

PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL GIMNAZIAL ²⁾

CLASA a V-a

1. Arătați că numărul $a = 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+4}$ este multiplu de 23.
George Megelea, Bușteni
2. La o împărțire a două numere naturale suma dintre cât, împărțitor și rest este 114. Știind că diferența dintre cât și împărțitor este 55, iar împărțitorul este cu 2 mai mic decât triplul restului, aflați cele două numere.
Nicolae Scuratovschi, Constanța
3. La „Școala cu Ceas”, în locul vestitului ceas austriac s-a instalat, inițial, un ceas electronic, cu cântec: „de câte ori apărea pe ecran cifra 2, el suna continuu cât timp rămânea cifra 2 afișată”. Știind că indica timpul sub forma de la 00:00 până la 23:59, să se stabilească durata „concertului” zilnic.
Ștefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea
4. Care sunt numerele de forma $c = \overline{abab}$ divizibile cu 5 știind că suma cifrelor lui c este 18?
Liviu Ardelean, Sibiu
5. Avem trei vase cu apă. Jumătate din apa aflată în primul vas o distribuim în mod egal în celelalte două vase. Apoi, jumătate din apa ce se află acum în al doilea vas o vărsăm, în mod egal, în primul și respectiv al treilea vas. În sfârșit, turnăm jumătate din apa ce se află în al treilea vas, în mod egal, în primul și respectiv al doilea vas.
După aceste operații constatăm că în primul vas se află 60 litri de apă, în al doilea 36 litri de apă, iar în al treilea 40 litri de apă. Ce cantitate de apă era, inițial, în fiecare vas, știind că toate operațiile sunt posibile ?
Ștefan Smărăndoiu, Rm. Vâlcea
6. Aflați toate numerele de forma $\overline{a3bc}$, știind că suma cifrelor este egală cu 7.
Nicolae Radu, Ploiești
7. Stabiliți dacă numărul $125^4 : 5^{10} + 32^{10} : 2^{48} + 1^{100} + 5^{2010} + 10^{2010}$ se divide cu 5.
Felicia Ozunu, Vulcan
8. Un număr natural, scris în baza 10, cu 6 cifre nenule și distincte, se numește „prietenul lui 22” dacă are suma cifrelor egală cu 22.
a) Să se scrie 3 numere „prietene cu 22”;
b) Să se arate că produsul cifrelor oricărui număr „prieten cu 22 ” se divide cu 30.
Ioana și Gheorghe Crăciun, Ploiești
9. Determinați ultimele cinci cifre ale numărului $a = 3 \cdot 5^{3n+5} + 5^{3n+4}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Dan Coma, Vădăstrița, Olt
10. Fie numerele

$$A = 2^{2010} + (2^5)^{402} + (2^{335})^6 + (2^{256})^6 \cdot (2^{237})^2$$
și

$$B = 2^{2009} + (2^{245})^5 \cdot 16^{196} + 8^{667} \cdot 2^8 + (2^{15})^{29} \cdot 4^{787} + 2^{2010} \cdot x$$
Determinați x astfel încât $A=B$.
Luminita Corneci, Vălenii de Munte

