PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU [4)]

Clasa a IX-a

1. Fie a,b>0.

a. Să se demonstreze că $A=(x+y)\left(\frac{1}{ax+by}+\frac{1}{bx+ay}\right)\geq\frac{4}{a+b}$ pentru orice x>0,y>0.

b. În ce condiţii avem $A=\frac{4}{a+b}$?

Cătălin Năchila, Ploieşti

2. a. Să se rezolve în numere întregi ecuaţia $x^4+x^2+2=y^2$.

b. Să se demonstreze ca ecuaţia $x^2+y^3+z^4+t^5=v^8$ are o infinitate de soluţii in $(N^*)^5$.

Petre Năchila, Ploieşti

3. Fie $n\in N^*$. Să se rezolve inecuaţia:

$$|x-1|+|x-2|+...+|x-2n|\leq n^2$$

Petre Năchila, Ploieşti

4. Să se demonstreze că pentru orice $x,y\in R$, avem

$$\sqrt{x^2+y^2-4y+4}+\sqrt{x^2+y^2+2x+2y+2}\geq 2\sqrt{10}$$

Cătălina Isofache, Ploieşti

5. Se stie că pentru orice punct P din interiorul triunghiului ABC, segmentele (PA), (PB), (PC) reprezintă laturile unui triunghi. Să se precizeze natura triunghiului ABC.

Corneliu Voicilas, Ploieşti

6. Fie $n,p\in N^*$ si $A_n(p)=\sum_{k=1}^{np+p-1}\left[\frac{k}{p}\right], B_n(p)=\sum_{k=1}^{np+p-1}\left\{\frac{k}{p}\right\}$.

a. Să se demonstreze ca $A_5(3)=B_{14}(7)$.

b. Să se determine n si p dacă $A_n(p)=17\cdot B_n(p)$.

Claudiu Militaru, Ploieşti

7. Fie x,y,z>0 astfel încât $x\cdot y\cdot z=1$ si $x+y+z=3$. Să se demonstreze că

$$\frac{1}{x^4(y+z)}+\frac{1}{y^4(x+z)}+\frac{1}{z^4(x+y)}\geq\frac{3}{2}.$$

Cătălin Năchila, Ploieşti

8. Să se arate că dacă p;p+1şi p+4 cu $p\in N$ sunt numere prime, atunci p=3.

Miron Oprea

[4)] *Se primesc soluţii până la 10 noiembrie 2009*

Clasa a X-a

1. Să se rezolve ecuația $\left\{\frac{(n+1)\sin x-1}{n}\right\}=\left\{\frac{n\sin x+1}{n+1}\right\}$, unde n$\in N, n\geq 2$. Prin {a} s-a notat partea fracționară a numărului real a.

Cătălin Năchila, Ploiești

2. Se consideră ecuația $x^{\log_n(n+1)}-(n+2)\log_n x+n^{\log_n x}-2=0$, unde $n\geq 2$.

a. Să se determine numarul maxim de solutii reale ale ecuației.
b. Dați un exemplu de ecuație de tipul considerat care sa aibă doua soluții reale.

Petre Năchila, Ploiești

3. Fie numerele complexe nenule z=r(cosα+isinα), α∈[0,2π). Fie punctele A(z), B($\bar{z}$), C$\left(\frac{z^2}{\bar{z}}\right)$ în reperul ortonormal xOy.

a. Considerând punctul A fixat, să se construiasca punctele B si C.
b. Să se determine unghiul făcut de vectorii $\overrightarrow{CB}$ si $\overrightarrow{CA}$.
c. Să se determine multimea punctelor A pentru care triunghiul ABC este echilateral.

Prelucrare, Cătălin Năchila, Ploiești

4. Fie n$\in N, n\geq 2$ si fie ecuația $\left(1+i\bar{z}\right)^n-\left(1-i\bar{z}\right)^n=0$ (1), unde z∈C.

a)Să se demonstreze că pentru orice z∈C soluție a ecuației (1) avem $\left|1+i\bar{z}\right|=\left|1-i\bar{z}\right|$.

b)Să se rezolve ecuația (1).

Prelucrare, Petre Năchila, Ploiești

5. Să se determine x>1, y>1 dacă $\lg\frac{1000}{xy}\cdot\lg x\cdot\lg y=1$.

Claudiu Militaru, Ploiești

6. Fie m,n∈N*, m>n, p,q∈R. Fie ecuația $z^m+p\cdot z^n+q=0$.

a)Să se demonstreze că dacă m=2n, p+q=-1 si q>0, atunci ecuația are doua sau patru rădacini reale.

b)Să se demonstreze ca dacă p+q=-2, p>0, atunci toate rădacinile ecuației au modulul mai mare ca 1.

