

2010 Anul Matematicii în Școala Românească

„Orice gândire corectă e matematică”

Grigore C. Moisil

În acest an 2010, Societatea de Științe Matematice din România împlinește 100 de ani de existență oficială. Recunoscută în Adunarea Deputaților din 1910, mai întâi ca Societatea „Gazeta Matematică”, a avut de la început susținători celebri: Ion Ionescu, Spiru Haret, N. Nicolescu, Gh. Țițeica.

Societatea de Științe Matematice își propune să organizeze în acest an, o serie de activități pentru promovarea matematicii, mai ales în școlile din învățământul preuniversitar, toate reunite sub titlul: „2010 Anul Matematicii în Școala Românească”.

Dorim să promovăm caracterul cultural al matematicii, necesitatea asigurării unei educații matematice, beneficiile pe care cunoașterea matematică, le aduce, importanța formării unei gândiri logice.

Este un bun prilej pentru profesorii de matematică să prezinte activitatea marilor matematicieni români, să demonstreze elevilor și părinților cum rezultatele matematice contribuie la progresul societății și mai ales să le transmitem elevilor ca : „Învățând matematica, înveți să gândești” așa cum spunea, academicianul Grigore Moisil, fost președinte al SSMR.

Vă invităm pe toți iubitorii de matematică sa organizați și să participați la activități dedicate acestui eveniment.

Prof.Nicolae Angelescu

Președinte Filiala Prahova SSMR

*

Intervenția profesorului Nicolae Angelescu la activitatea SSMR de la Valea Calugareasca din septembrie 2009

Doamnelor și domnilor, bine ați venit!

Bine ați venit în Prahova, bine ați venit la Valea Călugărească, locul în care la via lui Ion N. Ionescu-Bizet, acum 100 de ani, la sfârșitul lunii august redactorii revistei Gazeta Matematică au hotărât să înceapă demersurile pentru a înființa Societatea „Gazeta Matematică” – devenită ulterior , după o istorie care cu siguranță va fi reamintită astăzi, Societatea de Științe Matematice din România.

Sunt extrem de onorat că am prilejul să vă adresez câteva cuvinte, în numele colegilor mei, pe care îi reprezint aici.

Județul Prahova este unul dintre cele mai mari județe ale României în raport cu numărul de locuitori (după un recensământ din 2002 ocupă locul 2 cu 829 945 locuitori, după județul Iași), cu o densitate de 176 loc/Kmp, are 2 municipii, 12 orașe și 90 de comune. La nivelul județului Prahova funcționează 752 de unități de învățământ cu peste 110 000 de preșcolari și elevi clasele I-XII. Avem 45 de unități de învățământ liceal (din care 6 colegii naționale: 4 în Ploiești, 1 în Câmpina, 1 în Vălenii de Munte, 2 colegii, 3 colegii tehnice, 1 colegiu economic, 1 colegiu agricol, Colegiul Agricol „Gh. Ionescu-Sisești” din Valea Călugărească.

Din cei peste 8300 de profesori și învățători, aproximativ 680 sunt profesori de matematică. La nivelul județului avem trei filiale ale Societății de Științe Matematice si anume: Filiala Ploiești-Prahova (250 membri), președinte Nicolae Angelescu, Filiala Câmpina (60 membri), președinte Tănase Gabriela și Filiala Vălenii de Munte , președinte Anghel Dafina. Istoria lor

începe în anul 1950 când s-a creat filiala Prahova cu subfilialele de la Câmpina și Vălenii de Munte. Permiteți-mi să vă spun numai numele președinților, sigur pe parcursul zilei veți avea ocazia să aflați mult mai multe despre noi. La Ploiești am avut pe prof. Negrea, prof. I. Grigore, prof. Miron Oprea, prof. Olimpia Popescu, prof. Petre Năchilă, prof. Ion Iarca; la Câmpina prof. Tudose Tănase, prof. Mariana Ștefănescu, prof. Sergiu Popa, prof. Tănase Gabriela; la Vălenii de Munte prof. Anghel Dafina.

Sunt bine cunoscute activitățile: Sesiunea de comunicări de la Sinaia, ajunsă la a 36-a ediție, profesorul Adrian Ghioca fiind zeci de ani sufletul acestor întâlniri, Școala de vară de la Bușteni, Activitățile de cerc cu elevii organizate la Câmpina cu participarea academicienilor N. Teodorescu, Caius Iacob, Caietul de informare matematică al profesorului Policarp Gane, devenit în momentul de față revista “Matematici prahovene”, Simpozioanele „Matematica poeziei – poezia matematicii”, „Dezvoltarea imaginației prin probleme de loc geometric”, Aplicații ale matematicii în biologie, Centenarul Grigore Moisil, organizate la Vălenii de Munte.

