

## SCURTĂ INCURSIUNE ÎN LUMEA ORTHOSULUI

Prof. Dumitru Oprea, Dragodănești

ORTHOS este un cuvânt în limba greacă care înseamnă *drept (corect)* și care a generat, în general ca *prefix*, o serie de cuvinte noi în diverse domenii ale cunoașterii și chiar în vorbirea curentă. În cele mai multe cazuri se folosește ca prefix cuvântul ORTO astfel încât, combinat cu alte cuvinte, fie de origine greacă, fie de origine română, a născut noțiuni noi (bogate în conținut și în semnificație) sau, nu de puține ori, a dat naștere chiar la științe noi.

În cele ce urmează vom prezenta cititorului mai întâi elemente din lumea matematică a *ortosului*. O primă clasă o formează combinarea dintre ORTO și GONIA = unghi, dând naștere la ORTOGONAL, astfel că avem:

- a) *drepte ortogonale* (drepte perpendiculare)
- b) *direcții ortogonale*
- c) *curbe ortogonale* [ două curbe  $(C)$  și  $(C')$  sunt ortogonale în  $M=(C) \cap (C')$  dacă tangentele lor în  $M$  sunt perpendiculare ]
- d) doi vectori  $x, y \in V = \text{spațiu vectorial}$  (dotat cu produs scalar) dacă *produsul lor scalar*  $= \langle x, y \rangle = 0$ .

Două subspații vectoriale  $A$  și  $B$  ale aceluiași spațiu vectorial  $V$  (dotat cu produs scalar) se zic *subspații ortogonale* dacă toți vectorii din  $A$  sunt ortogonali pe vectorii din  $B$ . Cel mai mare subspațiu ortogonal pe un subspațiu dat se numește *complement ortogonal* al respectivului subspațiu.

Transformarea liniară  $T: V \rightarrow V$  se zice *ortogonală* dacă păstrează produsul scalar a doi vectori, adică  $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ ; în acest caz, avem întotdeauna  $\langle \widehat{x}, \widehat{y} \rangle = \langle \widehat{T(x)}, \widehat{T(y)} \rangle$  și  $\|T(x)\| = \|x\|$ , unde prin  $\|x\|$  se înțelege *norma* = lungimea vectorului  $x$ . Dacă vectorii unei *baze* a spațiului vectorial  $V$  sunt ortogonali, baza se zice *ortogonală*. Se știe că un *reper* într-un spațiu vectorial este constituit dintr-un punct  $O$  numit *origine* și dintr-o *bază*  $= \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , atunci  $(O; v_1, v_2, \dots, v_n) = \text{reper}$  în  $V$ ; în caz că  $v_i \perp v_j$  oricare ar fi  $i, j = \overline{1, n}$ , *reperul* se zice *ortogonal*.

În aceeași familie a ortogonalității, avem *matricele ortogonale* (matricele pătrate în care  $AA^T = I$ ), apoi în geometrie avem *proiecția ortogonală*, *simetria ortogonală*. Cele de mai sus arată generalitatea *ortogonalității* față de perpendicularitate. Ea se extinde și la funcții. Pentru două funcții  $f$  și  $g$  continue pe  $[a, b]$  se poate introduce *produsul lor scalar* (ca fiind

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \text{ sau mai general, dacă considerăm și o funcție } \rho(x) \text{ nenegativă,}$$

$$\text{atunci se definește produsul } \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx.$$

În caz că  $\langle f, g \rangle_p = 0$  atunci funcțiile  $f$  și  $g$  se zic ortogonale. De exemplu, funcțiile  $f(x) = 2x + 3$  și  $g(x) = 5x^2 + x - \frac{17}{9}$  sunt ortogonale pe  $[-1, 1]$ , deoarece  $\int_{-1}^1 f(x)g(x)dx = 0$ ; analog funcțiile  $f(x) = \sin nx$  și  $g(x) = \cos mx$  sunt ortogonale pe  $[0, 2\pi]$ .

Studiul funcțiilor ortogonale are puternice implicații în teoria seriilor Fourier. Polinoamele Hermite, Legendre, Laguerre, Cebâșev sunt *ortogonale*.

