

O SCURTĂ INTRODUCERE ÎN LUMEA SIMETRIEI

Prof. SERENELA GABRIELA RADU (Pitești) și Prof. MIRON OPREA

Cuvântul *simetrie* își are originea în antichitate și provine din termenii grecești *sim* = drept și *metrie* = măsură, iar, după celebrul matematician german Hermann Weyl (1885-1955) are două înțelesuri: *simetrie* înseamnă ceva *bine proporționat* (bine echilibrat), un fel de concordanță a mai multor părți care se încadrează într-un întreg dându-i frumusețe, un al doilea înțeles, prin *simetrie* se înțelege *simetrie bilaterală* care matematic înseamnă invarianță la oglindiri în raport cu un plan (decă invarianță la translații și rotații). Astăzi cuvântul *simetrie* are o largă și variată semnificație: în *natură* caracterizează stările de echilibru și servește la descrierea fenomenelor și obiectelor neînsuflețite, a celor din lumea animală și vegetală, la diverse reprezentări de mărimi matematice, a figurilor geometrice, a cosmosului și la universul particulelor elementare din microcosmos. Oriunde întâlnim cuvântul *simetrie* presupune *invarianță* în raport cu unele transformări. Ca de exemplu, *invarianța figurilor geometrice sau a obiectelor* față de schimbarea părților lor egale prin rotație și reflexii. În aceste cazuri este vorba de *invarianță spațială*, iar în cazul unor fenomene, transformările, în raport cu timpul, care sunt *deplasări sau reflectări* ce duc la *invarianțe temporale*. Dacă privim o floare care are 5 petale identice, zicem că floarea e simetrică, analog *repetarea* în timp a orelor, zilelor sau anilor ne dă sentimentul simetriei. Arta și construcțiile Egiptului și Greciei antice au anumite regularități și ordonări în așezare care le fac plăcute, forma *fulgilor de zăpadă*, fațetele unor cristale prezintă organizări simetrice care încântă ochiul privitorului. Azi mai mult ca oricând fizicienii, chimiștii, matematicienii, astronomii, biologii, medicii, inginerii, arhitecții, artiștii plastici, compozitorii și chiar și filozofii se servesc în activitatea lor de *simetrie* pentru că *întreaga natură ne oferă forme și comportări simetrice*. De aceea omul caută să imite *natura*, *simetria* fiind unul din cele mai ascuțite instrumente pentru descifrarea ei. Există numere care în scriere și citire (de la stânga la dreapta și de la dreapta la stânga) sunt invariante: 37873;..., de asemenea, cuvinte care au o simetrie (în scriere și citire) ca *minim*, sau chiar propoziții simetrice: „*Introducere în simetrie. Simetrie în introducere*”. Astfel de cuvinte sau propoziții au fost descoperite în școala din Alexandria în sec.III î.H. și se numesc *palindromuri*. Din cele afirmate mai sus rezultă că există o adevărată *lume a simetriei*, iar noi în această succintă introducere dorim să prezentăm cititorului „o rază de lumină” care să-i deschidă drumul către această lume. Menționăm că în ultimii 50 de ani cele mai multe premii Nobel (pentru domeniile care se acordă) le-au obținut rezultatele cercetărilor care au avut într-un anumit mod legătură cu simetria.

Imaginile din figurile de mai jos ne arată câteva exemple de simetrie din natură și din artă.



Din punct de vedere istoric, *simetria* a apărut la figurile (obiectele) geometrice și de aceea și noi în prezenta introducere vom pleca de la așa-zisa *simetrie geometrică* (care *invariază* = menține *forma* și *mărimea*) cu mențiunea expresă că în *știința contemporană* această noțiune este mult mai generală și este strâns legată de fenomenul și obiectul concret studiat, atingând structura sa. În geometrie, *simetria* este o *transformare geometrică* care duce un punct în alt punct, o *dreaptă* în altă *dreaptă*, un *plan* în alt *plan*, o *figură geometrică* în altă *figură geometrică*, un *corp* (în general *geometric*) în alt *corp*, astfel că se mențin (invariază) unele caracteristici (formă, mărime, orientare etc.) și în obiectul (figura) transformată.