Claudiu Militaru, Ploiești

7. Pentru orice punct P din interiorul unui tetraedru notăm cu s(P) suma distanțelor de la P la fețele tetraedrului. Dacă în interiorul tetraedrului există punctele distincte P_i, $i=\overline{1,4}$ astfel încât $s(P_1)=s(P_2)=s(P_3)=s(P_4)$, să se demonstreze ca fețele tetraedrului au aceeași arie.

Corneliu Voicilas, Ploiești

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in N, n \geq 2$ şi fie funcţia $f_n : [0,\infty) \to R$ definită prin $f_n(0)=0$ si $f_n(x)=2x^n\ln x - x^n$, $x>0$.

a. Să se studieze derivabilitatea funcţiei f_n.
b. Fie $x_n>0$ soluţia ecuaţiei $f'_n(x)=0$. Să se demonstreze că şirul (x_n) este convergent şi să se determine limita şirului.
c. Să se demonstreze ca $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = -\infty$.

Prelucrare, Petre Năchilă

2. Demonstraşi că pentru orice $n \in N^*$ exist matricele $A,B,C \in M_2(Z)$ astfel încât $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n+1 & 1 \end{pmatrix}$ si $C^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n+1 & 1 \end{pmatrix}$.

Petre Năchila, Ploieşti

3. Fie $m \in N^*$ fixat si fie $a \in [0,1]$. Să se studieze convergenţa şirului (x_n) definit prin $x_0=a$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n^m - x_n^{m+1}}, \forall n \in N^*$.

Cătălin Năchila, Ploieşti

4. Fie sirul având termenul general $x_n = \sqrt{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{2n}....\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}, n \in N, n \geq 2$.

a)Să se demonstreze că $x_n < \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}}, \forall n \geq 2$.

b)Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{\pi}{2n}\cdot x_n\right)$.

Cătălina Isofache, Ploieşti

5. Fie matricea $A \in M_2(C)$ şi mulţimea $H=\{A^n \mid n \in N^*\}$. Să se demonstreze că H este mulţime finită dacă şi numai dacă $A^2=O_2$ sau există $p \in N, p \geq 2$, astfel încât $A^p=A$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

6. Fie $A \in M_3(C)$.

a)Să se demonstreze că $T_r(A^2)=(T_rA)^2-2T_rA^*$.
b)Dacă $A^3=I_3$, să se demonstreze că $(T_rA)^2=3T_rA^*$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

7. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(n+3)...(3n-1)}{(n+2)(n+4)...(3n)}$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

Clasa a XII-a

1. Să se arate că polinomul $f(x)=x^{n+1}\cos(n-1)\alpha - x^n\cos n\alpha - x\cos\alpha + 1$ cu $n\in\mathbb{N}$ se divide prin polinomul $g(x)=x^2-x\cos\alpha+1$ şi să se afle câtul.

Miron Oprea, Ploieşti

2. Fie $f:[1,\infty)\to R$ o funcţie descrescătoare pentru care există $f(x)=0$ şi fie $F:[1,\infty)\to R$ o primitiva a lui f astfel încât F(1)=0.

a. Să se demonstreze că şirul $(a_n)_{n\geq 1},\ a_n = f(1)+f(2)+...+f(n)-F(n)$ este convergent având limita în intervalul [0,f(1)).

b. Să se studieze cazul particular $f(x)=\frac{1}{x}$.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

3. Să se demonstreze că:

a) Nu există $f:R\to R$ care sa admită o primitiva $F:R\to R$ astfel încât xf(x)=e^x-F(x), x∈R si F(1)=1.

b) Există o infinitate de functii $f:R^*\to R$ care admit o primitivă $F:R^*\to R$ astfel încât xf(x)= e^x -F(x), x∈R* si F(1)=1.

Cezar Apostolescu, Ploieşti

4. Să se determine funcţiile $f:R\to R$ care admit primitive şi f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy, x,y∈R.

Cătălin Năchilă, Petre Năchilă, Ploieşti

5. Să se determine primitivele funcţiilor:

a. $f:(0,\infty)\to R,\ f(x)=\dfrac{1}{(x+2)^5-x^5-32}$;

b. $f_n:R\to R,\ f_n(x)=\dfrac{2x^3-3x^2+7x-3}{(x^2-x+1)^n}, n\in N^*$.

