrt{11}) \cdot x \leq 7 - 5\sqrt{2} ?$$

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

4. Să se arate că nu există numere naturale a și b astfel încât:

$$a^2 = b^2 + 2006.$$

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

5. În dreptunghiul ABCD, perpendiculara din C pe diagonala BD intersectează AB în M și AD în P. Să se arate că: a) $DM \perp PB$; b) $DB \cdot DC = DA \cdot PC$.

Prof. Bivolaru Iulieta, G.S.I. Turceni

6. Dacă $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} - \sqrt{2}$, atunci $a^{2005} = \dots$

Prof. Todea Sorin, Șc. Gen. Dobrița

7. Rezolvați ecuația

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{x}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (x+1)} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2005 - 1}{12 \cdot \dots \cdot 2005}$$

Prof. Pomană Liviu, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

8. În paralelogramul ABCD, $AB \parallel CD$, $\{O\} = AC \cap BD$, avem

$$B\hat{A}C \equiv B\hat{A}E, E \in (OB). \text{ Dacă } AB \cap CE = \{F\}, \text{ arătați că } \frac{AB}{BF} - \frac{AC}{AE} = 1$$

Prof. Nanu Ion, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

9. Fie patrulaterul convex ABCD în care $AB \equiv AC$, $DB \equiv DC$ și $m(\hat{A}BD) = m(\hat{A}CD) = 90^\circ$. Fie $T \in (AD)$ astfel încât $DB \equiv DT$. Demonstrați că T este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

Prof. Puzdrea Claudia, G.S.I. Turceni

10. Să se calculeze: $\sqrt{2} + \sqrt{2^2} + \sqrt{2^3} + \dots + \sqrt{2^{100}}$.

Prof. Tatarciuc Elena, Șc. Gen. Nr. 14, Pitești

11. Fie [Oz bisectoarea unghiului xOy cu măsura de 120° . O dreaptă oarecare intersectează [Ox, [Oy și [Oz în punctele A, B și C.

$$\text{Demonstrați că } \frac{1}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}.$$

Prof. Prunescu Romeo, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

12. Să se determine numerele întregi m și p astfel încât:

$$\frac{1}{5m^2 + 1} \leq \frac{p}{2} \leq \frac{1}{4m^2 + 1}.$$

Prof. Mergea Maria, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

13. Aflați elementele mulțimii: $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{\frac{3x-5}{x+1}} \in \mathbb{Z} \right\}.$

Prof. Puzdrea Claudia, G.S.I. Turceni

14. Fie ABCD un trapez cu $AB \parallel CD$. Pe latura AD se ia un punct P, iar pe latura BC se ia un punct Q astfel încât $AQ \parallel PC$. Demonstrați că $BP \parallel DQ$.

Prof. Bivolaru Iulietta, G.S.I. Turceni

15. Să se arate că dacă x, y, z, t sunt numere strict pozitive și mai mici decât 0,5 atunci: $1 < xy + (1-y)(1-z) + (1-x)(1-t) + zt < 2$.

Prof. Prunescu Romeo, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

CLASA a VIII-a

1. Să se arate că pentru orice număr natural nenul n ,

$$\sqrt{2n^2 + 7n + 6} + \sqrt{6n^2 + 25n + 14} \leq 4n + 7.$$

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

2. Să se arate că: $\frac{1}{123} + \frac{1}{124} + K + \frac{1}{321} \geq 0,8$.

Prof. David Viorel, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

3. Rezolvați ecuațiile:

a) $|2 - x| = m, m \in \mathbb{R}$

b) $\sqrt{-6x + 9 + x^2} + |x^2 - x - 6| = 0$

- c) $mx - 2 = 3x + m$, apoi determinați valoarea parametrului întreg m pentru care ecuația are rădăcini întregi.

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

4. Să se descompună în factori expresia $x^3 - 2x^2 - x + 2$, apoi să se determine mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0\}$.

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

5. Determinați mulțimea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} \cdot x - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \cdot x \right\}.$$

Prof. Pomană Liviu, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

6. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -2x + m + 3, m \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine parametrul m astfel încât $A(-2;5)$ să aparțină graficului funcției.

b) Pentru $m = -2$, să se determine numărul întreg x , astfel încât: $|f(x)| \leq 4$.

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

7. Pe planul $\triangle ABC$ se ridică perpendiculara AD . Știind că $AB = a\sqrt{2}, BC = a\sqrt{3}, AC = AD = a$, iar M și N sunt mijloacele laturilor AB și BC , să se calculeze:

a) distanța de la M la BC ,

b) distanța de la D la N ,

c) distanța de la D la CM .

Prof. Trașcă Liviu, G.S.I. Turceni

8. De aceeași parte a planului pătratului $ABCD$ se ridică perpendicularele $BN = a$; $CM = 2a$ și $DP = a$.

a) Să se arate că punctele A, M, N, P sunt coplanare;

b) Dacă $MN \cap BC = \{Q\}$ și $MP \cap DC = \{S\}$ calculați S_{MQS} .

Prof. Puzdrea Claudia, G.S.I. Turceni

9. Fie V, A, B, C patru puncte necoplanare astfel încât triunghiul ABC este echilateral și $VA^2 + VB^2 + VC^2 = VA \cdot VB + VB \cdot VC + VC \cdot VA$. Să se arate că $VA \perp BC$.

Prof. Prunescu Romeo, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

10. Demonstrați că dacă $a + b\sqrt{3} = 5$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $a^2 + b^2 \geq 2,5^2$.

Prof. Bivolaru Iulieta, G.S.I. Turceni

11. Numerele reale a și b verifică egalitatea:

$$a^2 + b^2 - 4\sqrt{3} \cdot a - 6\sqrt{2} \cdot b + 30 = 0$$

Calculați $\left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)(b - a)$.

Prof. Nanu Ion, Șc. Gen. Nr. 1, Rovinari

12. Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\sqrt{x^2 + ax + 9} = \left|x + \frac{a}{2}\right| + x(36 - a^2)$,

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

Prof. Tatarciuc Elena, Șc. Gen. Nr. 14, Pitești

TESTAREA NAȚIONALĂ

VARIANTA 1

Variantă propusă 2005

PARTEA I

1. a) Rezultatul calculului $16 - 8 \cdot 2$ este egal cu
b) 25 % din 40 este egal cu
c) Rezultatul calculului $16,38 : 0,09$ este egal cu
2. a) Dacă $2 \cdot x = 18$, atunci numărul real x este egal cu
b) Dacă $2 \cdot (x + 3) = 18$, atunci numărul real x este egal cu
c) Dacă $|x + 2| = 0$, atunci numărul real x este egal cu
3. a) Cel mai mic număr natural de trei cifre este egal cu
b) Dintre numerele 1012 și 1020 este mai mare numărul
c) Dintre numerele $4\sqrt{3}$ și 7 este mai mare numărul
4. În figura 1, măsura unghiului ADC este de 95° , iar măsura unghiului ACB este de 40° .
a) Măsura arcului mic AB este egală cu
b) Măsura arcului ABC este egală cu
c) Măsura unghiului BAC este egală cu
5. Cilindrul circular drept din figura 2 are înălțimea $OO' = 4\text{ cm}$ și diametrul bazei $AB = 6\text{ cm}$.
a) Raza cilindrului este egală cu cm.
b) Lungimea cercului, bază a cilindrului, este egală cu cm.
c) Aria laterală a cilindrului este egală cu cm^2 .

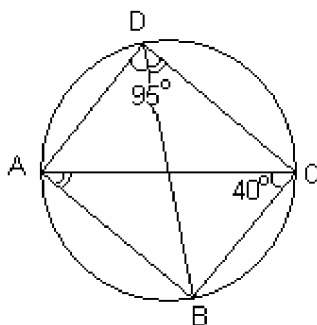


figura 1

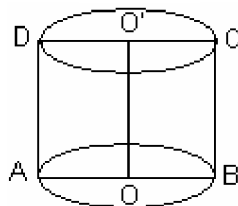


figura 2

PARTEA a II-a

1. Fie numerele de forma $\overline{ab}$, scrise în baza 10, cu $a \neq 0$.
 - a) Câte astfel de numere există? Justificați răspunsul.
 - b) Fie proporția $\frac{\overline{ab}}{b^2 + 5460} = \frac{1}{\overline{ab}}$. Aflați numărul $\overline{ab}$.
2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -3x + 6$.
 - a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .
 - b) Calculați distanța de la punctul $M(-4;0)$ la reprezentarea grafică a funcției f .
 - c) Rezolvați inecuația $f(n) + n\sqrt{3} > 0$, în mulțimea numerelor naturale.
3. În figura 3, $ABCA'B'C'$ este un trunchi de piramidă triunghiulară regulată. Apotema MM' a trunchiului are lungimea de 5 cm, iar apotemele bazelor au lungimile de 1 cm, respectiv 4 cm.
 - a) Completați pe foaia de examen desenul din figura 3 cu $\triangle AC'B$.
 - b) Calculați aria laterală a trunchiului de piramidă.
 - c) Calculați volumul trunchiului de piramidă.
 - d) Calculați tangenta unghiului dintre planele $(AC'B)$ și (ABC) .

