
PROBLEME PROPUSE PENTRU CICLUL GIMNAZIAL²⁾

Clasa a V - a

1. Un pătrat are perimetrul de 20 cm. Suprafața lui se decupează în două dreptunghiuri dintre care unul are perimetrul de 16 cm. Ce perimetru are al doilea dreptunghi?
Nicoleta Nechita, Iași
2. Suma a 3 numere naturale este 316. Dacă împartim al doilea număr la primul obținem catul 3 și restul 18. Împărțind al treilea număr la al doilea se obține catul 2 și restul 12. Să se determine cele 3 numere.
Eugen Niță, Ploiești
3. Într-o urnă sunt de 4 ori mai multe bile roșii decât bile negre. Se mai pun în urnă 2 bile și se constată că numărul bilelor roșii este de 2 ori mai mare decât numărul bilelor negre. Câte bile din fiecare fel au fost inițial în urnă?
Loredana Nedelcu, Ploiești
4. Suma a două numere este 143, iar diferența lor este egală cu șesimea numărului mai mic. Să se afle cele două numere.
Loredana Nedelcu, Ploiești
5. Să se determine numărul $\overline{xy}$ știind că $\overline{20xy09} + \overline{xy2009} + \overline{2009xy} = 665544$
Dan Coma, Vădăstrița, Olt
6. Câtul împărțirii a două numere naturale este 5, iar restul este 15. Adunând deîmpărțitul, împărțitorul, restul și câtul obținem 230. Care sunt numerele?
Petre Constanța, Ploiești
7. Se scriu numerele naturale nenule în ordine crescătoare: 1, 2, 3, Determinați a 36 519 –a cifră din șir.
Daniela Badea, Ploiești
8. Să se determine patru numere naturale care îndeplinesc condițiile:
a) suma lor este 320;
b) adunând la primul număr 3, scăzând din al doilea număr 3, înmulțind al treilea număr cu 3 și împărțind al patrulea număr la 3 obținem rezultate identice.
Luminița Corneci, Vălenii de Munte
9. Aflați numerele de două cifre care sunt de cinci ori mai mari decât suma cifrelor lor.
Nicolae Scuratorovschi, Constanța.
10. Determinați 3 numere naturale știind că produsul primelor două este 126, produsul ultimelor două este 108, iar suma dintre primul și ultimul este 26.
Eugen Niță, Ploiești
11. Să se afle numărul x din egalitatea:
$$[(207 + 206 \cdot 207) : (207 \cdot 208 - 207)] \cdot x = 111 \cdot 90 : (111 + 222 + 333 + \dots + 999)$$

Liviu Ardelean, Sibiu
12. Câte numere naturale de trei cifre au produsul cifrelor egal cu 18?
Gheorghe Megelea, Bușteni

²⁾Se primesc soluții până la 25 octombrie 2009

Clasa a VI - a

1. Să se afle $A = \overline{aabc}$ divizibil cu 45 știind că $B = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ se divide cu 57.
Iuliana Trașcă, Scornicești, Olt
2. Scrieți numărul 29^{2009} ca o sumă de două pătrate perfecte, distincte.
Dan Coma, Vădăstrița, Olt
3. Fiind date punctele coliniare A,B,C,D în această ordine, astfel încât $3AB=2CD$, $AD=2AC$ și $BC=6$ cm, să se calculeze lungimile segmentelor $[AB]$, $[CD]$ și distanța dintre mijloacele segmentelor $[AB]$, $[CD]$.
Rădulescu Mariana, Mioveni, Argeș
4. Să se determine toate numerele naturale de două cifre $\overline{ab}$ știind că $\overline{ab} + \overline{ba}$ este pătrat perfect și $\overline{ab} - \overline{ba}$ este pătrat perfect.
Anda Marcu, Ploiești
5. Comparați 123^{321} cu 321^{123} .
Nicolae Gârbovean, Ploiești
6. Să se arate că suma patratelor a patru numere naturale consecutive nu poate fi pătrat perfect.
Daniela Badea, Ploiești
7. Pe semidreapta $[OP]$ se consideră punctele: $A_0, A_1, \dots, A_{2008}$ și punctele: $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ astfel încât: $OA_0=2$ mm, $OA_1=7$ mm, $OA_2=12$ mm, ..., $OA_{2008}=10042$ mm; $OB_0=5$ mm, $OB_1=11$ mm, $OB_2=17$ mm, Se cere:
 - a) Calculați câți cm sunt între punctele O și A_{22} .
 - b) Calculați $S=OA_0+OA_1+OA_2+\dots+OA_{2008}$.
 - c) Determinați n pentru care B_n este cel mai apropiat de A_{2008} .*Liviu Ardelean, Sibiu*
8. Să se determine numerele naturale a,b,c , direct proporționale cu 2,3,4, știind că: $a,(b)+b,(c)+c,(a)=20$
Cornel Țichindelean, Sibiu
9. a) Fie AB un segment și $P \in [AB]$. Care este poziția lui P astfel încât:
 - i) $AP - BP = \text{minim}$;
 - ii) $AP - BP = \text{maxim}$.
 b) Pe dreapta OM luăm punctele, în același sens, A_1 de două ori mai depărtat de O decât M, apoi A_2 de trei ori mai depărtat de O decât M, apoi A_3 de patru ori mai depărtat de O decât M etc. Aflați lungimea segmentului OM știind că $OA_1 + OA_2 + OA_3 + \dots + OA_n = 180$ cm , iar lungimea lui $[OM]$ este număr natural.
Liviu Ardelean, Sibiu
10. Un număr natural de forma $\overline{abcd}$ se numește *senzațional* dacă $2 \cdot \overline{ab} = \overline{cd}$.
 - a) Câte numere *senzaționale* există?
 - b) Arătați ca orice număr *senzațional* se divide cu 51.*Ioana Crăciun și Gheorghe Crăciun, Ploiești*
11. Într-un bloc sunt apartamente cu 2, respectiv 4 camere, în total 51 apartamente și 140 camere. Să se afle câte apartamente de fiecare fel sunt?
Eugen Niță, Ploiești