Am enumerat numai câteva dintre activitățile organizate de-a lungul anilor de către filialele Societății. Evident, sunt multe de spus, dar de-a lungul zilei vom avea prilejul să vă mai povestim despre noi, dar cred că ceea ce spunea Gh. Țițeica despre activitatea în redacția și respectiv Societatea Gazeta Matematică ne caracterizează și pe noi: „În jurul Gazetei Matematice s-a desfășurat o activitate extraordinară, cu un ritm regulat și un caracter diferit de al oricărei alte publicații periodice. Încetul cu încetul s-a format o atmosferă unică în felul ei, nu numai științifică, dar și morală și cu aspecte neașteptate”

Ei bine, doamnelor și domnilor, tocmai această atmosferă de colegialitate, de prietenie, de bucurie intelectuală ne dorim, noi organizatorii, să o avem astăzi.

Asa cum am reamintit la sfârșitul lui august 1909, aici la Valea Calugareasca, un grup de redactori au hotarat sa inceapa demersurile pentru infiintarea Societatii Gazeta Matematica. Astazi, comuna Valea Calugareasca este una dintre cele mai mari unitati teritorial-administrative rurale ale judetului Prahova, cu 15 sate componente si o populatie de peste 10700 locuitori. Prima atestare documentara este din anul 1429, mentionata intr-un hrisov semnat de voievodul Dan al-II-lea in care se scrie despre existenta unui sat numit Izvoreani, asezat pe dealurile Cernatestilor. La jumatatea secolului XVII apar asezari ale unor calugari veniti de la Constantinopol cu scopul formarii unui centru religios la Dealul Mare. Datorita acestei asezari s-a atribuit numele localitatii. La nivelul comunei Valea Calugaeasca isi desfasoara activitatea un colegiu agricol, 6 scoli cu clasele I-VIII si 7 gradinite.

Cunoscuta pentru culturile de vita de vie si mai ales pentru vinurile obtinute aici, comuna, aflata cum altfel decat pe “drumul vinului”, este in sarbatoare si va invit sa descoperiti traditiile locale.

Va rog sa-mi permiteti sa multumesc tuturor celor care ne-au ajutat in organizarea acestui eveniment si in mod special domnului ing. Mircea Cosma, presedintele Consiliului Judetean Prahova si domnului ing. Radu Oprea, prefectul judetului Prahova.

Si pentru ca suntem la Valea Calugareasca, si „in vino veritas”, iar matematicienii au stiut sa-l puna in evidenta si sa-l utilizeze in mod intelept si vrednic, va propun sa ne gandim si la viitor, poate la urmatoarea suta de ani si mai mult, si sa avem curajul, invatand de la inaintasi, sa propunem si sa realizam lucruri importante pentru dezvoltarea invatamantului matematic, mai ales cel preuniversitar.

Permiteti-mi sa urez societatii noastre sa traiasca, sa creasca si sa infloreasca:

Vivat!, Crescat!, Floreat!

O CONSECINȚĂ REMARCABILĂ A PROPRIETĂȚII LUI DARBOUX ȘI APLICAȚII

Ion Preda, Rm. Vâlcea

În această lucrare am generalizat rezultatele din [2]. Dacă în [2] rezultatele au fost obținute cu teorema lui Rolle, aici rezultatele (generalizate) se obțin simplu cu teorema valorii intermediare (proprietatea lui Darboux) și mai mult, am demonstrat unicitatea valorii intermediare. Aceste rezultate au interpretări geometrice și semnificații practice remarcabile.

Pentru început vom da consecința anunțată sub forma unei leme.

Lemă. Fie $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$, cu $h(x) > 0$, pentru orice $x \in (a, b)$. Atunci, pentru orice $m, n \in \mathbb{N}^*$, există și este unic $c_{m,n} \in (a, b)$, astfel încât

$$\frac{\int_a^{c_{m,n}} h(x) dx}{\int_{c_{m,n}}^b h(x) dx} = \frac{m}{n}$$

Demonstrație. Concluzia lemei poate fi reformulată astfel: să se arate că ecuația $n \int_a^x h(t) dt - m \int_x^b h(t) dt = 0$ are o soluție unică în (a, b) . Această rescriere ne sugerează să considerăm că funcția continuă

$H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = n \int_a^x h(t) dt - m \int_x^b h(t) dt$, pentru care avem

$H(a) = -m \int_a^b h(t) dt < 0$ și $H(b) = n \int_a^b h(t) dt > 0$. Atunci cu teorema valorii intermediare deducem că există $c_{m,n} \in (a, b)$, astfel încât $H(c_{m,n}) = 0$ (funcția H fiind continuă are proprietatea lui Darboux) de unde concluzia. Pentru unicitate este suficient să observăm că $H'(x) = (m+n)h(x) > 0$, pentru orice $x \in (a, b)$, adică H este strict crescătoare pe (a, b) .