În octombrie 1872, un tânăr german de 23 de ani, Felix Klein, urcă la tribuna marelui amfiteatru al Universității din Erlangen (Germania), puțin intimidat, pentru a pronunța discursul său inaugural de nou profesor, în fața unui auditoriu de străluciți matematicieni. Discursul trebuia să se refere la intențiile și modul cum înțelege să predea geometria studenților. Era deci, într-un fel, un adevărat examen (public) pentru candidat, mai ales că subiectul și-l alesese singur și reprezenta și direcția cercetărilor sale în cadrul universității. În sală era și prietenul său, celebrul matematician norvegian Sophus Lie (1842-1899), creatorul instrumentului matematic pentru abordarea cercetărilor preconizate de Klein. Subiectul conferinței anunțat de Klein este: „*Considerații comparative asupra cercetărilor geometrice moderne*”, subiect șocant și dificil pentru că apăruse deja *geometriile neeuclidiene* iar *geometria proiectivă* își atinsese punctul culminant.



De la primele fraze Klein captează atenția auditorului, după care plonjează cu pasiune și entuziasm în subiect. Era un discurs fantastic asupra geometriei, revoluționar în adevăratul sens matematic. Nimeni, de la Euclid, nu a venit cu idei atât de noi, care întradevăr aduceau un nou mod de a înțelege geometria. Acest celebru discurs a rămas în matematică ca *Programul de la Erlangen* și s-a dovedit extrem de eficace pentru că a dus la o dezvoltare și înflorire a geometriei și chiar a matematicii nemaiîntâlnite până atunci.

Ba chiar, acest program al lui Klein a avut repercursiuni benefice și revoluționare în multe domenii ca: *arta* (pictură, sculptură,...) *literatura*, *poezia*, *muzica* etc. care au adus o nouă viziune asupra *culturii*, prelungindu-se pe întreg secolul XX. Discursul nu s-a publicat imediat, ci după circa 20 de ani, iar în limba română el a fost tradus de abia în 2008, iar primul român care a pătruns în taina noilor idei din acest program a fost celebrul matematician (și poet) Dan Barbilian (Ion Barbu) în deceniul al treilea al sec. XX.

După cum se știe, Euclid se interesa de *obiecte* (puncte, plane, drepte, cercuri, triunghiuri, poligoane,...); Klein mută atenția și obiectivul pe *transformările* care deplasează obiectele, care le metamorfozează în plan și în spațiu. Această idee genială a lui Klein fusese deja pregătită de geometrii secolului al XIX-lea, care au descoperit și au dezvoltat mai mult sau mai puțin geometriile neeuclidiene. Klein a explicat în discursul său cum toate aceste geometrii se organizează grație *grupurilor* de transformări care le sunt caracteristice. Una din aceste transformări este și simetria care, așa cum am arătat și mai

înainte, a avut și are un impact deosebit asupra cercetărilor științifice pe tot parcursul sec. XX și poate și în continuare. Iată, în mod telegrafic, ce înțelegem și de fapt ce este **simetria** în matematică:

1. Dacă ρ este o relație binară definită pe mulțimea M , se zice că „ ρ este simetrică” dacă $x\rho y \Leftrightarrow y\rho x$. De exemplu: relația de egalitate în $\mathbb{R}$, de congruență, de paralelism, de perpendicularitate etc. sunt relații simetrice.

2. Dat fiind un punct O fix (în plan $\equiv \mathbb{R}^2$ sau în spațiu $\equiv \mathbb{R}^3$), oricărui punct M , facem să-i corespundă punctul M' , a.î.: a) M, O, M' sunt coliniare; b) $MO=OM'$.

În acest caz zicem că am definit o *simetrie centrală* (de centru O), pe care o notăm S_o . Fiecare punct din $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$ determină o simetrie centrală, iar compusa unui număr par de simetrii centrale este o *translație*, pe când compusa unui număr impar de simetrii centrale este o simetrie centrală. Se arată foarte ușor că *mulțimea simetriilor centrale și a translațiilor din $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$ formează grup în raport cu compunerea lor* (cititorul este invitat să încerce demonstrația acestei teoreme).