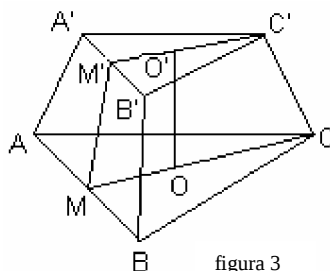


figura 3

VARIANTA 2

Variantă propusă 2005

PARTEA I

1. a) 20 % din 20 este egal cu ...
 - b) Frația ireductibilă egală cu $\frac{16}{18}$ este
 - c) Rezultatul calculului $\frac{16}{18} : \frac{8}{9}$ este egal cu
2. a) Dacă $x - 2 = 2$, atunci numărul natural x este egal cu

- b) Dacă $2 \cdot (x - 2) = 3 \cdot (2 - x)$, atunci numărul natural x este egal cu
- c) Dacă $3x - 2 < 7$, atunci numărul real x se află în intervalul $(-\infty; K)$.
3. a) $1 \text{ m} = \dots \text{ dm}$.
 b) $3700 \text{ m} = \dots \text{ hm}$.
 c) $1 \text{ ha} = \dots \text{ m}^2$.
4. În *figura 1*, triunghiul ABC este isoscel de bază BC , măsura unghiului BAC este de 120° , înălțimea din A este $AD = 4 \text{ cm}$, iar înălțimea din B este BE .
- a) Măsura unghiului ABC este egală cu $^\circ$.
 b) Lungimea laturii AB este egală cu cm .
 c) Lungimea segmentului EC este egală cu cm .
5. Conul circular drept din *figura 2* are înălțimea $VO = 4 \text{ cm}$ și diametrul $AB = 6 \text{ cm}$.
- a) Raza bazei conului este egală cu cm .
 b) Generatoarea conului este egală cu cm .
 c) Aria laterală a conului este egală cu cm^2 .

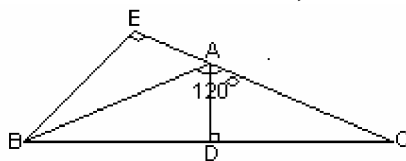


figura 1

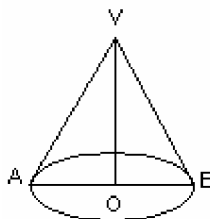
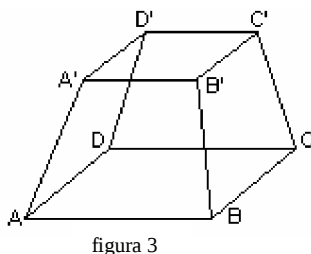


figura 2

PARTEA a II-a

1. Fie numărul $\overline{ab}$, scris în baza 10 cu $a \neq 0$ și $b \neq 0$.
- a) Arătați că numărul $(\overline{ab})^2 - (\overline{ba})^2$ este divizibil cu 9.
 b) Dacă împărțim numărul $\overline{ba}$ la suma cifrelor sale obținem câtul 4 și restul 12. Calculați numărul $\overline{ab}$.
2. Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 5 - 3x$.
- a) Reprezentați grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy .

- b) Fie funcția $g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 2x - 5$. Calculați aria cuprinsă între reprezentările grafice ale funcțiilor f , g și axa ordonatelor.
- c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $f(x) = 2x^2$.
3. În figura 3, $ABCD A'B'C'D'$ este un trunchi de piramidă patrulateră regulată care are $AA' = A'B' = 6\text{ cm}$. Măsura unghiului dintre AA' și planul (ABC) este de 45° .
- a) Completați pe foaia de examen desenul din figura 3 cu segmentul BC' .
- b) Arătați că înălțimea trunchiului de piramidă are lungimea de $3\sqrt{2}\text{ cm}$.
- c) Calculați volumul trunchiului de piramidă.
- d) Calculați tangenta unghiului dintre dreptele AA' și BC' .



VARIANTA 3

Variantă dată 2005

PARTEA I

1. a) Dublul numărului 50 este egal cu
b) Un sfert din numărul 88 este egal cu
c) Rezultatul calculului $3^2 - 2^3$ este egal cu
2. a) Un divizor natural al numărului 15 este egal cu
b) Descompus în factori primi numărul 18 este egal cu
c) Cel mai mare divizor comun al numerelor 15 și 18 este egal cu ...
3. Fie proporția $\frac{2}{b} = \frac{a}{10}$.
- a) $a \cdot b = \dots$
b) Rezultatul calculului $a \cdot b - 20 : 4$ este egal cu
c) Dacă $b = 40$, atunci $a = \dots$
4. În figura 1, punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv CD, $MN = 3\text{ cm}$, $AN = 7\text{ cm}$ și $BN = 4\text{ cm}$.

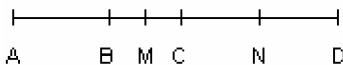


figura 1

- a) Lungimea segmentului AB este egală cu cm.
 b) Lungimea segmentului BC este egală cu cm.
 c) Lungimea segmentului CD este egală cu cm.

5. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ din *figura 2* are baza triunghi echilateral de latură $AB = 6$ cm și $AB' = 10$ cm.

- a) Perimetrul bazei este egal cu cm.
 b) Înălțimea prismei este egală cu cm.
 c) Aria laterală a prismei este egală cu cm^2 .

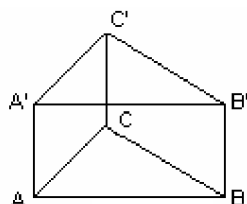


figura 2

PARTEA a II-a

1. Considerăm numerele $\overline{ab}$, scrise în baza zece cu $a \neq 0$ și $b \neq 0$, care îndeplinesc condiția $\overline{ab} - \overline{ba} = a \cdot b - a$.

a) Arătați că $a \cdot (10 - b) = 9 \cdot b$.

b) Determinați toate numerele $\overline{ab}$, care îndeplinesc condiția dată.

2. Considerăm funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2ax - 3a + 1$, unde a este un număr real.

a) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $f(a) = 0$.

b) Pentru $a = 1$, reprezentați grafic funcția f , în sistemul de axe ortogonale xOy .

c) Pentru $a = 1$, M și N sunt proiecțiile punctelor $A(-1; f(-1))$ și, respectiv $D(2; f(2))$ pe axa Ox a sistemului de axe ortogonale xOy . Calculați aria patrulaterului cu vârfurile în punctele M, D, N, A .

3. Secțiunea axială a trunchiului de con circular drept din *figura 3* este un trapez isoscel ABCD în care măsura unghiului ACB este de 90° , $BC = 30$ cm și înălțimea $OO' = 24$ cm.

a) Completați pe foaia de examen desenul din *figura 3* cu diagonala AC.

b) Arătați că raza bazei mari, OB, are lungimea de 25 cm.

c) Calculați volumul conului din care provine trunchiul.

d) Calculați sinusul unghiului dintre dreptele AD și BC.

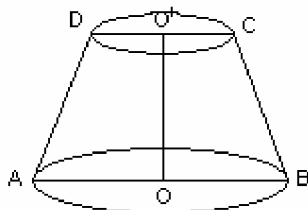


figura 3

PROBLEME PENTRU CONCURS

CICLUL PRIMAR

1. Într-o scădere, diferența este mai mică decât scăzătorul cu 25. Aflați scăzătorul !
2. Dacă adaug unui număr pe el însuși obțin 120. Aflați suma dintre acest număr și diferența numerelor 240 și 130.
3. Află cel mai mic număr de patru cifre care are prima cifră egală cu ultima, iar suma cifrelor este 16.
4. Află numărul natural X din următoarea egalitate:
$$[(X + 2:2) \times 3 + 5] \times 5 = 40$$
5. Află suma numerelor a, b și c, dacă:
$$\begin{aligned} a + 2b &= 26 \\ b + 2c &= 26 \\ 2a + c &= 20 \end{aligned}$$
6. Efectuează: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 10$.
7. Dacă se așează câte o cioară pe câte un par, rămâne o cioară fără par, iar dacă se așează câte două ciori pe câte un par, rămâne un par fără cioară.
Câte ciori și câți pari sunt ?
8. Tatăl este cu 36 de ani mai mare decât fiul. Un sfert din vârsta tatălui este cât vârsta fiului.
Câți ani are tatăl și câți ani are fiul ?
9. Am un număr oarecare de pui; mai cumpăr pe jumătate cât am și vând odată jumătate din ei, apoi a treia parte din ceea ce a rămas, iar ultima dată a cincia parte din ceea ce mai rămăsese. Mi-au mai rămas astfel 24 de pui.
Câți pui au fost la început ?