Clasa a VII - a

1. Simplificați fracția $\frac{2^x \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{x+1} + 2^{x+2} \cdot 3^{x+1}}{7^{x+1} + 7^x}$, $x \in \mathbf{N}$, pentru a obține o fracție ireductibilă.
Liviu Ardelean, Sibiu
2. Aflați numărul natural x din proporția $\frac{1}{a} = \frac{343}{x}$, unde $a = \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 19} + \dots + \frac{1}{43 \cdot 49}$.
Liviu Ardelean, Sibiu
3. Să se determine numerele prime a, b, c știind că $(a-2)! + (2b)! = c! - 1$.
Petru Năchilă, Ploiești
4. Demonstrați că numărul 29^n , $n \in \mathbf{N}^*$ poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte nenule.
Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești
5. Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $11a + 6b = 5c$ arătați că 110 divide produsul $(a+b)(b+c)(c+a)$.
Vasile Coman, Vălenii de Munte
6. Fie $\triangle ABC$ cu unghiurile $\angle B$ și $\angle C$ ascuțite, AD înălțimea din A ($D \in BC$) și AE bisectoarea $\angle BAD$ ($E \in BC$). Demonstrați că $AC \equiv CE$ dacă și numai dacă $\triangle ABC$ este dreptunghic.
Daniela Badea, Ploiești
7. În jurul unui punct O sunt situate unghiurile AOB , BOC , COD și DOA astfel încât $m(\angle BOC) = 2m(\angle AOB)$, $m(\angle COD) = 3m(\angle AOB)$ și $m(\angle DOA) = 2m(\angle BOC)$.
a) Să se arate că punctele B, O, D sunt coliniare.
b) Calculați măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor AOB și DOA .
c) Dacă $[OE]$ este biseectoarea lui BOC și, în plus, $[OE] \equiv [OD] \equiv [OA]$, arătați că triunghiul ADE este isoscel.
Luminița Corneci, Vălenii de Munte
8. Să se arate că numărul:
$$N = \frac{27000}{19} \left(\frac{1}{1+2+3+\dots+100} + \frac{1}{1+2+3+\dots+101} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+1999} \right)$$
este cub perfect.
Luminița Corneci, Vălenii de Munte
9. Fie D un punct al dreptei AB , astfel încât $D \neq B$. Punctul C este exterior dreptei AB , iar P este un punct al reuniunii semidreptelor $[CA]$, $[CB]$ și $[CD]$ pentru care triunghiurile APB și BCD au aceeași arie. Să se afle în câte poziții distincte se poate situa punctul P .
Ștefan Smarandache, București
10. Să se demonstreze că fracția $\frac{n^2 - n + 65}{n^2 - n + 1}$ este ireductibilă pentru orice număr natural nenul n .
Dana Paponiu, Drobeta Turnu Severin

Clasa a VIII -a

1. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots - \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008} - \frac{1}{2009} + \frac{1}{2010} < 0,2$$

Iuliana Trașcă, Scornicești, Olt

2. Determinați valoarea $|x - y|$ unde $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care avem egalitatea:

$$x(x-2y) + (y-1)(y+1) = 256^{48} - 32 \cdot 2^{188}$$

Maria Negrilă și Anton Negrilă, Ploiești

3. Calculați cea de-a treia cifră după virgulă a numărului:

$$N = \frac{1+2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{2+3}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2007+2008}{2007^2 \cdot 2008^2}$$

Gheorghe Achim, Mizil

4. Să se determine numărul $\overline{xy}$ știind că $x^{x-1} = \overline{yyyy}$.

Cătălin Năchilă, Ploiești

5. Pe planul pătratului ABCD se ridică perpendicularele AA' și CC' de aceeași parte a planului astfel încât $OA' \perp C'A'$, unde O centrul pătratului ABCD.

a) Demonstrați că $C'A' \perp (BA'D)$;

b) $AD = AA' = \sqrt{2}$ cm, determinați lungimea segmentului CC' și apoi calculați o funcție trigonometrică a unghiului planelor ABC și BA'C'.

Anda Marcu, Ploiești

6.
7. În $\triangle ABC$ dreptunghic cu $m(\angle A) = 90^\circ$ fie D piciorul înălțimii din vârful A pe ipotenuza BC, iar E și F proiecțiile punctului D pe catetele AB, respectiv AC. Fie G intersecția dintre dreptele BF și CE. Să se arate că $A_{BGC} = A_{AEGF}$.

Daniela Badea, Ploiești

8. Lungimile laturilor unui triunghi verifică relația: $5b^2 + 2c^2 \leq 2(ab - ac + 2bc)$.

a) Să se arate că triunghiul este dreptunghic sau obtuzunghic.

b) În cazul triunghiului obtuzunghic să se calculeze aria sa în funcție de R, raza cercului circumscris.

Stefan Smarandache, București

9. Să se arate că:

$$2(x^4 + y^4 + z^4) \geq x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y), \text{ oricare ar fi numerele reale } x, y, z.$$

Stefan Smarandache, București

10. Fie pătratul ABCD și E mijlocul laturii [AB]. Dreapta DE intersectează

perpendiculara în A pe [AC] în punctul F. Să se arate că punctele C, B, F sunt coliniare.

Luminița Corneci, Vălenii de Munte