Evident că putem acum să obținem simetricele unui segment de dreaptă, unei drepte, unui unghi, unui triunghi, poligon, cerc, etc. sau în $\mathbb{R}^3$, simetricele unui poliedru, unei prisme, piramide, con, cub,...etc. Există o serie de proprietăți esențiale care se transmit prin simetria centrală de la figura (corpul) F la figura (corpul) F' .

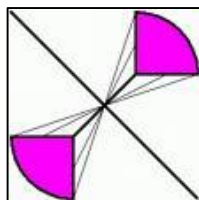
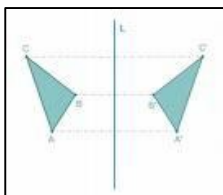
În ipoteza că $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$ sunt raportate la un reper cartezian ortogonal, atunci $M(x, y, z)$ se transformă în $M'(x', y', z')$ astfel că dacă $O(x_o, y_o, z_o)$ atunci $x' = x_o + x; y' = y_o + y; z' = z_o + z$.

Fiind dată o dreaptă (d) în $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$, definim *simetria în raport cu (d)* , transformarea care face ca oricărui punct M să-i corespundă punctul M' , a.î.:

- a) M' se găsește în planul definit de M și (d)
- b) dreapta MM' este perpendiculară pe (d)
- c) punctele M și M' sunt egal depărtate de (d) .

Această simetrie se numește *simetrie axială sau ortogonală sau de reflexie* (ogindire) și se bucură de o serie de proprietăți. O figură F se zice că are *simetrie axială*, dacă conține o dreaptă, care o împarte în două părți, astfel rotind cu 180° oricare din părți se suprapun peste cealaltă.

De exemplu:



Dacă considerăm un plan $(\pi) \in \mathbb{R}^3$ și facem ca oricărui punct $M \in \mathbb{R}^3$ să-i corespundă punctul M' , astfel încât:

a) $MM' \perp (\pi)$

b) punctele M și M' sunt egal depărtate de (π) ,

zicem că am definit o *simetrie în raport cu un plan* (numit plan de simetrie). Și această simetrie se bucură de o serie de proprietăți. Dacă $(\pi) \equiv \text{planul } xOy \text{ din reperul } Oxyz \text{ la care e raportat } \mathbb{R}^3$, atunci dacă $M(x, y, z)$; $M'(x, y, -z)$. Figurile (corpurile) care au un plan de simetrie se zic simetrice (omul are un plan de simetrie care trece prin nas, printre cei doi ochi etc., o sferă are o infinitate de plane de simetrie, cubul, cilindrul, conul circular drept etc.). De subliniat că simetriile axiale și cele în raport cu un plan nu formează grup.

Ideea de simetrie o întâlnim și în algebră, în analiza matematică, iar aparatul matematic cu care se studiază simetria este *teoria grupurilor* care a apărut și s-a dezvoltat în sec. XIX. Întâlnim în algebră *matrici simetrice* (unde $a_{ij} = a_{ji}$, *polinoame simetrice* de mai multe nedeterminate, *funcții simetrice* etc. Înțelegerea și promovarea ideii de simetrie în gândirea matematică ascute instrumentul matematic și de multe ori sugerează chei pentru rezolvări de probleme în multe situații complicate. Multe mistere ale geometriei lumii noastre pot fi înțelese și descifrate prin simetrie. În încheierea acestei telegrafice introduceri în *lumea simetriei*, propunem cititorului să reflecteze asupra următoarelor chestiuni:

1. De ce îmbrăcămintea bărbatului și a femeii au nasturii pe părți diferite încât nu pot fi schimbate ?
2. De ce inima apare în dreapta când ne privim în oglindă, pe când într-o poză apare în stânga (așa cum de fapt este) ?
3. De ce oglinzile inversează „dreapta și stânga” și nu „sus și jos”?