10. Să se determine numărul $\overline{abcd}$, știind că:
 - a) Cifrele a, b, c, d sunt consecutive și crescătoare;
 - b) Suma cifrelor b, c, d se împarte exact la a, obținându-se câtul 4.
11. Tatăl are cu 5 ani mai puțin decât mama și fiul la un loc. Peste 7 ani, fiul va avea a treia parte din vârsta mamei și toți trei vor avea împreună 108 ani.
Ce vârstă are fiecare acum ?
12. 18 caiete de 50 de file și de 80 de file au împreună 1050 de file.
Câte caiete sunt din fiecare fel ?

CICLUL GIMNAZIAL

CLASA A V-a

1. Fie $k \in \mathbb{N}$, aflați restul împărțirii numărului $3^{4k+2} + 2^{4k+2}$ la 5.
2. Numerele naturale a, b, c îndeplinesc simultan condițiile:
 $a + b + c = 72$ și $a + 3b - 2c = 50$.
 - a) Să se arate că $3a + 5b = 194$.
 - b) Să se afle numerele a, b și c știind că b are cea mai mică valoare posibilă.
3. Să se determine numărul $\overline{xyzt}$, știind că împărțind acest număr la $\overline{yzt}$ obținem câtul $(x + 1)$ și restul $(x + 2)$.
4. Să se determine toate numerele naturale, $n \geq 1$, astfel ca numărul $a = 1^n + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n + 9^n$ să fie divizibil cu 10.
5. a). Aflați numerele naturale nenule care, împărțite la 31, dau restul egal cu pătratul câtului.
 b). Fie $A = 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Arătați că A nu este pătrat perfect.
6. Determinați restul împărțirii la 5 a numărului:

$$A = 1996^{2001} + 1992^{2001} + 1987^{2004}$$
7. Determinați mulțimea X știind că au loc simultan condițiile:
 $X \cap \{1, 2, 3\} = \{3\}$ și $X - \{1, 2, 3\} = \{5\}$.
8. Demonstrați că $a = 7^1 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{999}$ se divide cu 57.

9. Aflați valoarea lui x din $x + 2x + 3x + \dots + 30x = \overline{186a}$, unde $\overline{186a} \equiv 2$.
10. Să se calculeze suma $S = 11 + 101 + 1001 + \dots + 1023$. Arătați că S nu este pătrat perfect.

2000-ori

CLASA A VI-a

- Să se afle elementele mulțimii $A = \left\{ \overline{xyz} \mid \frac{x+1}{x} = \frac{y+2}{y} = \frac{z+3}{z} \right\}$.
- Fie A, B, C, D patru puncte coliniare în această ordine astfel încât $2AC = AB + AD$ și $BD = 2^{31}$ cm. Aflați lungimea lui BC .
 - Semidreapta $[OC$ este bisectoarea unghiului AOB și semidreapta $[OD$ este interioară unghiului BOC . Știind că $m(\angle AOB) = p^\circ$ și $m(\angle COD) = q^\circ$, aflați măsurile unghiurilor AOD și BOD .
- Fie numărul $a = (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}) \cdot \left(\frac{1}{1+2+\dots+1024} + \frac{1}{1+2+\dots+1025} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+2047} \right)$. Să se arate că $a \in \mathbb{N}$.
 - Să se determine cele mai mici numere naturale nenule x, y, z, u pentru care avem: $\frac{x}{y} = \frac{5y}{7z} = \frac{7z}{11u} = \frac{11u}{5x}$.
- Unghiurile AOB și BOC sunt adiacent suplementare, $m(\angle AOB) = 45^\circ$. În același semiplan cu (OB) , construim $OD \perp OB$. Fie $[OM$ bisectoarea unghiului BOP și $[OR$ bisectoarea unghiului DOM' , unde $[OP$ este bisectoarea unghiului COD și $[OM'$ este opusă semidreptei $[OM$. Să se determine măsura unghiului POR .
- Arătați că $0,999 < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1999 \cdot 2000} < 0,9999$.
 - Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația $x^2 - x + |y - 1| = 3$.
- Se dau unghiurile adiacente AOB și BOC , astfel încât bisectoarele lor $[OM$ și $[ON$ formează un unghi de 75° și $3 \cdot m(\angle BOC) = 2 \cdot m(\angle AOB)$.
 - Determinați măsura unghiurilor AOB și BOC .

- b) Dacă $OT \perp OM$, astfel încât M și T sunt de aceeași parte cu B față de OA , demonstrați că $[OT]$ este bisectoarea unghiului CON .
7. Se consideră unghiurile AOB , BOC , COD , DOE , EOA în jurul punctului O , având interioarele disjuncte. Măsurile unghiurilor AOB , BOC , COD sunt direct proporționale cu elementele mulțimii $M = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{9}{x-2} \in \mathbb{N} \right\}$, scrise în ordine descrescătoare. Măsurile unghiurilor COD , DOE , EOA sunt invers proporționale cu numerele $0, (3); \frac{1}{4}; 1$. Să se determine măsurile acestor unghiuri.
8. Să se afle suma a 101 numere naturale consecutive, știind că primul număr și ultimul număr sunt invers proporționale cu numerele $0, (3)$ și $0,25$.
9. Se consideră punctele distincte A, B, C, D în această ordine situate pe dreapta „ d ”, M mijlocul segmentului $[AB]$, N mijlocul lui $[CD]$, P mijlocul lui $[MN]$. Lungimea lui $[BC]$ este egală cu 60% din lungimea lui $[MN]$, lungimea lui $[AM]$ este egală cu 30% din lungimea lui $[CD]$, iar $MC = 18$ cm. Să se afle lungimea lui AP .
10. Fie numerele naturale nenule a, x, y, z astfel încât x, y, z sunt direct proporționale cu $a + 1, a + 2, a + 3$. Determinați valoarea lui y știind că $x + y + z = 75$.

CLASA A VII-a

1. În paralelogramul $ABCD$ avem $AB = 20$ cm și $BC = 16$ cm, $M \in (AC)$ astfel încât $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{3}$, $MP \parallel AB$, $P \in (BC)$ și $MQ \parallel BC$, $Q \in (AB)$. Să se calculeze perimetrul patrulaterului $MPBQ$.
2. Știind că: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1} \in \mathbb{N}^*$ și
- $$2 \left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{2}{a_2 a_3} + \frac{3}{a_3 a_4} + \dots + \frac{n}{a_n a_{n+1}} \right) \geq n(n+1),$$
- calculați: $\sqrt{a_1 a_2 a_3 \dots a_{n+1}} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n+1})^{-2}$.

3. În triunghiul ABC avem: $m(\angle B) = 105^\circ$, $m(\angle C) = 30^\circ$, $D \in (BC)$, $E \in BC$ astfel încât $(DB) \equiv (DC)$ și $\angle BAE \equiv \angle CAE$. Aflați măsura unghiului DAE.
4. În triunghiul ABC bisectoarea $[BB']$, ($B' \in AC$) intersectează mediana $[AD]$ în punctul P.
 - a) Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{AP}{PD} \cdot \frac{B'C}{AB'} = 2^n$.
 - b) Dacă triunghiurile $AB'P$ și BDP sunt echivalente, demonstrați că P este centrul de greutate al triunghiului ABC.
5. Fie numerele $a = \sqrt{4 + \sqrt{8}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ și $b = (3\sqrt{8} - 2\sqrt{12} + \sqrt{20}) : (3\sqrt{18} - 2\sqrt{27} + \sqrt{45})$. Calculați $(1 - b)^a$.
6. În patrulaterul convex ABCD se știe că: $\angle BAD \equiv \angle ADC$, $M \in [AD]$, $[MA] \equiv [MD]$, $AB \cap CD = \{N\}$. Știind că distanțele de la punctul O la laturile AB și CD sunt egale, să se demonstreze că punctele M, O, N sunt coliniare.
7. Să se arate că $\sqrt{1+2!+\dots+200!+3} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, unde $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$.
8. Se dă trapezul ABCD ($AB \parallel CD$). Pe semidreptele $[DA]$, respectiv $[CB]$ se iau punctele M și N astfel încât $A \in (DM)$, $B \in (CN)$, $[AD] \equiv [AM]$, și $[CB] \equiv [BN]$.
 - a) Să se arate că $MN \parallel DC$ sau N, A, D coliniare.
 - b) Precizați o condiție necesară și suficientă pentru trapezul ABCD, astfel încât N, A, D să fie coliniare.
9. În dreptunghiul ABCD perpendiculara din C pe BD taie pe AB în M și AD în P. Să se arate că $DM \perp BP$ și $BD \cdot CD = AD \cdot CP$.
10. a) Fie $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $S < 2$.
 b) Aflați $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2k+1) \mid (k^2 + k + 2)$.