În 1920, celebrul matematician polonez Stephen Banach introduce noțiunea de *normă* în spațiile vectoriale, înțelegând prin *vector normat* vectorul  $\frac{x}{\|x\|} = \text{vector unitar}$ . În

acest mod, termenul greco-latin *orthonormat* exprimă deodată caracterul de unghi drept și de vectori unitari.

Dacă  $\|e_i\| = 1$  și  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$  pentru  $i, j = \overline{1, n}$ , atunci  $(0, e_1, e_2, \dots, e_n) =$  un *reper orthonormat*  $n$ -dimensional.

O altă familie de obiecte matematice care fac parte tot din lumea ORTHOSULUI sunt cele din *geometria tetraedrului*. Astfel, avem *triunghiul ortic* (ale cărui vârfuri sunt picioarele înălțimilor unui triunghi dat), iar punctul de concurență al înălțimilor unui triunghi dat se numește *ortocentrul* triunghiului. În mod analog, în 1827, geometrul elvețian Iacob Steiner a introdus noțiunea de *tetraedru ortocentric* (acel tetraedru în care cele 4 înălțimi ale sale sunt concurente). În prima jumătate a sec. al XIX-lea, o serie de străluciți geometri ca: Feuerbach, Vecten, Jacobi, l'Huilier etc. au stabilit multiple proprietăți ale *tetraedrelor ortocentrice*. De la triunghi, *orthosul* s-a extins și la patrulater dând naștere la *patrulater ortodiagonale* (care au diagonalele perpendiculare).

Tot din lumea ORTHOSULUI, fac parte o serie de cuvinte cu profunde semnificații în cultură și civilizația omenirii: *ortodox* (orto+doxa = gândire dreaptă) și *ortodoxie*; *ortodramă* (orto+dromos=drum drept)=drumul cel mai scurt între două puncte de pe pământ; *ortoedric*, un poliedru cu fețe care se intersectează în unghiuri drepte.

De asemenea, tot descendenți din *orthos* sunt *ortografia* (scrierea corectă într-o limbă); *ortopedia*, *ortoepia* (studiul pronunțării corecte într-o limbă); *ortocromatic*; *or toptere* (un ordin de insecte) etc.

Din cele de mai sus rezultă puternicele ecouri pe care le-a avut *orthosul* în procesele de cunoaștere al omului de-a lungul veacurilor.

# APLICAȚII ALE FUNCȚIEI $\frac{\sin x}{x}$

Prof. Serenela Gabriela Radu, Pitești

În manualele de *Analiză matematică* se tratează  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  care e utilizată la stabilirea derivatelor funcțiilor  $\sin x$  și  $\cos x$ , fără a se face un studiu temeinic al funcției  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  care are multiple și interesante aplicații în matematică și în alte domenii. În cele ce urmează, vom face un studiu al variației (și graficului) funcției  $f(x) = \frac{\sin x}{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (unde  $f(0) = 1$ ) și câteva aplicații ale acestei funcții.

I. Observăm că  $\frac{\sin x}{x} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  se *prelungeste prin continuitate* la funcția  $f(x) = \frac{\sin x}{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dacă  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ . Apoi se constată imediat că  $f(-x) = f(x)$ , ceea ce înseamnă că funcția este pară (are graficul simetric față de Oy) și ecuația  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = x$  (funcția are o infinitate de puncte de extrem approximate prin  $x_1 \approx 4,49$ ;  $x_2 \approx 4,73$ ;  $x_3 \approx 10,90$ ;  $x_4 \approx 14,07...$ ) deci tabelul de variație este

| x    | 0 | $\frac{\pi}{2}$          | $\pi$        | $x_1$             | $\frac{3\pi}{2}$           | $2\pi$       | $x_2$             | $\frac{5\pi}{2}$          | $3\pi$       |
|------|---|--------------------------|--------------|-------------------|----------------------------|--------------|-------------------|---------------------------|--------------|
| f(x) | 1 | $\searrow \frac{2}{\pi}$ | $\searrow 0$ | $\searrow f(x_1)$ | $\searrow -\frac{2}{3\pi}$ | $\searrow 0$ | $\searrow f(x_2)$ | $\searrow \frac{2}{5\pi}$ | $\searrow 0$ |

și graficul este reprezentat în Fig.1.