Pentru aprofundare invităm cititorul să ia în considerare un *studiu* temeinic a unor lucrări în limba română asupra simetriei. Îl asigurăm că va câștiga o nouă viziune asupra matematicii și chiar și asupra lumii.

- 1) Dumitru Smaranda, Nicolae Soare: „Transformări geometrice”(Ed. Academiei Române, București 1988)
- 2) Constantin Ionescu Bujor: „Elemente de transformări geometrice” (Partea întâi) (Biblioteca Soc.de științe mat.;Buc.1958)
- 3) Dorin Popescu, Constantin Vraciu: „Elemente de teoria grupurilor finite” (Ed.Științifică, Buc. 1986)
- 4) Mario Livio: „Ecuația care n-a putut fi rezolvată”, (Humanitas, București 2008)
- 5) Tiberiu Roman: „Simetria” (Ed.Tehnică, București 1963)
- 6) Florica Câmpan: „Povestiri cu proporții și simetrii”, (Ed. Albatros, București 1985).

SIMETRIA – O STRATEGIE ÎN REZOLVAREA PROBLEMELOR

IOAN DĂNCILĂ, BUCUREȘTI

La începutul secolului al XX-lea, celebrul matematician G. Ploia situa printre cele 21 de strategii de rezolvare a unei probleme și pe cea care indică utilizarea *simetriei*. În geometrie, *simetria* implică corespondența dintre puncte păstrând forma și dimensiunile figurilor. Este vorba despre acțiuni de translație, *rotire*, rostogolire care aranjează tipuri de simetrii.

În algebră, întâlnim situații de simetrie azunci când valorile pot fi schimbate între ele, dar rezultatul rămâne același. *Palindroamele* și *polinoamele simetrice* sunt două exemple.

În rezolvarea unei probleme de geometrie, strategia de utilizare a simetriei este sugerată de următoarele indicii:

- problema include transformări;
- simetria limitează numărul de cazuri ce ar trebui luate în considerare;
- desenul are sau „cere” simetrie.

Vom încerca să punem în evidența situații în care recursul la simetrie devine important dacă nu esențial:

1. Multă vreme pe tichetele de autobuz și tramvai era desenat un careu de 3×3 căsuțe, dispus în corespondență cu aparatul de compostat din mijloacele de transport în comun. Se realiza validarea unui tichet prin executarea a 4 sau 5 găuri în acest careu. În care dintre cele două cazuri cu 4 sau 5 găuri numărul variantelor este mai mare?

O singură observație, legată de simetria situațiilor ne duce la răspunsul corect. Când sunt perforate 4 dintre cele 9 căsuțe rămân 5 neperforate, iar când sunt perforate 5 rămân 4 neperforate. Există așadar o anumită simetrie între cele două tipuri de perforări și răspunsul este: numărul variantelor cu „4” este egal cu numărul variantelor cu „5”

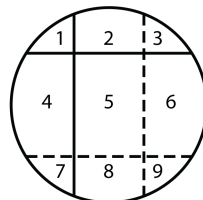
2. Care este mai mare, numărul numerelor palindromice din mulțimea numerelor naturale de 5 cifre sau numărul numerelor palindromice din mulțimea numerelor naturale de 6 cifre?

Nu este nevoie de nici un calcul. Numerele de forma $\overline{abcba}$ sunt în tot atâtea variante distincte ca și numerele $\overline{abccba}$.

Cunoașterea simetriei figurilor geometrice se dovedește benefică în studierea strategiei câștigătoare.

3. Doi copii au cumpărat o tablă de ciocolată alcătuită din 6×9 bucățele. Convin să rupă pe rând, fiecare, o bară alcătuită dintr-un rând de bucățele. Cum trebuie să rupă prima bară, cel care începe, „împărțirea” astfel încât să își asigure mai multe bucățele decât partenerul său?