CLASA A VIII-a

1. În triunghiul ABC considerăm [AM bisectoarea unghiului A astfel încât $MB = 3MC$, $M \in (BC)$ și $N \in (AB)$, iar $BN = 2NA$. În A pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara AD. Să se demonstreze că distanța d de la A la planul (DNC) verifică relația $d < \frac{AB + 3AD}{6\sqrt{2}}$.
2. a) Dacă $a \geq b \geq c > 0$, atunci:

$$\sqrt{(a+b)(a-b)} + \sqrt{(b+c)(b-c)} < a + b$$
 b) Aflați numerele reale x, y, z pentru care este adevărată relația:

$$\sqrt{2x^2 + 12x + 27} + \sqrt{y^2 + 4y + 5} \leq 3 + 2z - z^2$$
3. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $x - y + 1 = 0$ și $y \in [1; 3]$. Arătați că:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13} = 2\sqrt{2}.$$
4. Fie expresia $E(x) = 1 - \frac{2}{x^2 + 2x - 3} \cdot \left(1 - \frac{x^2 + 2x + 5}{2x + 4}\right) : \frac{1 - x}{2x + 2}$.
 a) Determinați a pentru care $E(a)$ are sens.
 b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
 c) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{E(x)} \in \mathbb{N}$.
5. Punctele A, B, C, D sunt necoplanare și M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD) respectiv (DA). Dacă $(MP) \equiv (NQ)$, arătați că $AC \perp BD$.
6. Fie numărul $A = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$. Aflați numerele a și b știind că $A \in [a, b]$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, iar intervalul $[a, b]$ are lungime minimă.
7. Fie pătratul ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$, $AC = a\sqrt{2}$, $VO \perp (ABC)$, $VO = a\sqrt{3}$. Calculați:
 a) Distanța de la V la planul α ce conține dreapta AB și face cu planul pătratului un unghi de 30° .
 b) Distanța de la P la planul α , unde $VP \perp CD$, $P \in CD$.

8. Să se cerceteze dacă numărul

$$a = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$$

este număr natural.

9. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, iar E și F picioarele perpendicularelor din A pe bisectoarea unghiului ABD, respectiv unghiului ACD. Să se demonstreze că $EF \parallel (BCD)$.

10. În triunghiul ABC, $|AB| = |AC| = 10$ cm, $|BC| = 16$ cm. Fie $|AA'| = 15$ cm, $[BB'] \equiv [CC'] \equiv [AB]$ trei perpendiculare pe planul triunghiului, în același semispațiu. Fie $BC' \cap CB' = \{E\}$ și $A'E \cap (ABC) = \{M\}$. Să se arate că $A'M \perp BC$ și să se calculeze lungimea segmentului $[A'M]$.

A 56-A OLIMPIADĂ NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Bistrița, 29 martie 2005

CLASA A VII-A

Subiectul 1. Fie ABCD un paralelogram. Bisectoarea unghiului ADC intersectează dreapta BC în E, iar mediatoarea laturii AD intersectează dreapta DE în punctul M. Fie F intersecția dreptelor AM și BC. Să se arate că:

- (a) $DE = AF$;
- (b) $AD \cdot AB = DE \cdot DM$.

Daniela și Marius Lobază, Timișoara

Subiectul 2. Fie a și b două numere întregi. Să se arate că:

- (a) 13 divide $2a + 3b$ dacă și numai dacă 13 divide $2b - 3a$;
- (b) Dacă 13 divide $a^2 + b^2$, atunci 13 divide $2a + 3b$ sau $2b + 3a$.

Mircea Fianu, București

Subiectul 3. Fie ABCD un trapez cu bazele AB și CD, având diagonalele perpendiculare în O. Pe semidreptele (OA și (OB se consideră punctele M și respectiv N astfel încât unghiurile ANC și BMD să fie drepte. Notăm cu E mijlocul segmentului MN. Să se arate că:

- (a) Triunghiurile OMN și OBA sunt asemenea.
- (b) Dreapta OE este perpendiculară pe dreapta AB.

Claudiu-Ștefan Popa, Iași

Subiectul 4. Pe o circumferință se scriu 2005 numere naturale cu suma 7022. Să se arate că există două perechi formate din numere vecine astfel încât suma elementelor din fiecare pereche să fie mai mare sau egală decât 8.

Prelucrare după Marin Chirciu, Pitești

CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Se consideră un cub cu muchia de lungime 1. Să se arate că un tetraedru cu vârfurile în mulțimea vârfurilor cubului are volumul $1/6$ dacă și numai dacă trei dintre vârfurile tetraedrului sunt vârfuri ale unei fețe a cubului.

Dinu Șerbănescu, București

Subiectul 2. Pentru un număr natural n , scris în baza 10, notăm prin $p(n)$ produsul cifrelor sale.

(a) Să se demonstreze că $p(n) \leq n$

(b) Să se determine numerele naturale n cu proprietatea:

$$10p(n) = n^2 - 4n + 2005$$

Eugen Pălănea, Brașov

Subiectul 3. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor BB' , respectiv BC , iar unghiul format de dreptele AB' și BC' are măsura de 60° . Fie O și P intersecțiile dreptelor $A'C$ cu AC' , respectiv $B'C$ cu $C'N$.

(a) Să se demonstreze că dreapta AC' este perpendiculară pe planul (OPM) .

(b) Să se determine măsura unghiului format de dreapta AP cu planul (OPM) .

Mircea Fianu, București

Subiectul 4. a) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{u}{x} + \frac{v}{y} \geq \frac{4(uy + vx)}{(x + y)^2}$$

pentru orice numere reale pozitive x, y, u, v .

b) Fie $a, b, c, d > 0$. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{a}{b+2c+d} + \frac{b}{c+2d+a} + \frac{c}{d+2a+b} + \frac{d}{a+2b+c} \geq 1$$

Traian Tămâian, Carei

TESTE RECAPITULATIVE

CLASA I

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 30 min

- Numără în ordine crescătoare de la 0 la 10.
- Completează cifrele lipsă din căsuțe:

4	6;	8	10;	5	7.
---	----	---	-----	---	----
- Pune rezultatul corect în căsuțe :

$7 + 1 =$	$9 - 1 =$	$10 - 5 =$
$4 + 2 =$	$8 - 3 =$	$4 + 4 =$

NIVELUL B (mediu de dificultate) , Timp de lucru 30 min

- Numără în ordine descrescătoare de la 10 la 0.
- Găsește vecinii numerelor

8	5	1
---	---	---
- Calculează:

$1 + 6 =$	$9 - 3 =$	$6 + 4 =$
$3 + 4 =$	$8 - 5 =$	$3 + 7 =$

NIVELUL C (sporit de dificultate) , Timp de lucru 30 min

- Scrive în ordine crescătoare, numerele pare de la 0 la 20.
- Găsește modalități de descompunere pentru numerele: 6; 9; 5.
- Află numerele cu 4 mai mari decât :5; 2; 4 și 3.

CLASA a II-a

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 45 min

- Așează în ordine crescătoare numerele:
17, 30, 3, 11, 29, 71, 810, 301.

2. Află numerele mai mici cu 21 decât:
48; 56; 22; 94; 145.
3. Într-un coș sunt 17 mere și 22 de pere.
Câte fructe sunt în coș?

NIVELUL B (mediu de dificultate) , Timp de lucru 45 min

1. Așează în ordine descrescătoare numerele:
42; 79; 100; 53; 10; 93; 37; 96.
2. Află suma și diferența numerelor:
45 și 23; 71 și 14; 40 și 39
3. Într-o vază sunt 11 trandafiri , iar în altă vază sunt cu 2 mai puțini trandafiri.
Câți trandafiri sunt în cele două vase?

