

MERIDIAN

REVISTA DE MATEMATICĂ A ELEVILOR DIN ROVINARI

FONDATORI

REDACTORI COORDONATORI

ÎNV. RADU DORINA

PROF. PRUNESCU ROMEO PROF. POMANĂ LIVIU

COLECTIV DE REDACȚIE

REDACTOR ȘEF: Elev. TUDOSIE ROBERT

REDACTOR ȘEF ADJ: MUNTEANU ALEXANDRU

SECRETAR: Elev. MARIN ANDRA

REDACTORI: Elev. APOSTU SULTĂNICA

Elev. COMAN ANA MARIA

Elev. AILINCĂI ALINA

Elev. VITONESC DIANA

Elev. CURICI CRISTIAN

Elev. BUNDUC CRISTINA

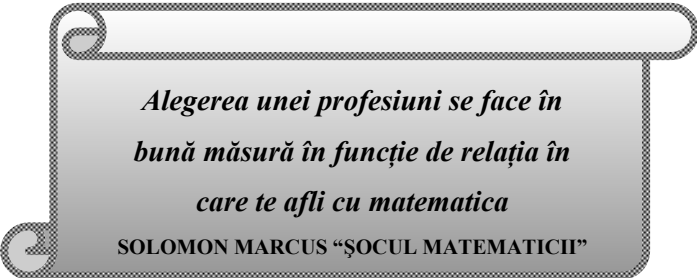
DIRECTOR REVISTĂ: ÎNV. RADU DORINA

TEHNOREDACTARE: PROF. POMANĂ LIVIU

PROF. PRUNESCU ROMEO

*ȘCOALA GENERALĂ NR. 1
LOC. ROVINARI, JUD. GORJ
TEL. 0253/371255
<http://www.Meridian.as.ro>
E-mail: Meridian@as.ro*

PUBLICAȚIE PERIODICĂ
ANUL I / NR. 1
OCTOMBRIE 2004



*Alegerea unei profesii se face în
bună măsură în funcție de relația în
care te afli cu matematica*
SOLOMON MARCUS “ȘOCUL MATEMATICII”

INVITAȚIE LA UN NOU ÎNCEPUT

Școala Generală Nr. 1 Rovinari este una din cele mai mari unități de învățământ din județul Gorj. Este cunoscută nu numai prin numărul mare de elevi, ci și prin rezultatele deosebite pe care aceștia le obțin la învățatură și disciplină. Mulțumesc tuturor profesorilor și învățătorilor care au făcut ca noi să fim atât de bine cunoscuți și stimați în tot județul nostru.

Este în tradiția școlii noastre ca diverse publicații de elevi să-i reprezinte. Revista “MERIDIAN” este bine venită și sper ca în numerele ei tot mai mulți elevi și cadre didactice să contribuie la educarea continuă a copiilor de vârstă școlară.

Îi doresc viață lungă pe toate meridianele!

Director,
Prof. CURCANU GRIGORE

**ARTICOLE ȘI NOTE
MATEMATICE**

Ultima cifră a unui număr natural

Definiție: Prin ultima cifră a unui număr natural se înțelege cifra unităților acestuia. Vom nota cu $U(n)$, ultima cifră a numărului natural n .

Exemplu: $U(2731) = 1$.

Proprietăți:

1. $U(n + m) = U[U(n) + U(m)]$;
2. $U(n \cdot m) = U[U(n) \cdot U(m)]$;
3. $U(n^m) = U[U(n)^m]$.

Observație: Ultima cifră a puterilor numerelor de la 0 la 9:

$$U(0^n) = 0, (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$U(5^n) = 5, (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$U(1^n) = 1, (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$U(6^n) = 6, (\forall)n \in \mathbb{N};$$

$$U(2^n) = \begin{cases} 6, n = 4k \\ 2, n = 4k + 1 \\ 4, n = 4k + 2 \\ 8, n = 4k + 3 \end{cases};$$

$$U(7^n) = \begin{cases} 1, n = 4k \\ 7, n = 4k + 1 \\ 9, n = 4k + 2 \\ 3, n = 4k + 3 \end{cases};$$

$$U(3^n) = \begin{cases} 1, n = 4k \\ 3, n = 4k + 1 \\ 9, n = 4k + 2 \\ 7, n = 4k + 3 \end{cases};$$

$$U(8^n) = \begin{cases} 6, n = 4k \\ 8, n = 4k + 1 \\ 4, n = 4k + 2 \\ 2, n = 4k + 3 \end{cases};$$

$$U(4^n) = \begin{cases} 6, n = 2k \\ 4, n = 2k + 1 \end{cases};$$

$$U(9^n) = \begin{cases} 1, n = 2k \\ 9, n = 2k + 1 \end{cases}.$$

Exemple:

1. $U(3^{2004}) = 1$, deoarece $2004 : 4 = 501$ și deci 2004 este de forma $4k$;
2. $U(75^{103}) = U(U(75)^{103}) = U(5^{103}) = 5$;

$$\begin{aligned}
 3. \quad U(23^{34} - 34^{23}) &= U[U(23^{34}) - U(34^{23})] = U\{U[U(23)^{34} - U(34)^{23}]\} = \\
 &= U[U(3^{34}) - U(4^{23})] = U(9 - 4) = 5.
 \end{aligned}$$

Exerciții propuse:

1. Să se arate că $A = 3^{40} - 2^{40}$ este divizibil cu 5.

2. Calculați ultima cifră a numărului:

$$A = 1001^{2004} + 1002^{2004} + 1003^{2004} + 1004^{2004}.$$

Numărul de divizori. Suma divizorilor

Fie dat numărul a descompus în factori primi:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

unde $p_1, p_2, \dots, p_n$ numere prime, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$.

Vom nota cu $n(a)$ - numărul divizorilor lui a și cu $s(a)$ - suma divizorilor săi.

Atunci avem:

$$n(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1)$$

și

$$s(a) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \dots \cdot \frac{p_n^{\alpha_n+1} - 1}{p_n - 1}$$

Exemple:

1. Pentru numărul 12 avem: $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ și deci $\text{card} D_{12} = 6$ (numărul de divizori) iar $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$ (suma divizorilor). Pe de altă parte putem scrie $12 = 2^2 \cdot 3^1$ și atunci $n(12) = (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6$, $s(12) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^2 - 1}{3 - 1} = \frac{7}{1} \cdot \frac{8}{2} = 28$.

2. Să se afle cel mai mic număr natural care are exact 15 divizori.

Soluție: Dacă notăm numărul căutat cu a și scriem $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_n^{\alpha_n}$ atunci $n(a) = (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1)$.

Cum $15 = 3 \cdot 5 \Rightarrow (\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) = 3 \cdot 5 \Rightarrow \alpha_1 = 2$ și $\alpha_2 = 4$. Pentru a obține cel mai mic număr punem $p_1 = 3$ și $p_2 = 2$ de unde $a = 2^4 \cdot 3^2 = 144$.

3. Determinați numărul natural N care are exact 6 divizori al căror produs este 8000.

Soluție: $D_N = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\}$, bineînțeles $d_1 = 1$ și $d_6 = N$.

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot d_4 \cdot d_5 \cdot d_6 = (d_1 \cdot d_6) \cdot (d_2 \cdot d_5) \cdot (d_3 \cdot d_4) = N \cdot N \cdot N = N^3.$$

Cum $N^3 = 8000 \Rightarrow N = 20$.

Exerciții propuse:

1. Calculați $n(a)$ și $s(a)$ unde $a = 1 + 2 + 3 + \dots + 2004$.
2. Determinați cel mai mic număr natural care are exact 12 divizori.
3. Determinați numărul natural N care are 4 divizori al căror produs este 225.

Despre produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$

Produsul primelor n numere naturale se numește factorialul lui n și se notează $n!$

Deci $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$

Vom nota cu $[a]$ parte întreagă a numărului a .

Exemplu: $[2, 7] = 2$; $\left[\frac{45}{2}\right] = 22$ (câtul împărțirii lui 45 la 2).