Dacă numai lăcomia îi va determina acțiunea, primul copil va rupe pentru început cea mai lungă bară posibilă de câte 9 bucățele. Greșit! Celălalt copil va repeta gestul său și în final va obține 3 bare de câte 9×1 bucățele. Dacă însă acțiunile îi vor fi determinate de cunoștințe de geometrie în general și de cunoștințe de simetrie în particular, primul copil va rupe la început o bară de 1×6 . Rămâne din dreptunghiul inițial un dreptunghi de 6×8 (cu două axe de simetrie). Această situație îi va permite ca repetând de fiecare dată acțiunea partenerului să asigure împărțirea tablei rămase în câte 24 de bucățele pentru fiecare. În plus el are o bucată inițială de 1×6 .

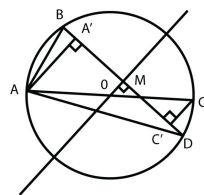


4. *Piciul și Piticul au împărțit un tort circular prin două tăieturi perpendiculare (care nu trec prin centrul tortului). Piticul a ales cea mai mare și cea mai mică dintre bucăți, iar celelalte două părți le-a luat Piciul. Arătați că alegerea făcută de Pitic îi este avantajoasă.*

Conform alegerii, Piticul a luat bucățile 1,5,6,8,9 iar Piciul bucățile 2,3,4 și 7. Cum în perechile simetrice 1 cu 3, 6 cu 4, 8 cu 2, și 9 cu 7 bucățile sunt egale, înseamnă că Piticul este avantajat cu bucata din centru, bucata nr.5.

5. *Fie $ABCD$ un patrulater înscritibil, cu diagonala AC ca diametru. Să se arate că proiecțiile laturilor AB și CD pe diagonala BD sunt congruente.*

Fie $A'B$ proiecția laturii AB pe diagonala BD , iar DC' proiecția lui CD pe aceeași diagonală. Cu O notăm centrul cercului iar cu M proiecția lui O pe BD . Evident M este mijlocul coardei BD , OM fiind conținută în diametrul perpendicular pe BD . Față de acest diametru perpendicular în M pe BD , punctele B și D sunt simetrice, deci $BM=MD$ și $MA'=MC'$ (AA' și CC' sunt drepte simetrice). Cum și diferențele $MB-MA'$ și $MD-MC'$ sunt egale rezultă că $BA'=C'D$.

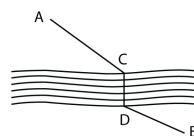
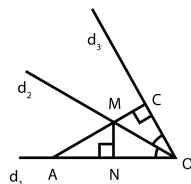
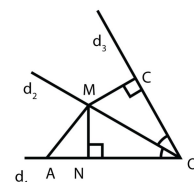


6. *Se dau două drepte distincte d_1 și d_2 cu $m(\angle d_1; d_2) < 45^\circ$, concurente în O și un punct $A \in d_1$. Găsiți pe d_2 un punct M și pe d_1 un punct N , astfel încât suma $AM+MN$ să fie minimă.*

Cristian Bergthaler, Germania

Dacă poziția punctului pe d_2 ar fi cunoscută, cea mai scurtă distanță de la M la d_1 ar fi perpendiculara din M pe d_1 . Fie MN , $N \in d_1$ această perpendiculară.

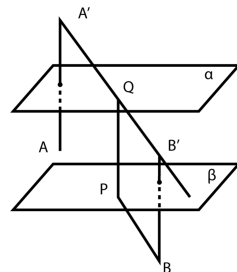
Dacă construim simetricul lui d_1 față de d_2 și luăm în C perpendiculara din M pe d_3 atunci conform proprietății bisectoarei (aici d_2) a unghiului format de dreptele d_1 și d_3 : $AM+MN=AM+MC$. Suma $AM+MC$ este minimă când punctele A, M, C sunt coliniare și AC este minim, deci $AC \perp d_3$. Așadar pentru determinarea punctelor M și N se construiește simetrica d_3 a dreptei d_1 față de d_2 , apoi din punctul A perpendiculara AC ($C \in d_3$) care taie pe d_2



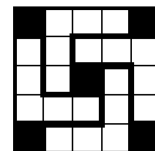
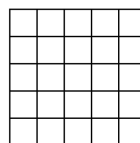
în punctul M . Din M ducem perpendiculara pe d_1 care o taie în N .