Remarcă. Această leamnă este remarcabilă prin faptul că are aplicații importante imediate, pe care le vom da sub forma unei teoreme în cele ce urmează.

Pentru aceasta vom face următoarele notații: pentru o funcție $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe

$[a, b]$ cu $f(x) > 0$ oricare ar fi $x \in (a, b)$ considerăm:

$$\Gamma_f^{[a,b]} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

$$C_f^{[a,b]} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\},$$

$$S_f^{[a,b]} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} = f(x)\},$$

$$G_f^{[a,b]} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, y = f(x)\},$$

iar pentru $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue pe $[a, b]$, cu $f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in (a, b)$ considerăm

$$\Gamma_{f,g}^{[a,b]} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Teoremă

I) Fie $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a,b]$, cu $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (a,b)$ și m, n numere naturale nenule.

Atunci:

a) există o dreaptă unică $x = c_{m,n}$ cu $c_{m,n} \in (a,b)$, astfel încât:

$$\frac{\text{aria}(\Gamma_f^{[a;c_{m,n}]})}{\text{aria}(\Gamma_f^{[c_{m,n};b]})} = \frac{m}{n}$$

b) există un plan unic $x = c_{m,n}$ cu $c_{m,n} \in (a,b)$, astfel încât:

$$\frac{\text{volumul}(C_f^{[a;c_{m,n}]})}{\text{volumul}(C_f^{[c_{m,n};b]})} = \frac{m}{n}$$

c) dacă în plus, f este derivabilă cu derivata continuă, atunci

(i) există un plan unic $x = c_{m,n}$ cu $c_{m,n} \in (a,b)$, astfel încât:

$$\frac{\text{aria}(S_f^{[a;c_{m,n}]})}{\text{aria}(S_f^{[c_{m,n};b]})} = \frac{m}{n}$$

(ii) există un punct unic $P(c_{m,n}; f(c_{m,n}))$, cu $c_{m,n} \in (a,b)$, astfel încât:

$$\frac{\text{lungimea}(G_f^{[a;c_{m,n}]})}{\text{lungimea}(G_f^{[c_{m,n};b]})} = \frac{m}{n}$$

II) Fie $f, g: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue pe $[a,b]$, cu $f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in (a,b)$. Atunci există o dreaptă unică $x = c_{m,n}$, cu $c_{m,n} \in (a,b)$ astfel încât:

Demonstrație. Totul rezultă imediat folosind lema:

I) a) Pentru $h = f$ rezultă:

$$\frac{\text{aria}(\Gamma_{f,g}^{[a;c_{m,n}]})}{\text{aria}(\Gamma_{f,g}^{[c_{m,n};b]})} = \frac{m}{n}$$

$$n \int_a^{c_{m,n}} f(x) dx = m \int_{c_{m,n}}^b f(x) dx$$

b) Pentru $h = f^2$ rezultă: $n\pi \int_a^{c_{m,n}} f^2(x) dx = m\pi \int_{c_{m,n}}^b f^2(x) dx$

c) Pentru $h = f\sqrt{1+(f')^2}$ rezultă:

$$n2\pi \int_a^{c_{m,n}} f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx = m2\pi \int_{c_{m,n}}^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

d) Pentru $h = f\sqrt{1+(f')^2}$ rezultă

$$n \int_a^{c_{m,n}} \sqrt{1+(f'(x))^2} dx = m \int_{c_{m,n}}^b \sqrt{1+(f'(x))^2} dx$$

II) Pentru $h = g - f$, rezultă

$$n \int_a^{c_{m,n}} (g(x) - f(x)) dx = m \int_{c_{m,n}}^b (g(x) - f(x)) dx$$

Rezultatele obținute în această teoremă au interpretări geometrice remarcabile imediate.

De exemplu I)b) din teoremă arată următoarele: corpul de rotație determinat de funcția

f (obținut prin rotirea subgrafului lui f în jurul axei Ox) se poate descompune în două corpuri de

rotație cu raportul volumelor dat $\frac{m}{n}$ cu ajutorul unui plan unic paralel cu planul yOz.