²⁾ Se primesc soluții pana la 20 martie 2010

CLASA: a VI - a

1. Pe o dreaptă d se iau punctele A și B. Fie M mijlocul segmentului (AB) și punctul N astfel încât $N \in AB$ și $N \notin [AB]$. Dacă P este mijlocul segmentului (MN) , arătați că $AN + BN = 4MP$.
Liviu Ardelean, Sibiu
2. La un magazin prețul unui calculator este 1500 lei. În urma unei promoții prețul calculatorului a fost micșorat, vânzările au crescut cu 50%, iar încasările au crescut și ele cu 25%. Care este noul preț al calculatorului?
Gabriel Tica, Băilești
3. Fie numerele x, y, z raționale nenule astfel încât:
$$\frac{x}{2y+3z} = \frac{2y}{x+3z} = \frac{3z}{2y+x}.$$
 Atunci: $(x+2y+3z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}\right).$
Gabriel Tica, Băilești
4. Fie numărul $N = 7^n + 7^{n+1} + 7^{n+2} + 7^{n+3}, n \in \mathbb{N}$
 - a) Aflați numărul natural n știind că N are 81 de divizori.
 - b) Arătați că N este număr compus.
 - c) Dacă n este par arătați că N este pătrat perfect.
Maria Frusinoiu, Ploiești
5. Fie unghiurile $\widehat{AOB}, \widehat{BOC}, \widehat{COD}, \widehat{DOA}$ formate în jurul punctului O, astfel încât
$$m(\widehat{AOB}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BOC}) = \frac{1}{3}m(\widehat{COD}) = \frac{1}{4}m(\widehat{DOA}).$$
 - c) Calculați măsura unghiului $\widehat{AOB}$;
 - d) Arătați că semidreapta opusă semidreptei (OC este bisectoarea unghiului $\widehat{AOD}$.
Mihaela Ionescu, Ploiești
6. Se dau punctele coliniare O, A, B, C în această ordine, iar M, N, P respectiv mijloacele segmentelor [BC], [AC] și [AB]. Să se arate că $OM + ON + OP = OA + OB + OC$.

7. Să se determine p, q, n numerele naturale din egalitatea $p - q + 6^n = 213$, știind că p și q sunt numere prime, iar n este un număr natural nenul. Câte soluții are problema?
Cristinel Mortici, Târgoviște
8. Cu cifrele 0,1,2,3,4 scrise o singură dată se formează numărul $\overline{abcde}$. Dacă $3 \mid \overline{cde}, 4 \mid \overline{abc}$ și $5 \mid \overline{bcd}$ determinați toate numerele de forma $\overline{abcde}$.
Dan Coma, Vădăstrița, Olt
9. Să se arate că $\frac{1991}{19911} + \frac{1992}{19921} + \dots + \frac{1997}{19971} < \frac{7}{10}$
Gheorghe Achim, Mizil
10. Demonstrați că:
 $A=2+2^2+2^3+\dots+2^{2004}$ este divizibil cu 13.
Nicolae Stănică, Brăila
11. Un număr natural de trei cifre, divizibil cu 77, are toate cifrele pare. Să se afle acest număr.
Liviu Ardelean, Sibiu

CLASA: a VII - a

1. Arătați că simetricile oricărui punct față de mijloacele laturilor unui triunghi determină un triunghi congruent cu cel dat.

Gheorghe Stoica, Petroșani

2. Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât :

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+5} = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} + 2 + \sqrt{3})$$

Nicolae Tălău, Craiova

3. Fie ABCD un patrulater convex oarecare, dar nu paralelogram, M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv AD. Notăm cu E intersecția dreptelor DM și BQ și cu F intersecția dreptelor DN și BP.

a) Să se arate că MNPQ este paralelogram, iar MEFN și QEFP sunt trapeze.

b) Demonstrați că, dacă MEFN și QEFP sunt ambele trapeze isocеле, atunci DB este bisectoare pentru unghiurile ADC și ABC.

Gabriela Leu, Sinaia

4. Pe laturile [AB] și [BC] ale triunghiului echilateral ABC se construiesc în afară pătratele ABMN și BCPQ. Să se arate că:

a) $AQ \perp MC$ și $[AQ] \equiv [MC]$;

b) $AQ \cap MC = \{E\}$ și $F \in [AC]$ astfel încât $[AF] \equiv [FC]$, să se arate că punctele B, E, F sunt coliniare.

c) AC și MQ sunt paralele.

Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești

5. Se consideră triunghiul ABC în care $AB = \frac{BC}{2}$. Fie M mijlocul laturii [BC], iar D și E

punctele care împart latura [AC] în trei părți egale, $[AD] \equiv [DE] \equiv [EC]$. Să se demonstreze că unghiul AME este drept.

Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești

6. Din mulțimea perechilor de forma $(2k, 2k+1)$, $k \in \mathbb{N}^*$, alegem n elemente, $n \geq 2$ și calculăm suma S_n a numerelor care formează perechile alese.

a) Există n pentru care S_n este cub perfect?

b) Aflați valorile lui n pentru care $S_n = 169$.