7. *Donă localități A și B sunt situate de o parte și de alta a unui râu ca în desenul alăturat. Cele două orașe urmează să fi legate printr-un pod CD , perpendicular pe râu, astfel încât lungimea drumului de la A la B să fie cea mai scurtă posibilă și rezolvarea ei, utilizând simetria, își găsește o generalizare în spațiu în următoarea problemă.*

8. *Fie α și β două plane paralele, iar A și B două puncte în spațiu. Să se determine punctele $M \in \alpha$ și $N \in \beta$, astfel încât suma $AM+MN+NB$ să fie minimă. Vom discuta doar în cazul în care A se află între planele α și β și punctul B*



este situat de cealaltă parte a planului β în raport cu punctul A. Fie d distanța dintre planele α și β . Construim A' simetricul lui A față de planul α și punctul B' situat pe perpendiculara din B pe planul β la o distanță d de punctul B. Dreapta $A'B'$ înțeapă planul α în Q. Proiectăm în P punctul Q pe planul β . Se observă că $PQ \perp BB'$ și $PQ \equiv BB'$ deci $BB'QP$ este paralelogram așa că $BP = QB'$. Cea mai scurtă linie frântă AMNB se realizează când avem simultan $MN = d$, iar $AM + NB$ este egală cu segmentul $A'B'$; deci când $\{M\} = A'B' \cap \alpha$ și N este piciorul perpendicularei din M pe planul α .



9. Care este numărul maxim de piese de forma (vezi figura) care pot fi aranjate în pătratul alăturat fără să se suprapună? Soluția „4 piese” este destul de vizibilă pentru un ochi format.

În finalul articolului vom propune două probleme cititorului.

10. Cu centru în vârful pătratului MNPQ, cu latura de 5 cm se construiește un pătrat de latură 3 cm. Desenatorul a uitat să precizeze înclinarea unei laturi a pătratului construit față de o latură a pătratului MNPQ. Aflați suprafața comună a celor două pătrate.

11. Pe diametrul AB al unui cerc de centru O se ia un punct $C \in (OA)$ și pe circumferință punctele M și N situate de o parte a dreptei AB astfel încât $\angle ACN \equiv \angle ACM$. Demonstrați că $CM = CN$.

Bibliografie

*** *Colecția Gazeta Matematică 1964-1980*

N. Agahanov, O. Podlipski : *Olimpiade matematice rusești*, Ed. Gil, 2004

Ioan Dăncilă: *Matematica gimnaziului între profesor și elev*, Ed. Aramis, 2001

Eduard Dăncilă, Ioan Dăncilă: *Matematica servește!* Ed. Erc Press, 2007

Știați că *...

- ☐ Întemeietorul logicii ca știință a fost marele savant al antichității Aristotel ?
- ☐ Printre marii matematicieni creatori de logică s-au numărat și :
 - o George Boole - matematician irlandez, inventatorul calculului logic;
 - o Bernard Russel – filozof englez, creator al celui mai vestit tratat de logică matematică;
 - o David Hilbert – matematician german, șeful școlii formaliste;
 - o G.C. Moisil – părintele logicii matematice în România.

* I. Dăncilă: *Matematica gimnaziului între profesor și elev*, Ed. Aramis, București, 2001

ASUPRA CALCULULUI UNOR UNGHIIURI ÎNTR-O PIRAMIDĂ REGULATĂ

PROF. OPREA DUMITRU, Școala Dragodănești

PROF. MIHAI MĂDĂLIN AUREL

În spațiu ($\mathbb{R}^3$) după cum se știe sunt mai multe tipuri de unghiuri: unghiul dintre 2 drepte, unghiul dintre o dreaptă și un plan, unghiul dintre 2 plane (unghi diedru), dintre 3 plane care au un punct comun (unghi triedru), unghiuri poliedre etc.

Astfel de unghiuri găsim în orice poliedru, iar calculul lor se face de la situație la situație. În cele ce urmează ne propunem să exemplificăm modul cum se calculează două unghiuri în cazul unei piramide regulate.