De asemenea semnificațiile practice remarcabile ale rezultatelor din teoremă sunt imediate, iar semnificația practică a lui II) din teoremă generalizează o problemă practică cunoscută.

Bibliografie

- [1] M.Ganga, Manual pentru clasa a XII-a, Matematică M1, Volumul I, Elemente de analiză matematică, Editura Mathpress, 2005
- [2] Gh. Necșuleu, I. Necșuleu, Descompuneri remarcabile de mulțimi cuprinse între două grafice, corpuri de rotație, G.M. Seria A, nr 3/2005, pag 277-279.
- [3] C. Udriște, I. Țevy, Gh. Necșuleu, I. Necșuleu, I. Preda, Manual pentru clasa a XI-a, Matematică M1, Editura Fair Partners, București, 2004.

*

EFFECTUL "DE ATMOSFERĂ"

Ioan Dăncilă, București

Una dintre cele mai omenești erori de judecată este cea generată de așa numitul efect "de atmosferă", în care raționamentul este alterat de scheme de gândire îndelung exersate, devenite stereotipii.

Nu se poate să nu vă mai aduceți aminte de celebra întrebare a unui unchi sau a unui bunic hâtru :

- Cum ai învățat la școală, dragul meu nepot, ce-i mai greu, un kilogram de pietre sau unul de pene?

și de tentația, de atunci, de a răspunde prompt: un kilogram de pietre, bunicule !

Vom începe cu un cântec englezesc pentru copii, care ilustrează și el, cum nu se poate mai bine, rezultatul acestui efect în mintea unui rezolvitor.

1. *Spre St. Ives mergând mai ieri,
Întâlnii șapte muieri.
Fiecare muieră căra șapte saci,
În fiecare sac dormeau șapte pui;
Pui, pisici, saci și muieri
Câți mergeau spre St. Ives ieri?*

Obișnuit cu acest gen de probleme de adunare și de înmulțire, un rezolvitor neatențat va aduna numărul de muieri 7, cu numărul de saci $7 \times 7 = 49$, un număr de mâțe $7 \times 7 \times 7 = 243$ și cu numărul de pui $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ și va răspunde 2800!

Numai că muierile, sacii, mâțele și puii *nu mergeau* spre St. Ives *ci veneau* de la St. Ives!

În continuare vă vom prezenta câteva probleme și soluțiile lor, găsite în cărți și reviste în care efectul "*de atmosferă*" a fost determinant.

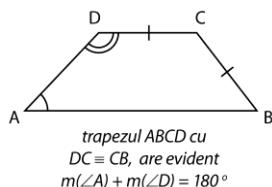
2. Domnul profesor scrie pe tablă umerele: 0,51; 528, 4836 apoi întreabă:

- Câte dintre aceste numere se împart la 17?

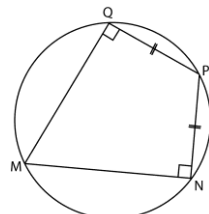
Vă veți lăsa "*dus de val*" și veți calcula: 0 se împarte la orice număr nenul, deci și la 17, $51:17=3$ ș.a.m.d. sau veți răspunde corect:

Toate cele patru numere! Completând: unele cu rest 0, altele cu rest diferit de zero.

3. *Un patrulater cu două laturi congruente și două unghiuri suplimentare este trapez isoscel sau romb, sau paralelogram.*



Nu vă grăbiți să încuviințați. Gândiți-vă la contraexemplele următoare.



4. Numărul natural prim indivizibil cu 7 este:

a) 14; b) 39; c) 7; d) 117

Cei mai mulți vor căuta soluția împărțind pe rând cele patru numere propuse la 7, ignorând faptul că singurul număr prim indivizibil cu 7 nu poate fi decât... 7.

Consecință a obișnuinței, *suma a două numere prime este un număr par*, a "apărut" problema:

5. *Nu există numere prime m și n pentru care $\forall a \in \mathbb{N}^* (a+1) / (a^m + a^n)$ Demonstrați.*

Excluderea numărului 2, pentru că este par, din lista numerelor prime a generat enunțul fals de mai sus, însoțit de o bizară "demonstratie".

Noi vă oferim un contraexemplu: pentru $m=2$ și $n=3$ sau $m=3$ și $n=2$.

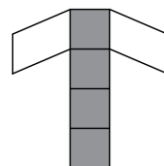
6. Este adevărat că $7\sqrt{\frac{7}{48}} = \sqrt{7\frac{7}{48}}$?

Nu poate fi adevărat! vor exclama majoritatea celor care au lucrat cu numere de forma $a\sqrt{b}$ (b – nu este pătratul unui număr rațional).