Descompunerea numărului $n!$ în factori primi este:

$$n! = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m},$$

unde p_m este cel mai mare număr prim, mai mic decât n și:

$$\alpha_1 = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \dots$$

$$\alpha_2 = \left[\frac{n}{3}\right] + \left[\frac{n}{3^2}\right] + \left[\frac{n}{3^3}\right] + \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\alpha_m = \left[\frac{n}{p_m}\right] + \left[\frac{n}{p_m^2}\right] + \left[\frac{n}{p_m^3}\right] + \dots$$

Exemplu:

1. Descompuneți în factori $10!$

Soluție: Numerele prime până la 10 sunt 2, 3, 5, 7. Atunci:

$$10! = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4}.$$

$$\alpha_1 = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{2^4} \right\rfloor + \dots = 5 + 2 + 1 + 0 + \dots = 8;$$

$$\alpha_2 = \left\lfloor \frac{10}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{3^3} \right\rfloor + \dots = 3 + 1 + 0 + \dots = 4;$$

$$\alpha_3 = \left\lfloor \frac{10}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{5^2} \right\rfloor + \dots = 2 + 0 + \dots = 2;$$

$$\alpha_4 = \left\lfloor \frac{10}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{10}{7^2} \right\rfloor + \dots = 1 + 0 = 1.$$

Deci $10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1$.

2. În câte zerouri se termină $20!$?

Soluție: $20! = 2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot p$ (ne interesează doar puterile lui 2 și 5).

$$\alpha_1 = \left\lfloor \frac{20}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{2^5} \right\rfloor + \dots = 10 + 5 + 2 + 1 + 0 + \dots = 18;$$

$$\alpha_2 = \left\lfloor \frac{20}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{20}{5^2} \right\rfloor + \dots = 4 + 0 + \dots = 4.$$

Atunci $20! = 2^{18} \cdot 5^4 \cdot p = (2 \cdot 5)^4 \cdot 2^{14} \cdot p = 10^4 \cdot 2^{14} \cdot p \Rightarrow 20! = \overline{\dots 0000}$

(ultimele patru cifre sunt zero).

Exerciții propuse:

1. Descompuneți în factori $14!$

2. În câte zerouri se termină $50!$? Dar numărul

$$A = 50 \cdot 51 \cdot \dots \cdot 100?$$

Prof. Prunescu Romeo

Teorema Pitagora generalizată

Fie triunghiul ABC oarecare. Atunci:

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)}, \text{ dacă } m(\angle A) < 90^\circ$$

sau

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)}, \text{ dacă } m(\angle A) > 90^\circ.$$

Analog se exprimă latura AB și AC, în funcție de celelalte două și cosinusul unghiului care i se opune.

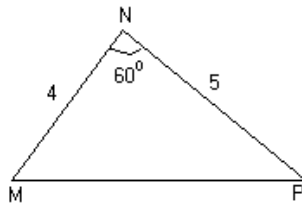
Exemplu: Fie triunghiul PMN oarecare, $MN = 4$ cm; $PN = 5$ cm; $m(\angle N) = 60^\circ$. Calculați MP.

Soluție:

$$MP^2 = MN^2 + NP^2 - 2 \cdot MN \cdot NP \cdot \cos(\angle N) =$$

$$= 16 + 25 - 2 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 21$$

$$\Rightarrow MP = \sqrt{21} \text{ cm.}$$



Exercițiu: În triunghiul ABC se cunosc $AB = 5 \text{ cm}$; $BC = 3 \text{ cm}$ și $m(\angle B) = 45^\circ$. Calculați AC.

Lungimea medianei

Fie triunghiul ABC oarecare în care notăm $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ și m_a - mediana dusă din vârful A. Atunci

$$m_a^2 = \frac{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}{4}. \text{ Analog se determină } m_b \text{ și } m_c.$$

Example: 1. Fie triunghiul ABC cu $AB = 2 \text{ cm}$, $AC = 3 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$. Dacă BB' este mediana din vârful B, calculați BB' .

Soluție: Conform formulei care dă lungimea medianei avem

$$BB'^2 = \frac{2 \cdot (AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{31}{4}, \text{ de unde } BB' = \frac{\sqrt{31}}{2} \text{ cm.}$$

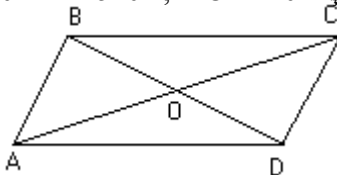
2. În paralelogramul ABCD se cunosc $AB = 5 \text{ cm}$, $BC = 4 \text{ cm}$ și $AC = 7 \text{ cm}$. Să se calculeze BD.