(***)

6. Fie $M=\left\{A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} \middle| a,b,c,d\in Z, |ad|+|bc|=2, |ab|+|cd|=0\right\}$.

a.Să se determine numarul elementelor mulţimii M.

b.Să se precizeze dacă (M,·) este grup.

c.Determinaţi doua mulţimi G⊂M astfel încât (G, ·) să fie grup.

Catalin si Petre Năchila, Ploieşti

7. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_{-\pi}^{\pi}|a\cos t+b\sin t|^n\,dt},\ a,b\in R$.

Corneliu Voicilas, Ploieşti

20 QUESTIONS IN 20 LANGUAGES: ANSWERS

Kranevo, Bulgaria, August 2009

I. Kortezov, Sofia

1. [1DE] Durch wie viele verschiedene natürlichen Zahlen (einschließlich 1 und 2009) ist 2009 ohne rest teilbar?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

How many different positive divisors does 2009 have?

Answer C. We have 2009=7.7.41, so its divisors can have as factors only 7 (to the power 0, 1 or 2) and/or 41 (to the power 0 or 1). Thus there are 3.2=6 choices.

2. [2SR] Марко је требало да подели неки број са 7. Уместо да подели са 7 он је од тог број одузео 7 и добил резултат 2009. Који резултат би Марко добио да није погрешио?

A) 288 B) 287 C) 286 D) 285 E) 284

Marko needed to divide a number by 7. Instead he subtracted 7 from it and got 2009. What would be the correct result?

Answer A. The initial number has been 2009+7=2016. The correct result is 2016:7=288.

3. [3IT] Il prezzo di vendita di una camicia esposta in vetrina è stato scontato del 20% e la camicia è stata venduta a 14,40€ . Determinare il prezzo di esposizione in vetrina.

A) 11,52€ B) 12,96€ C) 16,80€ D) 17,28€ E) 18€

The price of a shirt at a window has been reduced by 20% and so the shirt has been sold for 14,40€. Find the initial price.

Answer E. 14,40 = 0,8x, откъдето x = 18 (€).

4. [4BG] В изречението "Гошо из**три 17** за**пет**айки." могат да бъдат открити числата три, 17 и пет, чийто сбор е 25. Какъв е сборът на числата, които могат да бъдат открити в изречението: "На 230 км от Триполи, столицата на Либия, бе открито поредното находище на петрол."?

A) 233 B) 333 C) 338 D) 339 E) 341.

In the sentence "Гошо из**три 17** за**пет**айки." can be read the Bulgarian numberals „три" (3), 17 and „пет" (5), whose sum is 25. Find the sum of the Bulgarian numerals found in the sentence "На 230 км от Триполи, столицата на Либия, бе открито поредното находище на петрол."?

Answer D. These are 230, ТРИ (3), СТО (100), ЕДНО (1) and ПЕТ (5), whose sum is 339.

5. [5RO] Un cub conţine 343 de cubuleţe identice care umplu exact cubul mare. Câte asemenea cubuleţe sunt pe feţele cubului mare?

A) 210 B) 218 C) 225 D) 226 E) 294

A cube contains 343 identical little cubes that fill it entirely. How many little cubes are on there on the faces of the big cube?

Answer B. The little cubes not seen fill a cube 5x5x5, so the number of those that are seen is 343 –125 = 218.

6. [6SE] Summan av sju på varandra följande heltal är 2009. Det största av dessa tal är:

A) 285 B) 286 C) 288 D) 289 E) 290

The sum of seven consecutive integers is 2009. The greatest of these numbers is:

Answer E. If the numbers are n–3, n–2, n–1, n, n+1, n+2, n+3, their sum is 7n=2009, hence n=287 and n+3=290.

7. *[7VL] De grootst gemene deler van de getallen 2009 en 9002 is gelijk aan*
A) 1 B) 7 C) 49 D) 91 E) 287
The greatest common divisor of the numbers 2009 and 9002 equals
Answer B. The canonical decompositions of these numbers are 2009=7.7.41 and 9002=2.7.643.

8. [8SI] Na njivi, ki ima obliko romba s stranico 120m, so pridelali 1680kg pšenice. Koliko m meri višina v rombu, če je bil hektarski donos 2800kg? (Hektarski donos je količina pridelka na en hektar).
A) 50 B) 60 C) 70 D) 80 E) 90
From a field, having the shape of a rhombus of side 120m, 1680kg of wheat were produced. Find the height of the rhombus, if the production was 2800kg per hectare.
Answer A. The area of the rhombus is 1680/2800 = 0.6 ha = 6000sq.m. As its base is 120m, the height is 6000:120=50m.