Numai că, încă o dată, intuiția ne păcălește.

În general, dacă $b = 2a$ și $c = 2(a^2 - 1)$, avem: $\sqrt{a\frac{b}{c}} = a\sqrt{\frac{b}{c}}$

7. *Un paralelipiped care are patru dintre fețele sale pătrate congruente nu poate fi decât cub.*

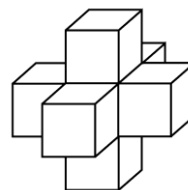


desfășurarea unui astfel de paralelipiped

Din nou un desen ne va convinge de falsitatea afirmației. Chiar dacă cele patru fețe gri sunt pătrate, celelalte două fețe pot fi romburi (fără a fi pătrate)

8. Dacă toate fețele unui poliedru sunt pătrate congruente, este adevărat că acest poliedru este cub?

Dacă vă grăbiți să răspundeți da, desenul din dreapta vă va contrazice. Cele 30 de fețe ale poliedrului reprezentat sunt pătrate congruente, dar...



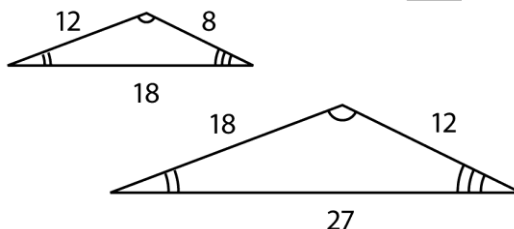
9. Oricare două triunghiuri care au cinci perechi de elemente (laturi, unghiuri) congruente sunt convergente.

Pornind de la criteriile de congruență LUL, ULU, LLL cei mai

mulți vor raționa astfel:

Dacă pentru trei perechi de elemente congruente, două triunghiuri sunt congruente, cu atât mai mult, pentru cinci astfel de perechi sunt congruente.

Perechea de triunghiuri alăturată, îi contrazice.



10. Este adevărată egalitatea:

$$\left(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 + \frac{2}{x-1}\right) \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{2}{x-1}\right) = (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$$

Nu! vor răspunde cei ce își vor reaminti de operațiile cu polinoame și fracții algebrice. Verificați,

totuși, scriind $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}$ și $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = \frac{x^5 + 1}{x + 1}$.

11. Aflați cel mai mic (sublinierea noastră) număr de patru cifre care împărțit la un număr de două cifre dă restul 89.

“SOLUȚIE”: Restul egal cu 89, implică: împărțitorul poate fi unul dintre numerele 90, 91, 92, ..., 99. Cel mai mic număr de patru cifre căutat este cel care împărțit la cel mai mic număr din șir, adică la 90 dă restul 89. El este așadar $1079 = 90 \times 11 + 89$ Oare?

Furați de “atmosfera” creată de nenumăratele probleme pe această temă (în care împărțitorul nu putea să fie decât un număr mai mare cu 1 decât restul) se consideră (doar uneori adevărat) că se obține cel mai mic deîmpărțit utilizând cel mai mic împărțitor posibil.

Sunt sigur, deci mă îndoiesc, ar fi trebuit să fie reflexia autorilor soluției înainte de a o valida. Și nu ne îndoim că ar fi descoperit numărul : $1009 = 92 \times 10 + 89$

12. Să se determine cea mai mare fracție subunitară de forma: $\frac{123 + 4xy}{5xy}$

“SOLUȚIE”: Pentru ca fracția să fie subunitară, trebuie ca $123 + 4xy < 5xy$

adică, $123 < 4xy - 5xy$ deci $123 < 100 + 9y - 9x$

de unde rezultă $23 < 9(y - x)$ și apoi $y - x > \frac{23}{9}$, așadar $y - x \geq 3$ deci

$x \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}, y \in \{3, 4, \dots, 9\}$.

Pentru a determina cea mai mare fracție trebuie să avem numitorul cel mai mic (sublinierea noastră) deci vom lua $y = 3$ și $x = 0$

Cea mai mare fracție subunitară ar fi : $\frac{123 + 403}{530} = \frac{526}{530}$

În realitate, propoziția subliniată este valabilă doar în condițiile unui același numărator. După studierea celor 49 de fracții care îndeplinesc condițiile din ipoteză, constatăm că obținem cea mai mare fracție $\frac{592}{596}$, atunci când $y = 9$ și $x = 6$.

Și în final, pentru amuzamentul cititorului, gentili, vom trece printre cauzele care au generat hilara "soluție" de mai jos, efectul "de atmosferă".