Soluție: Dacă $BD \cap AC = \{O\}$, atunci BO este mediană în triunghiul BAC și

$$BO^2 = \frac{2 \cdot (AB^2 + BC^2) - AC^2}{4} = \frac{33}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO = \frac{\sqrt{33}}{2} \text{ cm. Cum } O \text{ este mijlocul diagonalei } BD, \text{ rezultă}$$

$$BD = 2 \cdot BO \Rightarrow BD = \sqrt{33} \text{ cm.}$$



Exercițiu: a) Să se calculeze lungimile medianelor triunghiului ABC știind că $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 7$.

b) Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC, calculați lungimile segmentelor AG, BG, CG.

Lungimea bisectoarei

Fie ABC un triunghi, [AD bisectoarea interioară a unghiului $\angle BAC$, $D \in (BC)$. Atunci:

$$AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

unde p este semiperimetrul triunghiului ($p = \frac{a+b+c}{2}$).

Exemplu: Fie triunghiul ABC în care $AB=2$, $BC=3$, $AC=4$ și [BD bisectoarea interioară a unghiului $\angle B$, $D \in AC$. Calculați BD.

Soluție: $p = \frac{AB+BC+AC}{2} = 4,5$. Conform formulei care dă lungimea

bisectoarei avem: $BD^2 = \frac{4 \cdot AB \cdot BC}{(AB+BC)^2} \cdot p(p-AC) = 2,16 \Rightarrow BD = 1,46$

Exercițiu: Să se calculeze lungimile bisectoarelor triunghiului dreptunghic ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$) în care $AB=3$ cm, $BC=4$ cm.

Prof. Pomană Liviu

Etapale rezolvării problemelor

Rezolvarea oricărei probleme trece prin mai multe etape. În fiecare din aceste etape, datele problemei apar în combinații noi și are loc un proces de reorganizare a datelor și de reformulare a problemei.

Etapale rezolvării problemelor sunt:

- A. Cunoașterea enunțului problemei;
- B. Înțelegerea enunțului problemei;
- C. Analiza problemei și întocmirea planului logic;
- D. Alegerea și efectuarea operațiilor corespunzătoare succesiunii judecăților din planul logic;
- E. Activități suplimentare:
 - a) verificarea rezultatului;
 - b) scrierea sub formă de exercițiu;
 - c) găsirea altei căi sau metode de rezolvare;
 - d) generalizare;
 - e) compunerea de probleme după o schemă ajutătoare.

A. Cunoașterea enunțului problemei

Este etapa de început în rezolvarea oricărei probleme. Cunoașterea enunțului problemei se realizează prin citirea de către elevi a problemei, urmează repetarea problemei de mai multe ori și scrierea datelor problemei la tablă și în caiet.

B. Înțelegerea enunțului problemei

Enunțul problemei conține un minim necesar de informații. Datele și condiția problemei reprezintă termenii de orientare a ideilor, a analizei și sintezei, precum și a generalizărilor ce se fac treptat pe măsură ce se înaintează spre soluție. Întrebarea problemei indică direcția în care trebuie să se orienteze formularea ipotezelor.

C. Analiza problemei și întocmirea planului logic

Este etapa în care se produce eliminarea aspectelor ce nu au semnificație matematică și se elaborează reprezentarea matematică a enunțului problemei. Aceasta este faza în care se construiește raționamentul prin care se rezolvă problema; drumul de legătură între datele problemei și necunoscută. Prin exercițiile de analiză a datelor, a semnificației lor, a relațiilor dintre ele și a celor dintre date și necunoscute se ajunge să ne ridicăm de la situațiile concrete pe care le reprezintă problema (“a parcurs ... kilometri”, “a cumpărat ... kilograme”, “a costat ... lei kilogramul” etc.) la nivelul abstract care vizează relațiile dintre parte și întreg; viteză, distanță, timp; cantitate, preț, valoare etc.

D. Alegerea și efectuare operațiilor corespunzătoare succesiunii din planul logic

Această etapă constă în alegerea și efectuarea calculelor din planul de rezolvare, în conștientizarea semnificației rezultatelor parțiale ce se obțin prin calculele respective și, evident, a rezultatului final.

E. Activități suplimentare după rezolvarea problemei

Această etapă constă în verificarea soluției problemei, în găsirea și a altor metode de rezolvare și de alegere justificată a celei mai bune. Este etapa prin care se realizează și autocontrolul asupra felului în care s-a însușit enunțul problemei, asupra raționamentului realizat și a demersului de rezolvare parcurs.