9. [9NO] Den berømte sjøormen i Loch Ness er 38 m lang + halvdelen av sin egen lengde. Hvor lang er sjøormen?
A) 57 m B) 62 m C) 65 m D) 68 m E) 76 m
The length of the famous Loch Ness monster is 38 m + one half of itself. How long is the monster?
Answer E. 2.38=76.

10. [10CZ] Prvním přívodem se naplní bazén o rozměrech 12 x 25 m hluboký 180 cm za 21 hodin, druhým za 28 hodin. Za jak dlouho bude naplněn 30 cm pod okraj, jsou-li puštěny oba přívody?
A) 8 hodin B) 10 hodin C) 12 hodin D) 14 hodin E) 16 hodin
A pool of size 12 x 25 m and depth 180 cm can be filled for by one pipe for 21h and by another for 28h. How long will it take to fill it 30 cm below the rim if both pipes are open?
Answer B. For 84h the first pipe can fill 4 pools and the second one 3 pools. Together they fill 7 pools for 84h, hence one pool for 12h. We have to fill only 5/6 of the pool, so this will take 10h.

11. [11EN] Denote the sum of the digits of the positive integer x by $S(x)$. We have $S(S(2009)) = S(11) = 2$. How many integers n from 1000 to 3999 satisfy the property $S(S(n)) = 2$?
A) 329 B) 330 C) 332 D) 333 E) 334
Answer B. Such a number n has a remainder 2 when divided by 9, and so does $S(n)$. The least such number among the given ones is 1001 and the greatest is 3998, so there are (3998–1001):9+1=334 such numbers. Here $S(n)$ can be 2, 11, 20 or 29. We will have $S(S(n)) = 2$ in all cases except when $S(n)$=29; there are four such numbers: 2999, 3899, 3989, 3998. There are 334 – 4 = 330 numbers left.

12. [12PT] Considere um número inteiro positivo tal que quatro quintos da soma desse número com 36 é igual à diferença entre o dobro desse número e 6. A soma dos

algarismos do número considerado é

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

Consider a positive integer such that four fifths of the sum of this number with 36 equals the difference between double this number and 6. The sum of digits of the considered number is

Answer A. Let x be the number in question. Then $4(x+36)/5=2x-6$, so $4x+144=10x-30$ and $x=29$.

13. [13PL] Jeżeli między cyfry A i B liczby dwucyfrowej AB wstawimy 8 jako cyfrę setek i 9 jako cyfrę dziesiątek, to otrzymamy liczbę czterocyfrową podzielną przez 13. Jeżeli podobnie wstawimy cyfry 9 i 8, to otrzymamy liczbę, która przy dzieleniu przez 5 daje resztę 4.

Znaleźć $A+B$.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

If we put 8 as a hundreds digit and 9 as a tens digit between the digits A and B of the two-digit number AB, the resulting four-digit number is a multiple of 13. If we put 9 and 8 in a similar way, the resulting number gives residue 4 when divided by 5. Find $A+B$.

Answer B. The second condition says that B is 4 or 9. If $B=4$, we check that 1894 has gives residue 9 when divided by 13; having in mind that 1001 is a multiple of 13, we conclude that 2894, 3894, ..., 9894 give residues 8, 7, ..., 1 modulo 13; that is, none of them is a multiple of 13. If $B=9$, in each of these cases the residue modulo 13 is 5 more, so only 2899 is a multiple of 13. Thus $A+B=11$.

14. [14FR] Pour numéroter toutes les pages d'un gros livre, à partir de la page n°1, sont utilisés trois fois plus de chiffres que le nombre de pages de ce livre. Combien ce livre comporte-t-il de pages?

A) 1077 B) 1087 C) 1097 D) 1107 E) 1117

The number of digits needed to enumerate all the pages of a book, starting from No.1, is three times more than the number of its pages. How many pages are there in the book?

Answer D. Clearly the book must contain more than 999 pages. Let the number of pages be the four-digit number $999+x$. Then the number of digits is $9+2.90+3.900+4x = 2889+4x = 3(999+x)$. We get $x = 2997-2889 = 108$. The book has $999+108=1107$ pages.

15. [15BA] U korpi su jabuke. Uzmemo polovinu svih jabuka i još pola jabuke, zatim uzmemo polovinu od preostalih jabuka i još pola jabuke. Konačno uzmemo polovinu ostatka i još pola jabuke. U korpi e ostalo 8 jabuka. Koliko je jabuka bilo u početku?