13. *Alege la întâmplare un număr natural, cel mult egal cu 2004. Care este probabilitatea ca restul împărțirii acestui număr la 56 să fie 72?*

"SOLUȚIE": Numerele au forma $56k + 72$ unde $k \in \mathbb{N}, k \leq 35$

Rezultă că sunt 35 de numere care verifică condiția, deci probabilitatea este

$$p = \frac{35}{2005} = \frac{7}{401} (!?)$$

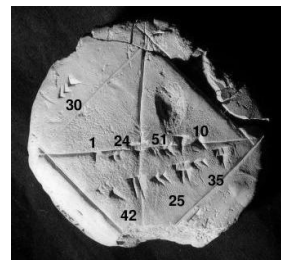
Bibliografie: surprinzător de amplă. Din motive lesne de înțeles, nu vom preciza nume.

O POARTĂ DE INTRARE ÎN LUMEA IRAȚIONALELOR

Prof. Manuel Matei, Pitești

Prof. Miron Oprea, Ploiești

Iubite cititor, în cele ce urmează încercăm să-ți prezentăm poarta istorică a „segmentelor incommensurabile” de intrare în fascinanta lume a iraționalelor, așa cum s-a născut în istoria multimilenară a matematicii. Avem martor celebra tăbliță babiloniană de lut ars de acum 4000 ani de la Universitatea Yale din SUA înmatriculată sub denumirea YBC 7289 din figura alăturată pe care se vede conturul unui pătrat cu diagonala sa și o serie de semne de forma ∇ și $\blacktriangleleft$ care simbolizează scrierea cuneiformă a raportului dintre diagonala și latura pătratului pe care noi azi îl scriem pur și simplu $\sqrt{2}$.



Cercetări privind calculul lui $\sqrt{2}$ apar și în lucrarea *Sulhasutras* a matematicianului indian *Apastamba* din sec.V î.Hr., care în scrierea actuală are următoarea evaluare $\sqrt{2} \square 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$.

Raportul dintre lungimea diagonalei și a laturii unui pătrat a apărut și în școala lui Pythagora, odată cu celebra sa teoremă ceea ce a însemnat descoperirea conceptului de *incommensurabilitate*, socotit ca una din marile descoperiri ale Greciei antice. După cum se știe *operația de numărare* a dus la apariția numerelor naturale pe care noi azi o notăm astfel $\square = \{1, 2, 3, \dots\}$, iar cea de măsurare (lungimi, arii, volume etc) a dus la apariția *numerelor raționale* ca raport a două numere naturale (fracții ordinare) pe care o notăm azi $\square^+ = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{N} \right\}$. Evident că numărul 0 nu exista pentru

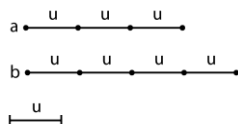
matematicienii Greciei antice. Conceptul de incommensurabilitate descoperit în școala lui Pythagora a pus în mare încurcătură pe toți membrii confreriei pythagorice pentru care nu existau decât $\square$ și $\square^+$. Mai mult, simpla egalitate $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ de azi, grecii o scriau *3,4,6 și 8* ceea ce însemna că „3 este

față de 4, ceea ce este 6 față de 8”. Evident că este vorba de o proporție. Ei considerau că primii doi termeni ai proporției pot fi două mărimi (două segmente) astfel că „a,b,3 și 4” formează proporția

$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$. Aceasta înseamnă că fiind date segmentele a și b, există un segment u astfel încât:

$a=3u$, $b=4u$ ca în figura alăturată

În această viziune, a determina raportul a două mărimi (lungimi) date, revine a căuta o unitate de măsură comună ambelor. În ipoteza existenței (și deci a găsirii) unei astfel de unități de același fel cu mărimile, se zice că cele două mărimi (segmente) sunt *comensurabile*. În școala lui Pythagora s-a observat că raportul: diagonala unui pătrat/latura pătratului



nu este de forma $\frac{p}{q}$ cu $p, q \in \mathbb{Q}$, ceea ce înseamnă că cele două segmente sunt *incomensurabile*.

La fel înălțimea unui triunghi echilateral și jumătatea laturii triunghiului echilateral sunt segmente incomensurabile; lungimea unui cerc și lungimea diametrului său sunt incomensurabile, precum și două segmente a și b pentru care avem proporția $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, sunt, de asemenea incomensurabile.