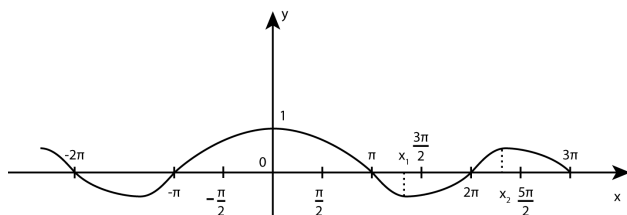


Fig. 1

grafic este în Fig.2:

Astfel avem un prim exemplu de reprezentare printr-o integrală (în cazul nostru argumentul funcției este limita superioară a integralei) a unei funcții. Celebru matematician german **Peter Gustav Lejeune Dirichlet** (1805-1859) a arătat că

$$Si(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2} \text{ și de aceea}$$

se numește azi *integrala Dirichlet* [vezi [2]].

II. O primă aplicație a funcției  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  este faptul că  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  nu poate fi exprimată printr-un număr finit de „funcții elementare” și permite deci definirea funcției *sinus integral*.

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ al cărei}$$

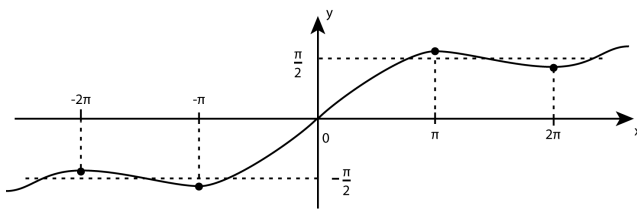


Fig. 2

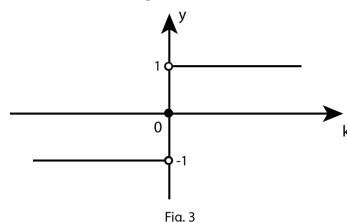
Vom calcula integrala  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ , folosind transformata Laplace. Se știe din tabelul transformatelor

Laplace, că dacă originalul este  $\frac{f(t)}{t}$ , atunci imaginea sa este  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ , adică avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{ds}{s^2 + 1} = \lim_{L \rightarrow \infty} \arctg s \Big|_0^L = \frac{\pi}{2}.$$

Dacă se înlocuiește  $\sin x$  cu  $\sin kx$  în integrala Dirichlet, se obține o altă expresie

$$\text{pentru funcția sign: } \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \begin{cases} -1 & \text{pentru } k < 0 \\ 0 & \text{pentru } k = 0 \\ 1 & \text{pentru } k > 0 \end{cases} \text{ al cărei}$$



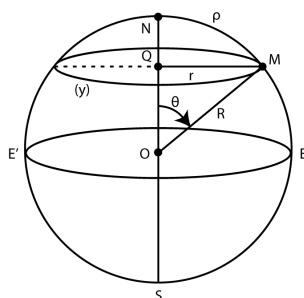
grafic este reprezentat în Fig.3.

O aplicație fascinantă a funcției  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  se datorește faptului că prin intermediul ei se

demonstrează *matematic* că pământul este rotund (aproximativ sferic), ceea ce echivalează cu faptul că lumea noastră este o *lume rotundă, nu plată*. Fie un cerc ( $\gamma$ ) construit pe suprafața pământului, cu centrul în Q și cu raza r „sau” cu centrul în N și cu raza  $\rho = \text{lung. NM}$  (măsurată pe suprafața pământului) unde SON este axa polilor așa cum se vede în Fig.4.

Dacă observatorul se află în M pe suprafața pământului având *colatitudinea*  $\theta = \widehat{MON}$  (măsurată în radiani) iar pământul considerat sferic are raza R, atunci vom avea pentru lungimea cercului ( $\gamma$ ) două valori distincte după atitudinea observatorului M:

1. M consideră pământul plat ( $M_p$ )  $l(\gamma) = 2\pi\rho$
2. M consideră pământul sferic ( $M_s$ )



$$l(\gamma) = 2\pi r = 2\pi R \sin \theta = 2\pi\rho \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ (deoarece } \rho = R\theta).$$

Pentru  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  se întocmește următorul tabel:

Fig. 4

| $\theta$         | 00   | 10   | 20   | 30   | 40   | 50   | 100  | 200  | 300 | 400  | 500  | 600  | 700  | 800  | 900 |
|------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------|-----|
| $l(\gamma)/\rho$ | 6283 | 6283 | 6282 | 6280 | 6278 | 6275 | 6251 | 6156 | 6   | 5785 | 5516 | 5196 | 4833 | 4432 | 4   |

Din tabel rezultă o descreștere în raport cu  $\theta$ , a valorii raportului  $l(\gamma)/\rho$  pentru observatorul

$M_p$ , adică  $l(\gamma)/\rho = 2\pi \frac{\sin \theta}{\theta}$ . Se observă că funcția  $\frac{\sin \theta}{\theta}$  este cea care justifică

atitudinea lui  $M_s$  pentru valori mici ale lui  $\theta$  raportul  $l(\gamma)/\rho = 2\pi$  și de aici rezultă că pământul este rotund (sferic).

#### Bibliografie:

- [1] Eli Maor: *Splendorile trigonometriei* (Ed. Theta, București 2007)
- [2] Radu Bădescu și Constantin Maican: *Integrale utilizate în mecanică, fizică și tehnică* (Ed. Tehnică, București 1968).

## O GENERALIZARE A TEOREMEI LUI PYTHAGORA

Miron Oprea

**Motto:** „Secțiunea de aur și teorema lui Pythagora  
formează împreună două tezaure ale geometriei”

J. Kepler (1571-1630)

Se știe că *generalizarea* este una din operațiile fundamentale ale gândirii și că multe teoreme (chiar cele de mai mică importanță) din matematică au fost supuse procesului de generalizare. *Generalizarea* a fost și rămâne în continuare unul din motoarele (cu mulți „cai putere”) principale ale dezvoltării matematice. Celebra teoremă a lui Pythagora (cu multiplele sale interpretări) a fost supusă operației de generalizare mai mult ca oricare altă teoremă din matematică.

Astfel, prima generalizare a teoremei lui Pythagora a fost dată de matematicianul arab Tâbit (826-901) și se referă la extinderea teoremei la un *triunghi oarecare*. În secolele XVIII-XX s-au dat alte generalizări în spații multidimensionale care au permis apariția unor noțiuni matematice profunde, ce au dus la crearea unor noi domenii în matematică. De exemplu, diagonala  $d$  a unui paralelipiped dreptunghic are lungimea  $d = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$  în funcție de cele 3 dimensiuni  $x_1, x_2, x_3$  ale muchiilor sale. Mai general, un *paralelipiped dreptunghic  $n$ -dimensional* are diagonala  $d = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$  unde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sunt lungimea muchiilor sale.

Este bine de precizat pentru cititorul nostru, că teorema lui Pythagora îmbracă forme diferite în cele trei geometrii fundamentale, după cum urmează.

*Geometria lui Euclid:*  $a^2 = b^2 + c^2$

*Geometria lui Lobacevski:*  $2\left(e^{\frac{a}{k}} + e^{-\frac{a}{k}}\right) = \left(e^{\frac{b}{k}} + e^{-\frac{b}{k}}\right)\left(e^{\frac{c}{k}} + e^{-\frac{c}{k}}\right)$  unde  $k$  este o constantă oarecare, iar  $e = 2,718\dots$

*Geometria lui Riemann:* Forma diferențială  $ds^2 = \alpha dx^2 + 2\beta dx dy + \gamma dy^2$  unde forma pătratică  $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$  este pozitiv-definită.

În cele ce urmează vom interpreta teorema sub forma: *aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe catete*.

Generalizarea pe care o preconizăm acum se referă la construirea (în exteriorul triunghiului dreptunghic) pe laturile sale a unor *figuri plane asemenea*. Vom înțelege prin *figuri plane asemenea*, două figuri în care una este o creștere (dilatate) a celeilalte. Astfel, două triunghiuri echilaterale sunt întotdeauna asemenea, două cercuri sunt asemenea, două pătrate, două poligoane regulate de același nume sunt asemenea. Două dreptunghiuri care au același raport între cele două dimensiuni, sunt asemenea și exemplele pot continua.

Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), astfel că  $BC = a$  (unități);  $CA = b$ ;  $AB = c$ , în care avem  $b^2 + c^2 = a^2$  (\*). Prin înmulțire cu  $0 \neq k \in \mathbb{R}^+$  a relației

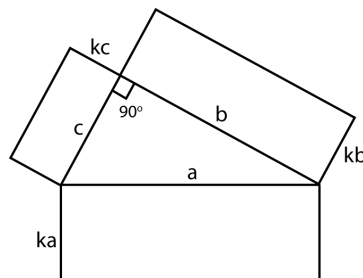


Fig. 1

(\*) , obținem  $kb^2 + kc^2 = ka^2$  , ceea ce se traduce prin construirea pe laturile triunghiului a unor dreptunghiuri asemenea, astfel că: *aria dreptunghiului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor dreptunghiurilor construite pe catete.*

Dacă  $k = \frac{\pi}{4}$  , atunci  $\pi \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \pi \left(\frac{c}{2}\right)^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2$  , ceea ce

înseamnă că aria semidiscului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor semidiscurilor construite pe catetă (Fig.2).

Dacă  $k = \sqrt{\frac{3}{4}}$  , atunci avem că *aria triunghiului echilateral*

*construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor triunghiurilor echilaterale*

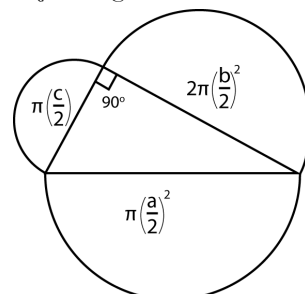


Fig. 2

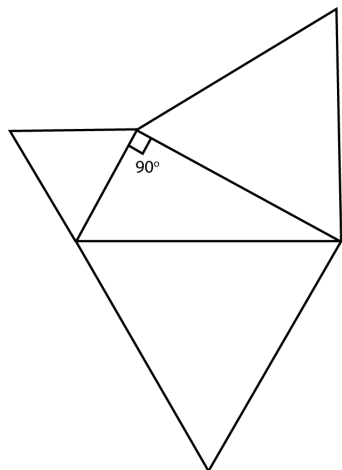


Fig. 3

*construită pe catete. (Fig.3).*

În cazul unui poligon regulat cu  $n$  laturi se ia  $k = \frac{n}{4} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$  (de unde?) și avem că *aria poligonului regulat cu  $n$*

*laturi construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor poligoanelor regulat de același nume construite pe catete (Fig.4).*

Deci, în general, dacă pe laturile unui triunghi dreptunghic se construiesc figuri asemenea cu raportul de asemănare  $k$ , atunci *aria figurii construite pe ipotenuză este egală cu suma ariilor figurilor*

*construite pe catete.*

Este bine știut că teorema lui Pythagora este cea mai importantă și cea mai „populară” teoremă din întreaga matematică, fiind pusă încă de la începutul matematicii la temelie și la dezvoltarea sa.<sup>1</sup> **Simplitatea** și frumusețea sa au trezit interesul multor iubitori ai matematicii, în a-i da demonstrație, astfel că astăzi se cunosc în jur de 400 demonstrații. În 1940, matematicianul american *Elisha Scott Loomis* a scris lucrarea *The pythagorean proposition* care au cuprins 370 demonstrații ale celebrei teoreme. În 1968 lucrarea a fost reeditată și îmbogățită cu noi demonstrații. Ceea ce este foarte interesant și atrage atenția, este faptul că nicio demonstrație nu este trigonometrică. Invităm cititorul să explice: **DE CE NU EXISTĂ NICIO DEMONSTRAȚIE TRIGONOMETRICĂ A TEOREMEI LUI PYTHAGORA?**