NIVELUL C (sporit de dificultate) , Timp de lucru 45 min

1. Scrie în ordine descrescătoare numerele impare cuprinse între 70 și 40.
2. Află suma dintre diferența numerelor 30 și 14 și numărul 54. Mărește cu 30 suma găsită .Cât obții?
3. Într-o livadă sunt 80 de pomi fructiferi. Dintre aceștia 27 sunt meri, 23 sunt peri, iar restul sunt pruni.
Află numărul prunilor.

CLASA a III-a

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 45 min

1. Ordonează numerele :
 - a. crescător: 135; 786; 857; 204; 19; 542.
 - b. descrescător: 35; 490; 187; 99; 735; 800.
2. La suma numerelor 42 și 299 adaugă numărul 400.
3. Irina are 78 de timbre, iar sora ei are cu 19 timbre mai puțin decât Irina.
Câte timbre au împreună cele două surori ?

NIVELUL B (mediu de dificultate) , Timp de lucru 45 min

- Calculează :
 $135 + 246 =$ $348 - 253 =$ $901 - 230 + 76 =$
 $74 + 744 =$ $600 - 142 =$ $456 + 184 - 295 =$
- Află termenul necunoscut :
 $a + 263 = 999$ $m - 48 = 237$ $602 - a = 488$
- Numărul fetelor din clasa a II-a este 14 , iar al băieților este cu 5 mai mic decât numărul fetelor.
 Câți elevi sunt în clasa a II-a?

NIVELUL C (sporit de dificultate) , Timp de lucru 45 min

- Calculează :
 $125 + 670 =$ $462 - 186 + 297 =$ $400 + (673 - 509) =$
 $900 - 387 =$ $188 + 699 - 375 =$ $800 - (187 + 542) =$
- Din suma numerelor 187 și 436 ia diferența numerelor 700 și 536.
 Dublează rezultatul obținut. Cât ai obținut la final?
- Numărul merilor dintr-o livadă întrece cu 20 numărul perilor din aceea livadă. Știind că în livadă sunt 130 de pomi , să se afle numărul perilor și al merilor din livadă.

CLASA a IV-a

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 45 min

- Calculează :
 $13\ 140 + 9\ 540 =$ $2 \times 35\ 001 - 18\ 446 =$
 $145\ 283 - 99\ 655 =$ $196\ 282 : 2 + 476\ 399 =$
- Află termenul necunoscut :
 $a \times 62 = 620$ $m : 7 = 895$
 $1\ 205 : a = 5$ $a + 4\ 927 = 10\ 000$
- Anca a economisit 7 750 lei , iar sora ei o sumă de două ori mai mică decât ea .
 Ce sumă au economisit cele două surori împreună?

NIVELUL B (mediu de dificultate) , Timp de lucru 45 min

1. Află produsul dintre suma și diferența numerelor:
4152 și 4149; 8105 și 8098; 23854 și 23798.
2. Află numărul care:
 - a) împărțit la 7 dă câtul 8 975;
 - b) înmulțit cu 75 dă 3 000;
 - c) are sfertul 8 725.
3. Suma a trei numere pare consecutive este 6000 .
Care sunt numerele ?

NIVELUL C (sporit de dificultate) , Timp de lucru 45 min

1. Efectuează :

$$185 \times 10 - (5\,550 : 10 + 360 : 6) + 23\,370 =$$

$$28\,000 - 700 \times 14 + 225 : 15 + 476\,150 =$$
2. Află: a) cu cât trebuie micșorată suma numerelor 2345; 54321; 1234 și 43210 pentru a obține 100000.
b) diferența dintre suma numerelor de șase cifre identice și suma numerelor de șase cifre formate numai din sute de mii.
3. Lungimea unui dreptunghi este cu 450 cm mai mare decât lățimea . Știind că perimetrul dreptunghiului este de 3 240 cm , află lungimea și lățimea dreptunghiului.

CLASA a V-a

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. Determinați cel mai mic și cel mai mare număr natural de forma:
a) $\overline{aaa}$; b) $\overline{aba}$, $a \neq b$; c) $\overline{abc}$, $a \neq b \neq c \neq a$.
2. Calculați: a) $7 \cdot [2 + 3 \cdot (5 + 6 \cdot 4)]$; b) $8 \cdot \{2 + 10 \cdot [14 + 3 \cdot (2 + 3 \cdot 16)]\}$;

$$[(9^2 - 2^4 \cdot 5) : 1000^0 + 5] \cdot 2^2$$
 .
3. Aflați numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul 23.
4. Scrieți numerele de forma $\overline{5xx}$ divizibile cu a) 2; b) 3; c) 5; d) 10.
5. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $\{1,2,3\} \subset \{0,1,2,3,4,5\}$; b) $\{1,3,4,5\} \supset \{4\}$; c) $\{0\} \subset \emptyset$.

NIVELUL B (mediu de dificultate) . Timp de lucru 50 min

1. Aflați numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ care verifică egalitatea: $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$.
2. Dacă $a - 5b = 7$ aflați x din egalitățile:
 - a) $x + 3a - 15b = 29$;
 - b) $47 - x + 7a - 35b = 2a - 10b + 4$;
 - c) $x - 123 + 5a - 25b = 137$.
3. Verificați dacă numărul $2005 + 2005 \cdot 2006 + 2007 \cdot 2$ este pătrat perfect.
4. Arătați că numărul $a = 2^{n+3} + 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n$ este divizibil cu 10 și cu 3 oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Determinați mulțimile:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 2k + 1; k \in \mathbb{N}; k < 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^x \leq 32\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid 5 \leq x + 2 < 10\}$$

$$D = (A \cup B) \setminus C.$$

NIVELUL C (sporit de dificultate) . Timp de lucru 50 min

1. Determinați $n \in \mathbb{N}^*$ din egalitatea:

$$3^1 \cdot 3^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 3^n - (3^2)^{17} = 8 \cdot 9^{17}$$
2. Media aritmetică a trei numere este 34. aflați numerele știind că primele două au media 39, iar ultimele două au media 35.
3. Arătați că numărul $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{123}$ se divide cu 13.
4. Se dau mulțimile $A = \{12; 2n + 1\}$ și $B = \{n^2 + n; 2n - 1\}$. Să se afle $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $A \cup B$ are 3 elemente.
5. Arătați că $23 \mid 4a + 7b$ dacă și numai dacă $23 \mid 5a + 3b$.

CLASA a VI-aNIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. a) Determinați x și y știind că $\overline{x27y}$ este divizibil cu 12.
b) Calculați c.m.m.d.c și c.m.m.m.c al numerelor 240 și 360.
2. Rezolvați ecuația: $\frac{1}{3}x + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$.
3. Determinați a , b , c direct proporționale cu 3, 4, 5 știind că $2a + 3b + 4c = 190$.
4. Fie punctele A, B, C, D astfel încât $B \in (AC)$, $C \in (BD)$, $|AB| = 2$ cm, $|AC| = 5$ cm și $|BD| = 9$ cm. Să se afle lungimile segmentelor $|BC|$, $|CD|$ și $|AD|$.
5. Se dau unghiurile AOB și BOC adiacente având măsura de 60° respectiv 40° . Fie OM și ON bisectoarele unghiurilor AOB și BOC. Calculați măsurile unghiurilor AON, MON și MOC.

NIVELUL B (mediu de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. a) Determinați mulțimile:
 $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{15}{x+2} \in \mathbb{N} \right\}$ și $B = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{17}{2x-1} \in \mathbb{N} \right\}$.
b) Determinați a și b știind că $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$.
2. Simplificați fracția: $\frac{2^n \cdot 3^{n+1} + 2^{n+2} \cdot 3^n}{3^n \cdot 5^{n+1} + 3^{n+2} \cdot 5^n}$.
3. Determinați a , b , c invers proporționale cu 5, 6 și 10 știind că $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} = \frac{7}{9}$.
4. Fie A, B, C trei puncte pe semidreapta [OM astfel încât $|OA| = 2$ cm, $|OB| = 6$ cm, și $|OC| = 12$ cm. Fie D, E, F mijloacele segmentelor [AB], [BC], [AC]. Să se arate că [DE] și [BF] au același mijloc.

5. Fie unghiul $\hat{AOB} = 86^{\circ} 48'$, $[OM]$ bisectoare unghiului AOB , $[OC]$ semidreapta opusă lui $[OA]$ și $[OD] \perp [OM]$. Aflați măsurile unghiurilor AOD , BOD și DOC .