Stefan Smarandache, București

7. Să se afle numerele rationale x, y, z știind că: $\frac{4}{x} = \frac{5}{y} = \frac{6}{z}$ și $x \cdot y \cdot z = \frac{1}{225}$.

Dincă Vena, Gura Vadului

8. Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare, iar măsurile lor sunt invers proporționale cu numerele 0,25 și 0,2. [OD semidreaptă opusă semidreptei [OB, iar [OE bisectoarea unghiului $\angle AOD$. Calculați $m(\angle AOB)$; $m(\angle BOC)$; $m(\angle EOC)$.

Luminița Corneci, Vălenii de Munte

9. Se dă expresia $E(n) = (n+1)^2(n+2) + (n+1)(n+2)^2$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că E se divide cu 6.

Liviu Ardelean, Sibiu

10. Determinați $n \in \mathbb{N}$, astfel încât fracția $\frac{11n^2 - 17n + 6}{11n^2 - 28n + 12}$ să se simplifice cu 2004.

Gheorghe Achim, Mizil

CLASA: a VIII -a

1. Să se descompună în factori $E = 2a^2 - b^2 - ab + 4ac - bc + 2c^2$.
Petre Burdușel, Ploiești
2. Simplificați raportul $\frac{(x^2-16)(x^2-4x-12)+15}{(x^2-9)(x^2-4x-5)+26}$ și stabiliți mulțimea numerelor pentru care acesta are definită valoarea.
Gheorghe Achim, Mizil
3. Arătați că numărul $N = 3^{2n+4} - 6^{n+3} + 9 \cdot 2^{2n+4}$ este un pătrat perfect, $(\forall) n \in \mathbb{N}$.
Mihaela Doinaru, Sinaia
4. Se consideră numerele reale strict pozitive x și y astfel încât: $(1+2x)(3+4y) = 5$.
Să se arate că: $16xy + \frac{1}{xy} \geq 32$. Generalizare.
Dana Paponiu, Drobeta Turnu Severin
5. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ sistemul de inecuații:

$$\begin{cases} a^2 - a \leq 2b + 3c - 16 \\ b^2 - 2b \leq a + 3c - 11 \\ c^2 - 2c \leq 2a + 2b - 2 \end{cases}$$

Mihaela Doinaru, Sinaia
6. Demonstrați egalitatea:

$$\frac{(2^3-1) \cdot (3^3-1) \cdot \dots \cdot (100^3-1)}{(2^3+1) \cdot (3^3+1) \cdot \dots \cdot (100^3+1)} = \frac{3367}{5050}.$$

Constantin Saraolu, Râmnicu-Vâlcea
7. Paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' are laturile $AD = AA' = a$ și $AB = 2a$.
Punctul E este proiecția punctului A pe diagonala BD'. Calculați:
a) măsura unghiului diedru format de planele (D'AB) și (BCD).
b) aria triunghiului AD'B.
c) lungimea segmentului C'E.
Magdalena-Maria Georgescu și Mihail Focseneanu, Ploiești
8. Triunghiurile ascuțitunghice ADB și ADC sunt situate în plane diferite și $AB = AC$. Să se demonstreze că: $AD \perp BC \Leftrightarrow \angle ADB \equiv \angle ADC$.
Stefan Smarandache, București
9. Se dă triunghiul ABC cu $m(\angle A) = 90^\circ$. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara $AV = 10(2 + \sqrt{3})$ cm. Dacă $AC = 8$ cm și măsura unghiului format de planele (VBC) și (ABC) este de 75° , calculați volumul piramidei VABC.
Gheorghe Achim, Mizil
10. Fie ABCD o piramidă în care $AC = BC = 2$ și $AB = AD = BD = CD = 2\sqrt{2}$.
Determinați distanța de la punctul A la planul (BCD).
Ionela Ionescu, Vălenii de Munte
11. Știind că $x \in [8, 13]$ calculați valoarea expresiei $E = \sqrt{x^2 - 16x + 64} + \sqrt{x^2 - 26x + 169}$.
Emilian Deaconescu, Ploiești