A) 67 B) 68 C) 69 D) 70 E) 71

In a basket there were some apples. We take half of them plus half an apple, then we take half of the remaining apples plus half an apple. At the end we take half of the rest plus half an apple. In the basket there were 8 apples left. What has been the initial number of apples?

Answer E. Before the last action there have been 17 apples. Before the second action there have been 35 apples. Initially there have been 71 apples.

16. [16UA] Бісектриса кута паралелограма, який дорівнює 150°, ділить його сторону на відрізки 9 см і 8 см, починаючи від вершини протилежного кута. Обчислити площу паралелограма.

A) 34 кв.см B) 51 кв.см C) 68 кв.см D) 85 кв.см E) 102 кв.см

In a parallelogram, the bisector of one of the angles, measuring 150°, divides its side in segments of length 9 cm and 8 cm, starting from the opposite vertex. Find the area of the parallelogram.

A) 34 sq.cm B) 51 sq.cm C) 68 sq.cm D) 85 sq.cm E) 102 sq.cm

Answer C. Let the parallelogram be $ABCD$ and the bisector be AL. Then $DA=DL=8$cm, so the height to AB is 4cm (as a leg opposite to 30°). As $AB=17$, the area is $4.17=68$ sq.cm .

17. [17ES] Una cuerda larga se dobla a la mitad nueve veces y después ésta se corta a la mitad. ¿Cuántas piezas se obtienen?

A) 255 B) 256 C) 257 D) 512 E) 513

A rope is folded in half nine times and then cut in the middle. How many pieces are obtained?

Answer E. Each fold doubles the number of ropes to be cut, so after the 9th fold there are $2^9=512$ ropes cut. Hence 513 pieces are obtained.

18. [18MK] По повеќе години се среќаваат двајца математичари стари пријатели.

– Каде си овие години и што правиш ? – прашал првиот.

– Се оженив и имам три деца.

– Колку години имаат децата? – прашал првиот.

– Производот на годините е 72, а збирот е еднаков на бројот на прозорци на онаа зграда

– одговорил вториот.

– Условите што ги кажуваш не се доволни – му рекол првиот.

– Добро, еве уште еден услов. Најстариот свири на труба – одговорил вториот.

– Сега знам колку години имаат децата – заклучил првиот.

Колку години имаат децата?

A) 2,2,18 B) 2,4,9 C) 2,3,12 D) 3,4,6 E) 3,3,8

Two mathematicians (old friends) meet after a long time.

– Where have you been and how are you? – asked the first one.

– I got married and have three kids.

– How old are they? – asked the first one.

– The product of their years is 72, and the sum equals the number of windows of that building – answered the second one.

– These conditions are not sufficient – said the first one.

– Ok, here is another condition. The oldest plays the trumpet – answered the second one.

– Now I know their ages – concluded the first one.

What are the kids ages?

Answer E. There are many ways to get 72 as a product of three positive integers, but only two of them (6.6.2 and 3.3.8) have equal sums (6+6+2 = 3+3+8 = 14). Thus the building must have had 14 windows. Knowing that there is an oldest kid excludes the first possibility, so the ages must be 3, 3, 8.

19. [19GR] Η πόλη A και η πόλη B συνδέονται με λεωφόρο με ανηφοριές και κατηφοριές. Ενός αυτοκινήτου η ταχύτητα είναι 60 χμ/ώρα και 80 χμ/ώρα στις ανηφοριές και κατηφοριές αντίστοιχα. Το αυτοκίνητο χρειάζεται 5 ώρες από την A προς B αλλά 5,5 ώρες από την B προς την A. Ποια είναι η απόσταση των κατηφοριών (σε χμ) από την A προς την B?

A) 120 B) 180 C) 240 D) 300 E) 360

Town A and Town B are connected by a highway which consists of an uphill and a downhill sections. A car's speed is 60 km/h and 80 km/h for the uphill and downhill sections, respectively. It takes 5 hours from A to B but 5.5 hours from B to A. What is the downhill distance (in km) from A to B?

Answer C. If the uphill distance (in km) from A to B is x, and the downhill is y, we have $x/60 + y/80 = 5$ and $x/80 + y/60 = 5.5$. We multiply both equations by 240 to get $4x + 3y = 1200$ and $3x + 4y = 1320$. Subtraction gives $y - x = 120$, hence $3y - 3x = 360$. Adding $3x + 4y = 1320$ we get $7y = 1680$, hence $y = 240$.