NIVELUL C (sporit de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. Arătați că $3^{n+1} - 3^n$ și $5^{n+1} - 5^n$ sunt prime între ele.
2. a) Arătați că $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{k}{n(n+k)}$ oricare ar fi , $k \in \mathbb{N}^*$.
 b) Calculați $\frac{4}{1 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 9} + \frac{4}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{4}{2004 \cdot 2008}$.
3. Dacă $\frac{x-y}{4} = \frac{2y-z}{3} = \frac{3z+x}{9}$ arătați că:
 a) z este 25% din $x - y$
 b) Aflați x, y, z știind că y este număr prim.
4. Pe dreapta d se găsesc punctele A, B, C, D în această ordine. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ și N mijlocul segmentului $[CD]$, stabiliți dacă $2|MN| = |AC| + |BD|$.
5. Fie unghiul AOB și punctele M și N în interiorul respectiv exteriorul unghiului AOB . Dacă semidreapta $[OP]$ este bisectoarea unghiului AOM , $m(\angle POB) = 60^{\circ}$ și $m(\angle BOM) = 2 \cdot m(\angle BON)$, arătați că bisectoarea unghiului AOP este perpendiculară pe ON .

CLASA a VII-a

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. Rezolvați ecuația: $0, (6) \cdot (x+3) - 0, (3) \cdot (2x+1) = 0, (5) \cdot (x+2)$.
2. Media aritmetică a trei numere este 21, iar media geometrică a primelor două este 20. Să se afle al treilea număr.
3. Calculați: $\frac{\sqrt{396 - \sqrt{5184}} \cdot \sqrt{2349 - \sqrt{2025}}}{\sqrt{603 - \sqrt{729}}}$.

4. Fie ABCD un romb care are $m(\angle A) = 60^\circ$. Dacă M și N sunt mijloacele laturilor AB și DC arătați că BMDN este dreptunghi.
5. În triunghiul ABC punctul D se află pe latura BC. Paralela prin D la mediana AM taie laturile AC și AB în E și F. Să se arate că:

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AC}{AB}.$$

NIVELUL B (mediu de dificultate) . Timp de lucru 50 min

1. Determinați x și y știind că $\frac{x}{y} = 0, (5)$ și $3x + 7y = 123$.
2. Cu câte procente crește aria unui dreptunghi dacă dimensiunile lui se măresc cu 15% respectiv 20%?
3. Determinați elementele mulțimii:

$$A = \left\{ xy \mid \sqrt{3(xy - yx)} + 2(16y - 11x) \in \mathbb{N}; y < x \right\}.$$
4. Pe latura BC a triunghiului ABC se ia un punct E și se notează cu M și N simetricile lui E față de AB și AC. Să se arate că punctele M, A, N sunt coliniare dacă și numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic.
5. Să se arate că în orice triunghi mijloacele înălțimii, bisectoarei și medianei duse din același vârf sunt coliniare.

NIVELUL C (sporit de dificultate) . Timp de lucru 50 min

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{25}{2 \cdot 7} + \frac{25}{7 \cdot 12} + \frac{25}{12 \cdot 17} \dots + \frac{25}{67 \cdot 72} < 0,1$$
2. Să se determine x, y, z numere întregi știind că: $x^2 = \frac{y^3}{48} = \frac{z^4}{36}$ și $xyz = 432$.
3. Să se determine x și y știind că numărul $a = \sqrt{x, (3) + y, (4)} \in \mathbb{Q}$.
4. Fie ABCD trapez dreptunghic $AB \parallel CD$ și $m(\angle A) = 90^\circ$. Dacă $BC = 12 \text{ cm}$, $m(\angle B) = 60^\circ$ și $AC \perp BC$ calculați aria trapezului.

5. În triunghiul ABC bisectoarele (BE și (CF taie mediana AD în M și N.

Să se arate că $\frac{AM}{MD} + \frac{AN}{ND} > 2$.

CLASA a VIII-a

NIVELUL A (minim de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. Să se calculeze:

a) $\left[(-2)^2 - 3 \cdot (-3)^2\right]^{-1} : \frac{20}{23}$

b) $3x \cdot (x+1) + 2(x^2 + 2x + 3)$

2. Se dă expresia: $E(x) = \frac{2+4x}{x^2-1} + \frac{2x}{x+1} - \frac{x+2}{x-1}$

a) Calculați $E(2)$;

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă;

c) Rezolvați ecuația $E(x) = \frac{x}{3}$.

3. Fie $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq \frac{x+3}{2} \leq 3\right\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 3\}$. Să se

calculeze $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$.

4. Se dă cubul ABCDA'B'C'D' cu latura de 3 cm. Să se afle:

a) diagonala unei fețe;

b) diagonala cubului;

c) aria totală a cubului.

5. În piramida patrulateră regulată VABCD se cunosc $AB = 6\sqrt{3}$ și $VA = 2\sqrt{13}$. Să se calculeze apotema piramidei, înălțimea piramidei, tangenta unghiului format de dreptele VA și BC.

NIVELUL B (mediu de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. Să se calculeze:

$$a) \left[\left(\frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right)^{-2} - \frac{\sqrt{15}}{3} \right]^{-1} - \frac{3}{2}$$

$$b) \frac{\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}}{\frac{1}{2-x} - \frac{1}{2+x}}$$

2. Se dă expresia: $E(x) = \left(\frac{2x}{2x+1} - \frac{4x^2}{4x^2+4x+1} \right)^2 : \left(\frac{2x}{4x^2-1} - \frac{1}{2x-1} \right)$.

a) Aduceți la forma cea mai simplă expresia;

b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $\frac{E(x)}{2x} \in \mathbb{Z}$;

3. Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:

$$a = \sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

$$b = \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(3+\sqrt{3})^2} + \sqrt{(-5)^2}$$

4. Pe planul pătratului ABCD de latură 12 cm se ridică perpendiculara $VA = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Să se calculeze distanțele VB, VC, VD; VO (O fiind centrul pătratului) și aria triunghiului VBC.

b) Dacă $M \in VB$ și $N \in VC$ astfel încât $VM = \sqrt{15}$ și $VN = 3$ arătați că $MN \parallel (ABC)$.

5. Planul trapezului dreptunghic ABMN cu $AB \parallel MN$, $\hat{B} = \hat{M} = 90^\circ$, $MN = 8$ cm, $AN = 5$ cm este perpendicular pe planul paralelogramului ABCD cu $AB = 12$ cm, $BC = 6$ cm și $\hat{ABC} = 120^\circ$. Se cere:

a) Distanța de la N la CD;

b) Distanța de la D la AN;

c) Măsura unghiului dintre planele (CDM) și (ABC).

NIVELUL C (sporit de dificultate) , Timp de lucru 50 min

1. Dacă $x \in [-1; 2]$ și $x - 3y + 1 = 0$ calculați:

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5}$$

2. Determinați x, y, z știind că $x^2 + y^2 + z^2 + 46 = 2(3x + 4y + 5z)$.
 3. Se dă expresia:

$$E(x) = \frac{\frac{1-x^2}{x^2+2x+1} \cdot \left(\frac{x}{1-x} - \frac{x}{1+x} \right) \cdot \frac{-x^2-x+2}{2x^2+4x}}{\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}}$$

- a) Aduceți la forma cea mai simplă expresia;
 b) Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $E(x) \geq 1$.
 4. Fie E centrul feței $CDD'C'$ a paralelipipedului dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ și G centrul de greutate al triunghiului ABD . Dacă $A'B \perp B'G$, $\widehat{EGC} \equiv \widehat{A'DC'}$ și $S_{A'B'G} = 15 \text{ m}^2$, arătați că:
 a) $\triangle ECG \sim \triangle ACD'$;
 b) $A'B \perp (B'MG)$ (unde $M \in (AB)$ și $GM \perp AB$);
 c) $V_{ABCD A'B'C'D'} = 36\sqrt{6} \text{ m}^3$.
 5. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât: $AD \perp (BCD)$, $[AD] \equiv [BD]$ și $BC \perp BD$. Dacă M este mijlocul segmentului $[AB]$ și $MN \perp AC$, $N \in AC$, arătați că $DN \perp AC$.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

PENTRU CEI ISTEȚI

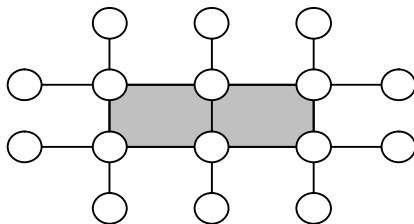
- @ **Adunăm, scădem, înmulțim, împărțim, zece să obținem.** Puneți semnul operațiilor aritmetice corespunzătoare între cifrele din fiecare căsuță, astfel ca rezultatele însumate pe fiecare coloană și fiecare rând să fie 10.