1. Aflarea unghiului dintre 2 fețe laterale opuse:

Fie fețele laterale opuse (VAF) și (VCD) ale piramidei hexagonale regulate VABCDEF (Fig.1) și ne punem problema aflării unghiului diedru ale cărei fețe sunt (VAF) și (VCD).

Soluție: Fie $(a) = (VAF) \cap (VCD)$;

Cum $AF \parallel CD \parallel (a)$ și $VN \perp (a)$; $VM \perp (a)$

rezultă $\angle((VAF), (VCD)) = \angle(VM, VN) = \angle MVN$

În $\triangle ABC$ cu $VM = VN = a_p$; $MN = 2a_p$ și

$h = VO \perp MN$,
avem

$$\sigma(\triangle VMN) = \frac{MN \cdot VO}{2} = \frac{VN \cdot VM \sin(\angle MVN)}{2}.$$

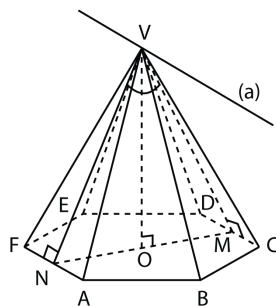


Fig. 1

$$\text{Deci } \sin(\angle VMN) = \frac{2ha_p}{a_p^2}.$$

2. În piramida hexagonală regulată VABCDEF (Fig.2) să aflăm unghiul dintre fețele laterale (VAF) și (VBC).

Soluție: În hexagonul ABCDEF, avem $\{H\} = AF \cap BC$ și $\triangle ABH = \text{echilateral}$. De asemenea se observă că $OABH = \text{romb}$; deci $AB \perp OH$ și $AB \cap OH = \{Q\}$.

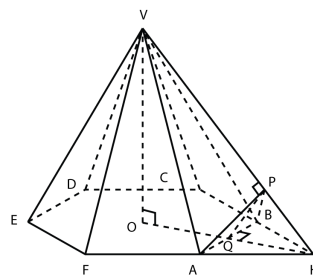


Fig. 2

Din

$$[H \in VBC \text{ și } V \in (VAF) \text{ și } V \in (VBC) \text{ și } H \in (VAF)] \Rightarrow (VAF) \cap (VBC) = VH.$$

Observăm că: $\triangle VAH = \triangle VBH \Rightarrow \angle AVH = \angle BVH$.

Ducem $AP \perp VH$ și observăm că:

$$\triangle AVP = \triangle BVP \Rightarrow \angle(APV) = \angle(BPV) = 90^\circ \Rightarrow BP \perp VH.$$

De asemenea avem:

$$\left. \begin{array}{l} (VAF) \cap (VBC) = VH \\ AP \perp VH; AP \subset (VAF) \\ BP \perp VH; BP \subset (VBC) \end{array} \right\} \Rightarrow \angle((VAF), (VBC)) = \angle(AP, BP) = \angle APB.$$

În $\triangle VOH$, avem $\angle O = 90^\circ$; $VO = h$; $OH = 2a_{bazei}$ și putem calcula ipotenuza VH. Se

observă că $VP \perp AP$; $VP \perp BP \Rightarrow VP \perp (APB)$ cu

$QPC(APB)$; rezultă $VP \perp QP$ și deci $QPHN$. În

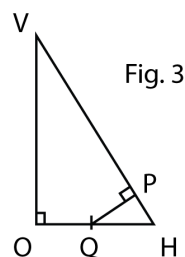
$\triangle VOH$ (Fig.3) avem $QP \perp VH$ și deci $\triangle HPQ \sim \triangle HOV$.

Scriind șirul rapoartelor egale: $\frac{QP}{VO} = \frac{HQ}{VH} = \frac{HP}{HO}$ se poate calcula QP.