Procesul de rezolvare a problemelor antrenează în sistem elementele ajunse la automatizare, dar mai ales controlează elemente a căror acțiune trebuie să rămână în permanență sub controlul conștiinței.

Înv. Radu Dorina

MEDALION

THALES DIN MILET (620-550 î.Hr.)

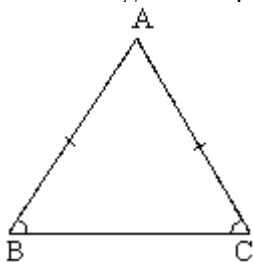
Astronom și fizician grec, este considerat ca fiind primul între Cei Șapte Înțelepți ai Greciei.

Lui i se atribuie primele măsurători exacte ale timpului. El este cel care ar fi adus din Egipt fundamentele geometriei. În lucrările sale apare pentru prima dată demonstrația ca mijloc de investigare matematică. Se presupune că este primul care a construit demonstrații elementare pornind de la axiome.

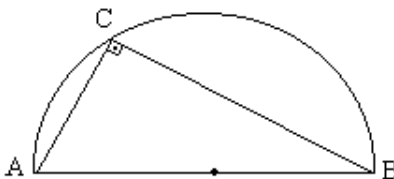
O paralelă la una din laturile unui triunghi, determină pe celelalte două laturi segmente proporționale

pare a fi a lui Euclid, Thales a fost primul care a demonstrat că:

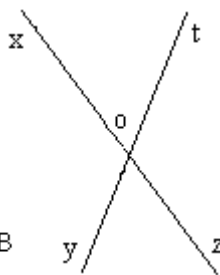
- diametrul împarte cercul în două părți congruente;
- unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente;
- toate unghiurile înscrise într-un semicerc sunt unghiuri drepte;
- unghiurile opuse la vârf sunt congruente.



$$AB = AC \Rightarrow$$
$$m(\angle B) = m(\angle C)$$



$$m(\angle ACB) = 90^\circ$$



$$(\angle xoy) = (\angle zot)$$

Știați că ...

... Thales a prevăzut cu o deosebită precizie eclipsa de Soare din 28 mai 585 î.Hr?

... lui Thales i se atribuie și următoarele cuvinte înțelepte: “abține-te să faci ceea ce critici la alții?”

... filozoful grec Socrate a considerat maxima lui Thales, “Cunoaște-te pe tine însuși” ca principiu fundamental al gândirii sale, numită mai târziu, socratică?

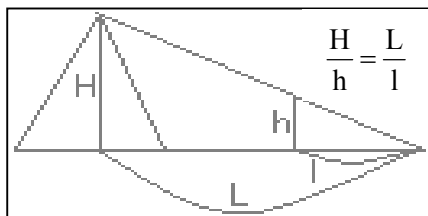
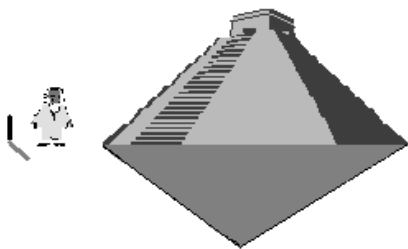
La ce folosește teorema lui Thales?

Legenda spune că Thales ar fi aplicat proprietățile teoremei ce-i poartă numele în timpul unui voiaj la piramide, când a dorit să afle înălțimea piramidei lui Keops.

Măsurând un baston, umbra lui și umbra mării piramide, ar fi aflat imediat înălțimea mării piramide din proporția:

$$\frac{H_{\text{PIRAMIDA}}}{H_{\text{BASTON}}} = \frac{U_{\text{PIRAMIDA}}}{U_{\text{BASTON}}}$$

încântându-l astfel pe regele Egiptului.

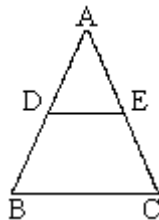


Teorema lui Thales și **teorema reciprocă** ei:

Dacă o dreaptă taie laturile unui triunghi în părți proporționale, atunci acea dreaptă este paralelă cu cea de-a treia latură a triunghiului.