8	2	1	4	1	1
5	0	9	3	8	1
2	3	4	2	1	1

- @ **Pătratul semi-magic.** Pătratul din figura alăturată are o proprietate curioasă: numerele pe care le conține, însumate, dau același total pe fiecare linie, coloană și pe diagonală. Completați numerele din pătrat!

	-5	
14		7

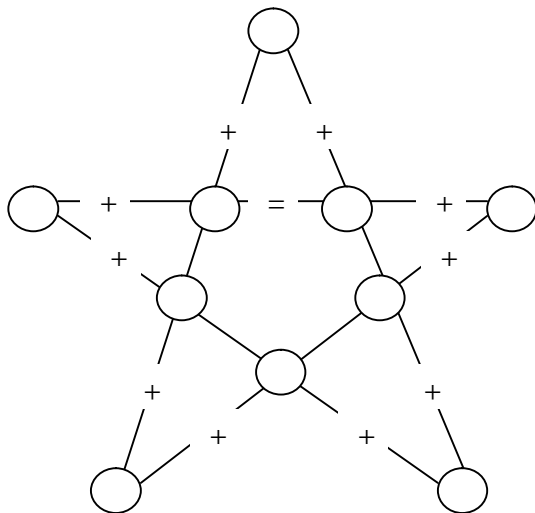
- @ **Lanțuri numerice.** În figura alăturată sunt prezentate cinci lanțuri numerice. Înscrieți în cercurile ce formează verigile lanțurilor numerice, numerele de la 0 la 15, astfel ca fiecare lanț de numere să dea prin adunare suma 30. S-ar putea să găsiți mai repede rezolvarea dacă aveți în vedere că suma numerelor din dreptunghiul hașurat este tot 30.



- @ **Litere și cifre.** Fiecare literă care formează numerele din figura alăturată îi corespunde o cifră de la 0 la 9, totdeauna aceeași. Substituiți cifrele corespunzătoare literelor astfel ca egalitățile să fie corecte. Vă ajutăm spunându-vă că cifra 5 lipsește.

$$\begin{array}{ccccccc}
 abc & + & deb & = & fed \\
 \diagdown & & \diagup & & \diagdown \\
 : & = & - & = & \\
 db & & ah & & \\
 \diagup & & \diagdown & & \diagup \\
 dhi & + & = & x & = \\
 & - & gf & = & dac
 \end{array}$$

- @ **Egalitatea brațelor de stea.** Steaua din figură are brațele egale: numerele înscrise în cercuri prin însumare două câte două sume egale. Cum plasați numerele naturale de la 1 la 10 inclusiv, astfel ca egalitățile să fie corecte?

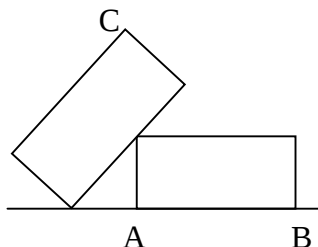


PROBLEME DISTRACTIVE

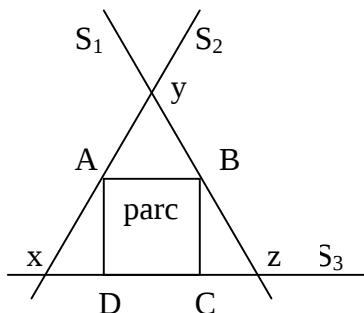
J Volumul cubului. Ionel dispune de o coală de carton cu dimensiunile de 25 cm / 60 cm. Dorește să decupeze fețele unui cub (model desfășurat). Care va fi volumul maxim al acestui cub?

J Duminicile anilor. Câți ani între, 1988 și 2005 inclusiv, au 53 de duminici?

J Cărămizi. Două cărămizi cu dimensiunile de 20 cm / 10 cm sunt dispuse ca în figura alăturată. Segmentul AB este de 8 cm. La ce distanță de sol se află punctul C?



J Urbanistică. Într-un oraș, trei străzi S_1 ; S_2 ; S_3 formează triunghiul XYZ. Între aceste trei străzi există un parc de formă pătrată ABCD, cu o latură pe S_3 și unghiurile A și B pe străzile S_1 și S_2 . Parcul ocupă $7/32$ din suprafața triunghiului XYZ. Care este raportul dintre segmentele XA și YA?



J Cinci echipe naționale de fotbal:

Anglia, Brazilia, Danemarca, Columbia și Elveția participă la un turneu. După turneu se putea citi în cronicile sportive:

- Una dintre echipe a câștigat toate partidele;
- Brazilia a câștigat cu o partidă mai mult decât Elveția;
- A fost un singur meci egal;
- Columbia și Danemarca au pierdut câte trei meciuri.

Puteți face clasamentul turneului, utilizând aceste informații știind că se acordă 2 puncte pentru victorie și 1 punct pentru meci egal ?

J A cui este casa? Pe aceeași stradă, pe aceeași parte a ei, locuiesc în trei case alăturate un matematician, un fizician și un chimist. Casa chimistului este albă. Matematicianul este blond. Fizicianul locuiește în casa din mijloc. Casa albă se află lângă cea albastră. Cel brunet locuiește în prima casa din dreapta. Cine locuiește în casa verde?

J Iezii și caprele. Dacă 7 capre și 4 iezi mănâncă 100 de verze, câte verze mănâncă un ied și o capră împreună?

J Urmăriți acest dialog:

Gălăgia de afară este făcută de cei trei copii ai familiei Voinescu.

- Dar ce vârstă au ei?

- Produsul vârstelor lor este 36.

- Te-am întrebat vârsta fiecăruia!

- Poți să o calculezi și singur, știind că suma vârstelor celor trei copii este egală cu numărul casei în care locuiesc și pe care tu îl știi.

- Îmi este imposibil, mai dă-mi un indiciu!

- Cel mai mare dintre copii are ochii verzi.

- Acum, într-adevăr pot calcula vârsta fiecărui copil.

Utilizând informațiile din acest dialog, poți preciza vârstele copiilor familiei Voinescu?



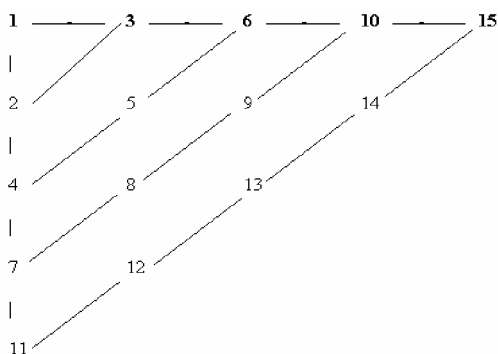
„ Melcul alpinist. Un melc urcă în timpul zilei pe un copac 3 m și alunecă noaptea 2 m. după câte zile ajunge în vârful copacului înalt de 10 m?

„ Într-un laborator. Avem 7 kg de ciment și dispunem pentru cântărire de o balanță și o greutate de 1 kg. Să se separeu o cantitate de 3 kg de ciment printr-o singură cântărire.

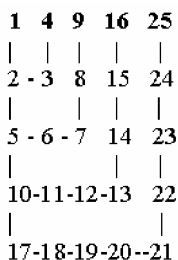


ȘTIAȚI CĂ...

... **numere poligonale** sunt membrii unui șir de numere naturale, care ia naștere la ordonarea tuturor numerelor naturale în diferite modele poligonale. Șirul numerelor triunghiulare ar fi: 1,3,6,10,15 ... Al n-lea număr al triunghiurilor are forma: $d_n = \frac{n(n+1)}{2}$.



Șirul numerelor pătratice ar fi 1, 4, 9, 16, 25 ... Al n-lea număr pătratic are forma $v_n = n^2$.



Șirul numerelor pentagonale ar fi 1, 5, 12, 22 ... al n-lea termen are forma

$$f_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

În mod asemănător se definesc numerele hexagonale, heptagonale, etc.

Încercați să le reprezentați și să găsiți forma termenului „n” al șirului respectiv.