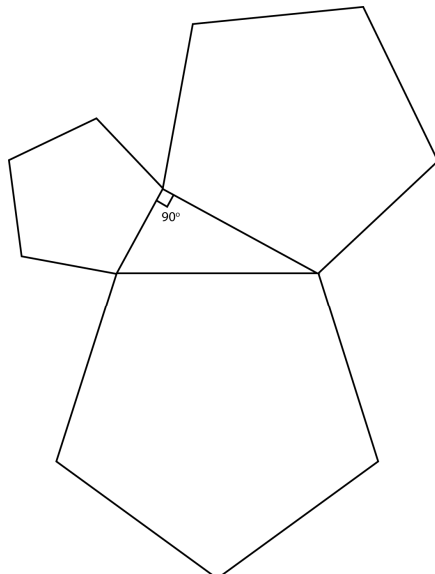


Fig. 4

<sup>1</sup> În excepționala lucrare *Matematica distractivă* (Ed.SIGMA din 2004) a lui I.Dăncilă îi este consacrat întreg cap.3 sub titlul *O comoară a geometriei: teorema lui Pitagora*. Autorul precizează că de-a lungul istoriei a fost numită în cele mai diverse feluri: *teorema căsătoriei* (elinii), *scaunul soților* (hindușii), *figura nevastă* (persanii), *puntea măgarului* (poreclă dată de liceeni), *stăpâna matematicii* (matematicienii Evului Mediu).

## O APLICAȚIE GEOMETRICĂ A POLINOAMELOR CEBÎȘEV

Miron Oprea

### I. Introducere

După cum se știe, *polinoamele Cebîșev* apar în multe ramuri ale matematicii ca: teoria interpolării, polinoamele ortogonale, teoria aproximației, analiză numerică, teoria ergodică etc., ceea ce face din ele o veritabilă „*bijuterie matematică*”. În lucrările sale, talentatul matematician rus P.L. Cebîșev (1821-1894), pe baza dezvoltării în sume de  $\sin \theta$  și  $\cos \theta$  ale lui  $\cos n\theta$  și  $\sin n\theta$  stabilite de A. Moivre (1667-1754), construiește două tipuri de polinoame și anume

$$t_n(x) = \cos n\theta \text{ cu } x = \cos \theta \text{ (cunoscut azi ca polinom Cebîșev de speța întâi)} \text{ și } u_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \text{ cu}$$

$x = \cos \theta$  (cunoscut azi ca *polinom Cebîșev de speța a doua*).

În cele ce urmează vom pune în evidență legătura ce există între *polinoamele Cebîșev de speța a doua* și *poligoanele regulate* (convexe și concave). Clericul englez *Bradwardine* (1290-1349) cu preocupări matematice, a dezvoltat în lucrările sale proprietățile *poligoanelor-stee regulate*, ceea ce a stârnit un interes deosebit astronomului-geometru, J. Kepler (1571-1630) în a stabili ecuația  $z^3 - 7z^2 + 14z - 7 = 0$  ale cărei rădăcini sunt pătratele laturilor celor trei *heptagoane regulate* înscrise într-un cerc cu raza unu.

### II. Polinoamele Cebîșev de speța a doua

*Def.1:* Se numește *polinom Cebîșev de speța a doua*, *polinomul de gradul n*, dat de expresia  $u_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}$  unde  $x = \cos \theta$  și  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

Din definiție se deduce imediat relația de recurență între trei polinoame de grade consecutive:  $u_n(x) = 2xu_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)$  care permite rapid construirea șirului de polinoame Cebîșev de speța a doua:

$$u_0(x) = 1; u_1(x) = 2x; u_2(x) = 4x^2 - 1; u_3(x) = 8x^3 - 4x; u_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1;$$

$$u_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x; u_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1; \dots$$

Tot direct, pe baza definiției, rezultă proprietățile:

1)  $u_{2n}(x) = u_{2n}(-x)$ ; 2)  $u_{2n+1}(x) = -u_{2n+1}(-x)$ ; 3) rădăcinile polinoamelor  $u_n(x)$  sunt reale

$x = \cos \frac{k\pi}{n+1}$  cu  $k = \overline{1, n}$  și sunt cuprinse în intervalul  $(-1, 1)$ .

Fie matricea simetrică tridiagonală de ordinul  $n$ :

$$U_n(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Observăm că:

$$\det U_n(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 2x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 & 2x \end{vmatrix} =$$

$$= 2x \det U_{n-1}(x) - \det U_{n-2}(x)$$

ceea ce înseamnă că  $\det U_n(x)$  verifică relația de recurență a polinoamelor Cebîșev de speța a doua, adică  $u_n(x) = \det U_n(x)$  cu  $u_0(x) = 1$  și  $u_1(x) = 2x$ .