Problematica mărimilor incomensurabile este adusă în discuție și în *dialogurile lui Platon* (Menon, Republica Teetet); în Teetet apar numerele iraționale $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots, \sqrt{17}$ (cu excepția lui $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt{16}$). În *Primele Analitice*, Aristotel evocă și el mărimile incomensurabile, dar demonstrația explicită a existenței *mărimilor incomensurabile* o face Euclid în ELEMENTE în propoziția a 9-a din cartea a X-a. Drumul de la *incomensurabilitate* la existența și construcția numerelor *iraționale* a necesitat eforturi considerabile pe o perioadă de peste 2000 de ani și înseamnă drumul parcurs de gândirea matematică de la Eudox (408-355 î. Hr) la R. Dedekind (1831-1916) când se încheie construcția numerelor reale ($\mathbb{R}$) prin lucrările remarcabile ale lui G.Cantor, R.Dedekind și K. Weierstrass în a doua jumătate a sec. XIX.

Demonstrația iraționalității lui $\sqrt{2}$ o cunoaște orice elev din clasa a VIII-a a școlii gimnaziale așa cum se face în ELEMENTELE lui Euclid, care secole de-a rândul au reprezentat manualul după care se învăța matematică în școală.

În *Primele Analitice* ale lui Aristotel, care este anterioară ELEMENTELOR, acesta face afirmația următoare: „*a presupune diagonala pătratului comensurabilă cu latura, revine la a confunda numerele pare cu cele impare*”. Să justificăm această afirmație a lui Aristotel. Se știe că pythagoricienii, cu cinci secole înainte de Hristos, au fost primii care s-au interesat într-un mod așa de precis de distincția dintre *par* și *impar* în rândul numerelor naturale și au stabilit clase de numere pare. Astfel, ei au stabilit că există următoarele clase de numere pare:

$$P_1 = \{2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, \dots\} = \text{pare o dată}$$

$$P_2 = \{4, 12, 20, 28, \dots\} = \text{pare de două ori}$$

$$P_3 = \{4, 24, 40, \dots\} = \text{pare de 3 ori}$$

.

.

.

$$P_k = \{2^k | k \in \mathbb{Q}\} = \text{pare de } k \text{ ori}$$

Rezultă că orice număr natural este de forma: $2^k(2r+1)$ cu $k, r \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Evident că dacă

$k=0$, obținem numerele impare. Și acum presupunând $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avem că: $\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow p^2 = 2q^2$,

luând $p = 2^k(2r+1)$ și $q = 2^s(2n+1)$, obținem: $2^{2k}(2r+1)^2 = 2^{2s+1}(2n+1)^2$ ceea ce înseamnă că $2k = 2s+1$ (un număr par este egal cu un număr impar $\Leftrightarrow$ absurd).

Deci ecuația diafantică $p^2 - 2q^2 = 0$ nu are soluție, diferită de soluția banală, în $\square$.

Folosind *teorema fundamentală a aritmeticii* (orice număr întreg este produs de numere prime) afirmația lui Aristotel se justifică iarăși imediat: în descompunerea în factori primi a lui p^2 , fiecare din factori este ridicat la o putere pară și suma exponenților care apar în descompunerea lui p^2 este un număr par, pe când suma exponenților în descompunerea lui $2q^2$ este în număr impar, ceea ce face ca egalitatea $p^2 = 2q^2$ să fie imposibilă.

Observație: Această demonstrație se poate extinde imediat pentru a demonstra iraționalitatea și a altor rădăcini pătrate ca: $\sqrt{6}; \sqrt{12}; \sqrt{15}, etc.$

Iată acum o altă demonstrație a iraționalității lui $\sqrt{2}$, care se bazează pe cifra unităților numerelor naturale p și q . Presupunând că $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ cu $(p, q) = 1 \Leftrightarrow \frac{p}{q} =$ ireductibilă, atunci să arătăm că

ecuația $p^2 = 2q^2$ este imposibilă în $\square$. Dacă scriem p și q în baza 10 și considerăm cifrele unităților lor, avem evident *cifra unităților unui produs este egală cu produsul cifrelor unităților factorilor*. Deci dacă u este cifra unităților lui p , atunci cifra unităților lui p^2 va fi aceeași cu cifra unităților lui u^2 , iar pentru $2q^2$ cifra unităților sale va fi printre cifrele unităților numerelor de forma $2v^2$ unde u și v iau valori 0,1,2,...,9. De aici rezultă următorul tabel al cifrelor unităților posibile ale numerelor de forma u^2 și $2v^2$:

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cifra unităților lui u^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
cifra unităților lui $2v^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

Din acest tabel rezultă că cifrele unităților lui u^2 și $2v^2$ nu sunt egale decât dacă $u = v = 0$ și $u = 0, v = 5$, cazuri excluse din ipoteză (fracția $\frac{p}{q}$ este ireductibilă).