Dacă $D \in (AB)$; $E \in (AC)$ și $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$;

atunci: $DE \parallel BC$.



sunt utilizate în viața practică pentru:

- calcularea unor lungimi;
- împărțirea în părți proporționale;

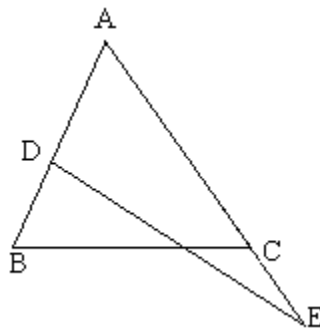
iar ca metode în geometrie:

- pentru a demonstra că două drepte, suport a două segmente, sunt paralele;
- pentru a calcula lungimile unor segmente.

Unde este greșeala?

În figura alăturată se cunosc:
 $AD = 4$, $DB = 2$, $AC = 6$, $CE = 3$ și
evident DE și BC nu sunt paralele

Și totuși, deoarece $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CE}$
conform teoremei reciproce a lui Thales
avem $DE \parallel BC$. Unde s-a greșit?

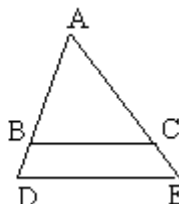
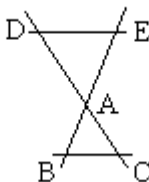
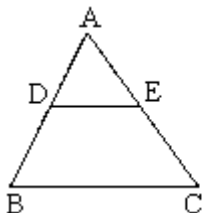


O teoremă mai cuprinzătoare decât teorema lui Thales este:

Teorema fundamentală a asemănării

O paralelă la una din laturile unui triunghi, formează cu celelalte două laturi (sau cu prelungirile lor) un triunghi asemenea cu cel dat.

$$D \in AB, E \in AC, DE \parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad (\triangle ADE \sim \triangle ABC)$$

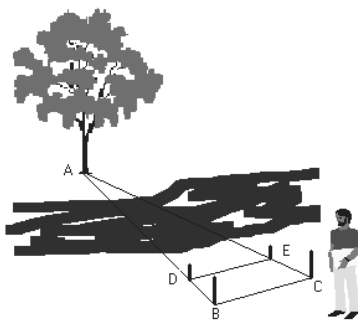


O problemă practică interesantă

Aflarea distanței la un loc inaccesibil folosind teorema fundamentală a asemănării.

Aflarea distanței de la un observator situat în punctul B de pe un mal la copacul A de pe celălalt mal.

Se realizează din țărugi, conform desenului de mai jos, un triunghi ABC și un segment $DE \parallel BC$, astfel încât punctele A, D, B și A, E, C să fie coliniare.



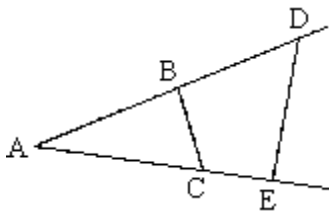
Din teorema fundamentală a asemănării, pentru triunghiul ABC și paralela DE la latura BC avem:

$$\frac{AD}{AD + DB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD = \frac{DE \cdot DB}{BC - DE}.$$

Toate lungimile DE, DB, BC, pot fi măsurate, fiind pe același mal.

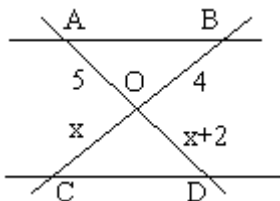
Unde este greșeala?

În figura alăturată $AB = 51$, $BD = 17$, $BC = 30$, $DE = 40$ și evident BC nu este paralel cu DE. Și totuși, deoarece $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$ conform reciprocei teoremei lui Thales se obține $BC \parallel DE$ (?). Unde s-a greșit?

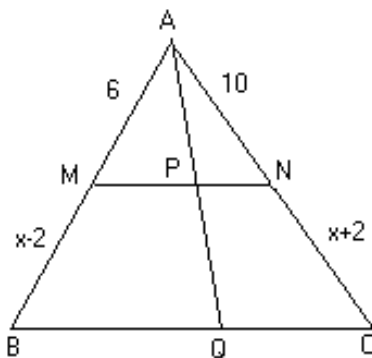


Probleme cu cele trei teoreme

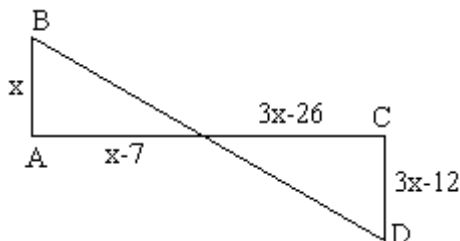
1. Folosind desenul alăturat, dacă $AB \parallel CD$, aflați pe x!