Calculând primele două derivate în raport cu  $\theta$ , ale polinomului Cebîșev de speța a doua, avem:

$$\left. \begin{aligned} u_n(x) &= \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} && \bullet n(n+2) \\ u'_n(x) &= \frac{\cos \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^3 \theta} - \frac{(n+1)\cos(n+1)\theta}{\sin^2 \theta} && \bullet (-3\cos \theta) \\ u''_n(x) &= \frac{3\sin \theta \cos^2 \theta \sin(n+1)\theta - 3(n+1)\sin^2 \theta \cos \theta - n(n+2)\sin^2 \theta \sin(n+1)\theta}{\sin^6 \theta} && \bullet \sin^2 \theta \end{aligned} \right] + \Rightarrow$$

$$+ \Rightarrow (1-x^2)u''_n(x) - 3xu'_n(x) + n(n+2)u_n(x) = 0$$

care reprezintă *ecuația diferențială* a polinoamelor Cebîșev de speța a doua.

Știm că seria geometrică  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  cu  $|z| < 1$  este convergentă, având ca limită funcția

$f(z) = \frac{1}{1-z}$ . Dacă  $z = (\cos \theta + i \sin \theta)$  cu  $r < 1$  și  $\theta \in [0, 2\pi]$ , atunci putem scrie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\theta + i \sum_{n=0}^{\infty} r^n \sin n\theta, \quad \text{iar}$$

$$f(r(\cos \theta + i \sin \theta)) = \frac{1}{1-r\cos \theta - ir\sin \theta} = \frac{1-r\cos \theta + ir\sin \theta}{(1-r\cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} = \frac{1-r\cos \theta}{1-2r\cos \theta + r^2} + i \frac{r\sin \theta}{1-2r\cos \theta + r^2}.$$

$$\text{Deci: } \sum_{n=0}^{\infty} (\cos n\theta) r^n = \frac{1-r\cos \theta}{1-2r\cos \theta + r^2} \text{ și}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\sin n\theta) r^n = \frac{r\sin \theta}{1-2r\cos \theta + r^2} \Leftrightarrow \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right) r^{n-1} = \frac{1}{1-2r\cos \theta + r^2} \right] \Leftrightarrow \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \cdot r^n = \frac{1}{1-2r\cos \theta + r^2} \right] \text{ și}$$

cum  $x = \cos \theta$ , avem că  $\frac{1}{1-2xr+r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) r^n$ , ceea ce înseamnă că  $f(r) = \frac{1}{1-2xr+r^2}$  este

funcția generatoare a polinoamelor  $u_n(x)$ , iar  $\varphi(r) = \frac{1-rx}{1-2xr+r^2}$  este funcția generatoare a polinoamelor  $t_n(x)$ .



**Teorema 1:** Valorile proprii ale matricii  $U_n(x)$  sunt  $2(x-1)+4\sin^2 \frac{k\pi}{2n+2}$  cu  $k = \overline{1, n}$ .

**Dem.:** Valorile proprii ale lui  $U_n(x)$  sunt zerourile lui  $u_n\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)$ , adică  $x - \frac{\lambda}{2} = \cos \frac{k\pi}{n+1}$ .

Deci  $\lambda = 2x - 2 \cos \frac{k\pi}{n+1} = 2x - 2 + 2\left(1 - \cos \frac{k\pi}{n+1}\right) = 2(x-1) + 4\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}$  (q.e.d.)

Fie polinomul  $v_n(x) = u_n(x) + u_{n-1}(x)$ .

**Teorema 2:** Zerourile polinomului  $v_n(x)$  sunt  $\cos \frac{2k\pi}{2n+1}$ .

**Dem:**  $v_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta + \sin n\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$ ; deci  $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = 0 \Leftrightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)\theta = k\pi \Rightarrow \theta = \frac{2k\pi}{2n+1}$ ,

adică  $x = \cos \frac{2k\pi}{2n+1}$  cu  $k = \overline{1, n}$ .

Se observă ușor că polinoamele  $v_n(x)$  verifică relația de recurență  $v_{n+1}(x) = 2xv_n(x) - v_{n-1}(x)$ , deci sunt tot polinoame Cebîșev de speța a doua cu  $v_0(x) = 1; v_1(x) = 2x + 1$ .