În încheiere o observație utilă și importantă, care are ca scop de a gândi *iraționalitatea* și în alte aritmetici decât cea obișnuită. Spre exemplu în „*aritmetica modulo 7*”. După cum se știe, această aritmetică are ca numere (simboluri) cifrele $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ și operațiile de *adunare* și *înmulțire* modulo 7.

Se constată imediat că $\sqrt{\hat{2}} = \hat{3}$ căci $\hat{3}^2 = \hat{2} \pmod{7}$ și că deci problema *raționalității* și *iraționalității* capătă și un aspect *relativ*.

Îți propunem, stimate cititor, să studiezi problema iraționalității lui $\sqrt[3]{2}$ și $\sqrt{5}$ în aritmetica obișnuită și în alte aritmetici construite modular.

Bibliografie:

- 1) Collette, Jean-Paul: „*Histoire des mathématiques*” (vol.1), Ed. du Renouveau, Montreal 1973
- 2) Courant R, Robbins H: „*Ce este matematică*”, Ed. Științifică, București 1969
- 3) Rittaud Benoît: „*Le fabuleux destin de $\sqrt{2}$* ”, Ed. Le Pommier 2006
- 4) Ștefănescu Mirela: „*15 lecții de istoria metematicii*”, Ed. Matrix-Rom, București 2008

RECENZIE¹

Prof. Grațiana Calcan, Ploiești

La finele anului 2009, în prestigioasa colecție „*Biblioteca Societății de Științe Matematice din România*”, a apărut lucrarea cu incitantul titlu: „*Învăț geometrie cu... mâinile tale*” având ca autori pe E.Dăncilă și I. Dăncilă nume cunoscute și recunoscute în literatura matematică românească de nivel preuniversitar. Tradițional mâinile sunt folosite în studiul matematicii pentru a manevra creionul (creta) și instrumentele geometrice. De data aceasta, cei doi autori ne arată posibilitatea de a utiliza mâinile chiar la a construi corpuri geometrice pe baza a 22 de *modele*, ingenios concepute, cu ajutorul cărora putem să rezolvăm probleme mai dificile din *geometria în spațiu*. Lucrarea este alcătuită din două părți. Prima parte se referă la o introducere în studiul corpurilor geometrice unde sunt trecute în revistă principalele proprietăți ale acestora pe parcursul a 9 capitole.

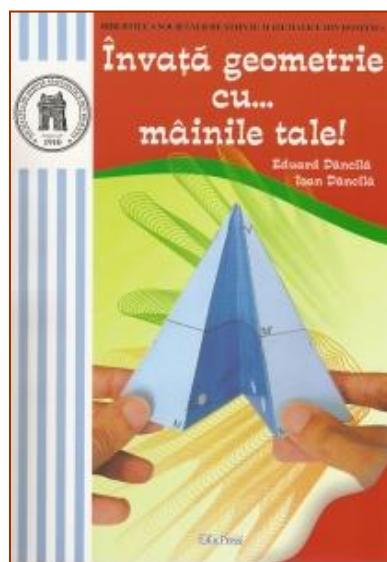
Fiecare capitol se încheie cu exerciții și probleme bine alese și a căror rezolvare de multe ori apelează la construirea unui model.

Sunt în total 163 de probleme.

Partea a doua o constituie colecția de 22 planșe (desfășurări de corpuri geometrice) care dau posibilitatea de a se construi diverse corpuri și secțiuni în ele. Alcătuirea acestor planșe de către cei doi autori, reprezintă în esență originalitatea și ineditul lucrării, în literatura românească de matematică. Lucrarea se deschide cu o *scrisoare-apel* către elev, în care autorii își mărturisesc scopul și forma alcătuirii cărții.

Consider această lucrare ca o premieră în metodică învățării *geometriei în spațiu* atât la nivel individual cât și la nivel de clasă, autorii demonstrând că se poate învăța matematică (geometrie) și cu mâinile, construind *corpuri, secțiuni în corpuri, unghiuri, distanțe* etc.

Lucrarea este binevenită și oportună în învățământul matematic preuniversitar și folosirea ei la clasă va aduce o revigorare a interesului pentru matematică a elevilor. Felicit cei doi autori pentru efortul și ingeniozitatea alcătuirii modelelor precum și pentru gama atât de bogată și variată de lucrări pe care le-au elaborat în ultimii 15 ani pentru a ușura și trezi interesul elevilor pentru studiul matematicii.



¹ Învăț geometrie cu...mâinile tale!, Eduard Dăncilă și Ioan Dăncilă, Editura Erc Press, București 2009