2. În figura alăturată $MN \parallel BC$. Demonstrați că $AP = PQ$!



3. Calculați BD din figura alăturată!



4. Fie M și N mijloacele laturilor AB și CD ale patrulaterului convex ABCD, iar O intersecția diagonalelor sale. Dacă MN trece prin O atunci $AB \parallel CD$.
5. Patrulaterul ABCD este un trapez oarecare cu $AB \parallel CD$, iar O este intersecția diagonalelor. Paralela prin O la baze taie laturile neparalele în M și N. Arătați că $\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{MN}$.
6. Considerăm triunghiul ABC și $M \in (AB)$, $N \in (AC)$, iar $BN \cap CM = \{E\}$. Dacă $MA = 2MB$ și $3MC = 5EC$, atunci $MN \parallel BC$.
7. În trapezul ABCD ($AB \parallel CD$) se consideră $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$ astfel încât $MN \parallel AB$. Arătați că $DC \cdot MA + AB \cdot MD = MN \cdot AD$.

Figuri geometrice cu elemente inaccesibile

Sunt mii de ani de când pe pământul însořit al ELADEI, nu departe de oraşul METROS, există o colonie pe numele ei POLIGONIA.

Şi era alcătuită această colonie din triunghiuri, patrulateri şi tot felul de poligoane, care trăiau în bună înţelegere, pace şi preţuire reciprocă.

Cel mai numeros era aici neamul TRIGON, alcătuit numai din figuri cu trei laturi şi trei unghiuri: triunghiurile.

Deşi păreau cele mai modeste, dacă reuşeai să te împrieteneşti cu ele, şi nu era greu, aflai că pe lângă cele trei laturi şi cele trei unghiuri, fiecare triunghi mai avea multe segmente şi puncte ce le dădea armonie, distincţie, farmec, frumuseţe şi mister. Trei mediane, trei bisectoare, trei înălţimi, un centru de greutate, un perimetru, o arie erau nelipsite din fiecare triunghi. Fiind toate descendente ale aceleiaşi familii, aveau triunghiurile multe caracteristici comune cu care se mândreau, dar şi unele care le individualizau în interiorul ei.

Şi mai aveau triunghiurile şi unele proprietăţi ascunse care le dezvăluiau numai prietenilor adevăraţi, cei care şi-au petrecut o bună parte din viaţă printre ele.

Patrulateralele cu patru vârfuri şi patru laturi, păreau mai complicate şi aveau un aer mai sofisticat. Mândria fiecărui patrulater erau în primul rând cele două segmente pe care triunghiurile nu le puteau avea: diagonalele.

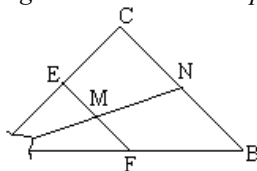
Şi se mai spune că în POLIGONIA existau unele legi foarte stricte, dar drepte: “singurele instrumente de lucru acceptate în POLIGONIA sunt rigla negradată, compasul şi creionul” suna o lege, despre care legendele vor spune mai târziu că-i aparţinea lui Platon şi care lege n-a fost niciodată încălcată.

Deşi între membrii coloniei nu existau dispute şi POLIGONIA nu mai cunoscuse de multă vreme războiul, se mai întâmpla, de cele mai multe ori, din neatenţie, ca vreun triunghi sau patrulater să-şi piardă un colţ sau două şi uneori, vai (!), toate cele trei sau patru colţuri.

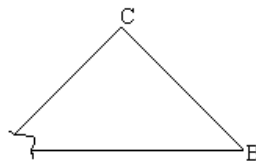
Dar, în vremea aceea trăia în oraşul METROS un înţelept pe numele său GEO, căruia îi spuneau GEO din METROS, sau mai simplu GEOMETROS.

GEOMETROS era un mare prieten al triunghiurilor şi al patrulaterelor şi se întreţinea ore în şir cu ele, cunoscându-le toate calităţile şi defectele, un fel de medic sau poate vraci al comunităţii, la care veneau figurile de câte ori aveau necaz. Şi în înţelepciunea lui, GEOMETROS avea câte un răspuns pentru fiecare problemă de-a lor.