Acestor polinoame le atașăm matricea tridiagonală simetrică de ordinul  $n$

$$V_n(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x+1 \end{bmatrix} \quad \text{astfel că } \det V_n(x) = v_n(x) \text{ pentru } n \geq 2 \text{ și}$$

$$v_0(x) = 1; v_1(x) = 2x + 1.$$

**Teorema 3:** Valorile proprii ale matricii  $V_n(x)$  sunt  $2(x-1) + 4\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1}$  cu  $k = \overline{1, n}$ .

**Dem:** Valorile proprii ale lui  $V_n(x)$  sunt rădăcinile ecuației algebrice în  $\lambda$ ,  $\det V_n\left(2\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)\right) = 0$ ,

adică sunt zerourile polinomului  $v_n\left(x - \frac{\lambda}{2}\right)$ . Deci avem

$$x - \frac{\lambda}{2} = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \Leftrightarrow \lambda = 2x - 2 + 2\left(1 - \cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) = 2(x-1) + 4\sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} \text{ cu } k = \overline{1, n} \text{ (q.e.d.)}.$$

### III. Aplicații la poligoane regulate și figuri stea-regulate

Fie un cerc de rază  $R$ , pe care îl divizăm în  $n$  arce egale prin  $n$  puncte de diviziune pe care le notăm  $1, 2, 3, \dots, n$ . Dacă unim punctele în mod succesiv se obține *poligonul regulat convex* cu  $n$  laturi, iar dacă le unim din  $q$  în  $q$ , unde  $2q < n$ , se obține o *figură stea-regulată* pe care o notăm  $\left\{ \frac{n}{q} \right\}$ . În caz că  $q=1$ , atunci  $\left\{ \frac{n}{1} \right\} = \{n\}$  = polinomul regulat convex, iar dacă  $(n, q) = 1$  atunci se obține

*poligonul regulat stelat*. Există  $\frac{\varphi(n)}{2}$  „*n-goane*” regulate, unde  $\varphi(n)$  = funcția lui Euler.

*Exemple:*  $n=5 \Rightarrow \{5\}$  = *pentagonul regulat convex* și  $\left\{ \frac{5}{2} \right\}$  = *pentagonul stelat* (pentagrama)

$n=6 \Rightarrow \{6\}$  = *hexagonul regulat convex* și  $\left\{ \frac{6}{2} \right\}$  = două triunghiuri echilaterale cu același centru rotit unul față de celălalt cu  $600 =$  *steaua lui David*.

$n=7 \Rightarrow \{7\}$  = *heptagonul regulat convex* și  $\left\{ \frac{7}{2} \right\}, \left\{ \frac{7}{3} \right\}$ .

două *heptagoane stelte*

$n=8 \Rightarrow \{8\}$  = *optogonul regulat convex* și  $\left\{ \frac{8}{2} \right\}$  = o *figură stea* (două pătrate egale cu același centru rotit unul față de celălalt cu  $450$ );  $\left\{ \frac{8}{3} \right\}$  = *octogonul stelat*.

Se vede imediat că  $l_{\left\{ \frac{n}{q} \right\}} = 2R \sin \frac{\pi}{n}$  și  $l_{\left\{ \frac{n}{q} \right\}} = 2R \sin \frac{q\pi}{n}$ .

Din teoremele 1 și 3 rezultă:

**Teorema 4:** *Valorile proprii ale matricilor  $V_n(1)$  și  $U_n(1)$  sunt  $l_{\left\{ \frac{n}{q} \right\}}^2$  și  $l_{\left\{ \frac{n}{q} \right\}}^2$  ale figurilor stea-regulate  $\left\{ \frac{n}{q} \right\}$  pentru*

$n=2k+1$  și respectiv  $n=2k$  cu  $q=1, k$  și respectiv  $q=1, k-1$ .

**Bibliografie:** [1.] V. Rudner și C. Nicolescu: *Probleme de matematici speciale* (Ed. didactică, București 1982)

[2.] V. Brânzănescu și O. Stănășilă: *Matematici speciale* (Ed. All, 2002)

[3.] M.Țena: *Rădăcinile unității* (S.Ș. M. 2005, București).