Din $[AP] \equiv [BP]$ și $PQ =$ mediana lui AB, rezultă $PQ \perp AB$. În

$\triangle APQ$ (cu $\angle Q = 90^\circ$) putem afla latura AP.

$$\text{Deci } \sigma(\triangle APB) = \frac{PQ \cdot AB}{2} = \frac{AP \cdot BP \sin(\angle APB)}{2} \Rightarrow \sin(\angle APB) = \frac{PQ \cdot AB}{AP^2}.$$



Principiul lui Dirichlet*

Motto: „Dacă punem șapte iepuri în trei cuști, cel puțin una va conține mai mult de doi iepuri”
G. Dirichlet

Acest principiu foarte simplu, numit uneori în literatura de specialitate „al cuștilor de porumbei” este nejustificat neglijat în matematica elementară. El este indispensabil în modelarea gândirii matematice a elevului de gimnaziu. Matematic, acest principiu se exprimă astfel: dacă avem $s \geq mr + 1$ obiecte plasate în m cutii, există cel puțin o cutie care conține $q \geq r + 1$ obiecte.

Probleme

1. Fie 1000 de numere naturale distincte cu suma 1 000 998. demonstrați că printre ele se află cel puțin două numere impare.
2. În interiorul unui triunghi echilateral cu latura de 3 sunt situate 10 puncte. Să se arate că există cel puțin o pereche de puncte a căror distanță dintre ele este cel mult egală cu 1.
3. Într-un acvariu cu dimensiunile de 2 dm x 3dm x 5 dm sunt 31 de peștișori. Să se arate că în orice moment există doi peștișori între care este o distanță mai mică de 17,4 cm.

* I. Dăncilă: Matematica gimnaziului între profesor și elev, Ed. Aramis, București, 2001

NAPOLEON ȘI ... GEOMETRIA *

IOAN DĂNCILĂ, BUCUREȘTI

Motto: "Înaintarea și perfecționarea matematicilor sunt întinse legate de prosperitatea statului"

Napoleon I



S-au scurs aproape două secole de când doi dintre cei mai mari matematicieni francezi ai acelor vremuri aveau să exclame uimiți:

- Majestate, trebuie să vă mărturisim că ne-am fi așteptat la orice din partea unui împărat, ... mai puțin la o lecție de geometrie !

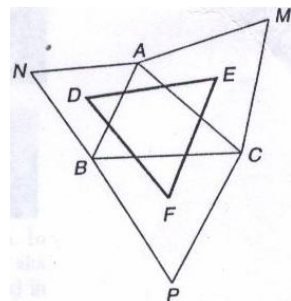
Iar cel care reușise să-i uimească pe cei doi, nu era altul decât viitorul învingător de la Austerlitz, Jena, Friedland, reorganizatorul și constructorul Franței postrevoluționare, intrat în conștiința concetățenilor săi și în istoria lumii sub numele de **Napoleon I.**

Protector al artelor și științelor, Napoleon I iubea mult matematica. Iată ce proprietate descoperise el și o prezenta cu emoție celor doi matematicieni:

„Dacă ABC este un triunghi oarecare, iar M, N, P puncte în planul triunghiului astfel încât triunghiurile ABN , ACM și BCP sunt echilaterale și exterioare triunghiului dat, atunci centrele acestor triunghiuri alcătuiesc un triunghi echilateral”.

După campania din Italia, cel care avea să-l impresioneze prin ușurința cu care rezolva problemele de geometrie, pe însuși marele geometru Gaspard Monge, le-a propus matematicienilor francezi probleme de construcții geometrice numai cu rigla sau numai cu compasul.

Acolo, în Italia, în timpul dintre două bătălii, citise cartea matematicianului L. Mascheroni „Geometria del Compasso”. Imediat și-a pus problema:



Cum împărțim în patru părți congruente un cerc dat utilizând numai compasul ?

Și a rezolvat-o surprinzându-și încă o dată contemporanii.

Iată o altă problemă pe care Napoleon ar fi rezolvat-o, suntem siguri, cu ușurință:

„Utilizând numai rigla negradată să se împartă o diagonală a unui paralelogram dat în trei părți congruente.”

Dar dumneavoastră ?

* I. Dăncilă: Matematica gimnaziului între profesor și elev, Ed. Aramis, București, 2001