CURIOZITĂȚI

- .. **Numărul 15873** are următoarea proprietate „curioasă”: înmulțit cu oricare dintre numerele de o cifră și apoi cu 7, produsul obținut se scrie prin repetarea cifrelor alese.

$$15873 \times 2 \times 7 = 222222$$

$$15873 \times 7 \times 7 = 777777$$

$$15873 \times 8 \times 7 = 888888$$

- .. **Numărul 142857**, numit și numărul lui Zevros, este chiar mai pasionat. Înmulțiți-l cu oricare număr de la 2 la 6 și veți obține de fiecare dată un produs alcătuit din aceleași șase cifre, într-o ordine ciclică.

$$142857 \times 2 = 285714$$

$$142857 \times 3 = 428571$$

$$142857 \times 4 = 571428$$

$$142857 \times 5 = 714285$$

$$142857 \times 6 = 857142$$

- .. **Numerele 41096 și 83** devin interesante dacă analizăm înmulțirea lor:

$$41096 \times \boxed{8} \boxed{3} = \boxed{3} 41096 \boxed{8}$$

- .. **Pătrate perfecte.** Fiecare dintre perechile de pătrate perfecte 144 și 441; 169 și 961; 1089 și 9801 sunt unul răsturnatul celuilalt. Iată două pătrate perfecte care se pot citi la fel atât de la stânga la dreapta cât și de la dreapta la stânga: 14641 și 69696.

- .. **Numărul 7744** este singurul număr de forma $\overline{aabb}$, numit și număr „bâlbâit”, care este pătrat perfect.

RUBRICA REZOLVITORILOR

S-au primit soluții corecte la problemele propuse în revista MERIDIAN NR. 2 2004/2005 de la următorii elevi:

CLASA I: ȘC. GEN. NR. 1 ROVINARI: Înv. LUCA SIMONA : Armășelu Bianca, Cojocaru Andrada, Moaftă Alexandru, Motorga Irina, Motorga Larisa, Popescu Denisa, Rotunjeanu Cosmin, Sărăcin Karina, Scočilă Bianca, Șufăr Patricia; Înv. DAN RALUCA: Cioiu Ana Maria, Manea Maria Roxana, Manoilă Denisa, Măciucă Georgiana, Merfu Andra; Înv. UNGUREANU ELENA: Andronache Alexandru, Bană Daiana, Barnă Denisa, Durbac Denis, Jianu Ionuț, Liță Robert;

CLASA a II-a: ȘC. GEN. NR. 5 TG-JIU: Înv. DIACONESCU MARIANA: Moaftă Andreea, Udrescu Diana; ȘC. GEN. NR. 3 ROVINARI: Înv. BORUGĂ MARIA: Bratu Dănuț, Bălăcioiu Mădălina, Dumitrelea Luisa-Elisa, Parpală Daniela, Volintiru Arleta; ȘC. GEN. NR. 1.ROVINARI: Înv. GIORGI EDUARD: Bălan Marinela, Busuioceanu Aida, Cică Dora, Ciubotariu Mihai, Constantin Alex, Ladic Adelina, Medinței Florin, Porumb Alberto; Înv. TUDOR MIRELA: Bamea Adina, Botescu Denisa, Epure Andreea, Necșoiu Alexandru, Pătrosescu Ciprian, Pîrvu Robert, Popa Adelina, Porumb Alina, Rizea Cătălin, Sândulescu Claudia, Spătaru Adelina; Înv. ARMĂȘELU DELIA: Becheru Octavian, Brăiloiu Adelina, Caval Florentin Cosmin, Ciobanu Daniel, Giunea Daniela, Pîrvulescu Daniel Octavian; Înv. RADU DORINA: Bătăion Răzvan Dumitru, Ciora Alexandru Florin, Dima Alexandra Mihaela, Dina Alex Valentin, Drăgan Mihai Alexandru, Dumitrache Bogdan Ionuț, Ionică Dariana Crina, Lolic Claudiu Ioan Alexandru, Mogoș Roberta Alexandra, Marcu Bogdan Cătălin, Preuteasa Ștefania, Purcărîn Roxana, Pleșanu Maria Lorena, Săvoiu Cătălin, Stănoiu Marian Ilie, Udrescu Diana, Vlădulescu Andreea, Înv. ARGINTARU ADRIANA: Brăiloiu Ștefan, Ciobanu Roxana;

CLASA a III-a: ȘC. GEN. BÎLTENI: Înv. VÎLCEANU BIANCA: Ailioaie Adriana, Curuțu Bianca, Latu Andreea, Măicăneanu Adriana, Păsărin Laurențiu;

ȘC. GEN. NR. 1 ROVINARI: Înv. POPEANGĂ ANCUȚA: Cocoru Mirabela, Popescu Cristina, Surcă Alexandra; Înv. PECINGINĂ CARMEN: Bărboi Bogdan, Crăciunoiu Alina Bianca, Credință Irina Maria, Cruțeru Georgiana, Dându Oana Mihaela, Militaru Robert, Nistor Marinela, Pleșu Alexandru, Popescu Radu, Răuț Roxana, Rădăcină Claudiu, Roventă Cosmin; Înv. VASILOIU CONSTANTIN: Ficiu Bogdan Claudiu, Lica Nicolae Marian, Obleagă Cătălina Elvira; Înv. VLADU NICOLETA: Florican Bogdan, Neațu Alexandra, Stăicoșoiu Liviu;

CLASA a IV-a: ȘC. GEN. BÎLTENI: Înv. COICA IULIANA CARMEN: Dima Octavian, Molnar Beatrice; ȘC. GEN. TISMANA: Înv. LUCULESCU ILEANA: Luculescu Damian, Monafu Adela, Motorga Ionuț, Motrescu Andreea, Stanciu Romulus;

CLASA a V-a: G.S.I. TURCENI: Prof. BADEA ELENA: Lupu Loredana (V C); ȘC. GEN. NR. 1 ROVINARI: Prof. DAVID VIOREL: Mareș Alisa; Rap Beatrice; Scurtu Roxana (V E).

CLASA a VI-a: ȘC. GEN. NR. 1 ROVINARI: Prof. DAVID VIOREL: Calotă Bogdan; Împușcătioiu Daniela; Voinea Nicolae (VI A); Dițoiu Denisa; Jujan Alexandru; Rus Andreea (VI D); Prof. MERGEA MARIA: Sima Bianca; Angiu Mădălina (VI C); Petre Cristina; Bilan Aurora (VI E); G.S.I. TURCENI: Prof. TRĂȘCĂ LIVIU: Boblea Andrei; Brebenaru Raul; Gaiță Delia; Gâlceavă Ioana; Ghiță-Badea Cătălin; Nanu Elena; Vană Alexandra; Vladu Aureliana (VI C); Prof. BADEA ELENA: Ghencioiu Ionela Adriana; Cărășel Gabriela; Marotinescu Adelina Alina (VI B).

CLASA a VII-a: ȘC. GEN. NR. 1 ROVINARI: Prof. PRUNESCU ROMEO: Coman Ana Maria; Ailincăi Alina; Popa Ramona; Vițonescu Diana; Vulpe Adriana; Ghidarcea Adina; Negrea Lavinia (VII A); Curici Cristian; Bunduc Cristina; Munteanu Ștefana Anamaria; Doroi Marian; Roșca Lavinia; Corbu Simona; Sultan Larisa Vitan Bianca (VII D); Prof. MERGEA MARIA: Bărboi Denisa; Gîrd Andreea; Coica Gabriel; Bordei Laurențiu (VII B); Prof. POMANĂ LIVIU: Dragomir Alina; Căcă Mirela (VII C); Resteanu Alexandru; Guinea Marius (VII E); Anuță Alexandru; Ortacu Adriana (VII F); G.S.I. TURCENI: Prof. TRĂȘCĂ LIVIU: Bacov Cătălin; Dovleac Michael; Iacov Mădălina; Măndoiu Roxana; Marcu George; Sterian Robert; Tobă Simona (VII C); Dumitrașcu Ștefania; Ivașcu Nicolae; Negrilă Constanța; Sain Marius (VII B).

CLASA a VIII-a: ȘC. GEN. NR. 1 ROVINARI: Prof. MIHĂILESCU DELIA: Buda Bogdan Lucian; Pătru Georgiana; Cojocaru Andreea; Bujor Cristina; Coiculescu Ionela (VIII A); Prof. MERGEA MARIA: Lungu Izabela; Stăiculescu Raluca (VIII B); Prof. PRUNESCU ROMEO: Tihulcă Petrică (VIII C); Munteanu Alexandru; Morenciu Ionuț; Tudosie Robert (VIII D) Prof. NANU ION: Grecu Mariana; Diaconescu Iulia (VIII E); Chirilă Laurențiu; Pană Ionela (VIII F); G.S.I. TURCENI: Prof. TRĂȘCĂ LIVIU: Postelnicu Eugen; Văcaru Robert; Stana Cătălina (VIII C).

NOTĂ: Soluțiile problemelor propuse în acest număr se primesc până la data de 20.02.2006, pe adresa Școlii Gen. Nr. 1, Rovinari. Vă așteptăm cu rezolvări cât mai „reușite” și vă dorim mult succes!