- Ce mă fac GEOMETROS, de când mi-am pierdut colțul A, se plânse într-o zi un oarecare triunghi ABC, nu mai pot să-mi regăsesc mediana care pleacă din acel vârf! Mă ajuți?



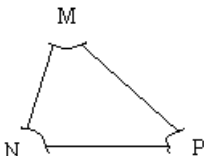
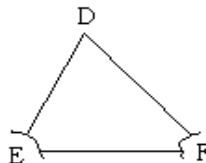
Iată ce rețetă i-a prescris înțeleptul, după câteva minute de chibzuință: "Duci o paralelă EF la BC,



stabilești punctele M și N, mijloacele segmentelor EF și respectiv BC. Punctele M și N determină mediana din A."

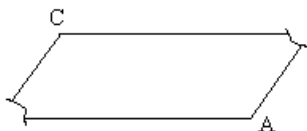
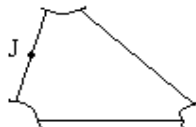
Dar nu știu ce s-a întâmplat în una din zile, că trei triunghiuri și două patrulatere au cerut în același timp sfatul lui GEOMETROS.

- Eu, preaînțeleptule, spuse triunghiul DEF, mi-am pierdut colțurile E și F acum câteva zile. Zadarnic încerc de-atunci să-mi regăsesc centrul de greutate...



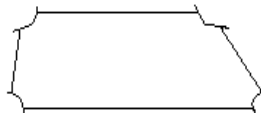
- Iar mie, se grăbi să intervină triunghiul MNP, mi-au dispărut toate cele trei colțuri. Dacă se mai poate, a-și dori să-mi regăsesc măcar ortocentrul pierdut!

- Nici eu nu mai am nici unul din colțuri și aș vrea să aflu perimetrul pe care l-am avut. Singurul lucru pe care mi-l mai amintesc este mijlocul unei laturi, punctul J, interveni al treilea triunghi.



- Vreau să spun și eu ceva, începu cu timiditate un paralelogram. Mi-am pierdut colțurile B și D. A-și vrea să-mi recapăt diagonalele.

- Și eu a-și vrea să-mi recapăt diagonalele, deși mi-am pierdut toate cele patru colțuri, se plânse în cele din urmă un trapez.



Ați putea ca în locul lui GEOMETROS să prescrieți cele cinci rețete pentru cele trei triunghiuri și două patrulatere și să le redați liniștea?

PROBLEME PROPUSE
- TESTE GRILĂ -

CLASA A II-a

□ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

Ce rezultate obținem rezolvând următorul exercițiu?

$$19 + 37 - (18 + 19 + 18) =$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.2 – punctaj: 3p

Ce rezultate obținem rezolvând următorul exercițiu?

$$101 - 42 + 397 - 0 =$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.3 – punctaj: 3p

Ce rezultate obținem rezolvând următorul exercițiu?

$$800 - (1000 - 799 + 182) =$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Care este valoarea lui a?

$$159 + 547 - a = 700 - 214$$

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr.5 – punctaj: 4p

Mă gândesc la un număr din care scad 14, adun apoi 79 și mai scad 1. Voi obține 302. La ce număr m-am gândit?

a)

238

b)

366

c)

395

d)

394

❑ Problema nr.6 – punctaj: 4p

Suma a trei numere este 71. Suma primelor două este 58, iar suma ultimelor două este 44. Care sunt cele trei numere?

a)

27,13,31

b)

23,35,13

c)

31,13,27

d)

13,23,35

❑ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Aflați $a + b - c$ știind că: $117 - a = 98 - b = 32 + c = 61$.

a)

56

b)

64

c)

46

d)

29

❑ Problema nr. 8 – punctaj: 5p

Ana și Ilinca au împreună 87 de fluturași. Câți fluturași are fiecare dacă Ilinca are cu 37 fluturași mai mulți decât Ana?

a)

50,37

b)

40,47

c)

25,62

d)

32,55

❑ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

Calculați suma $a + b + c + d$, știind că a, b, c, d sunt numere pare consecutive și $b + c = 42$.

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Din triplul lui 75 luați jumătatea lui 60 și măriți rezultatul cu dublul lui 135. Cât veți obține?

a)

b)

c)

d)

CLASA A III-a

□ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

Ce rezultat obținem rezolvând exercițiul următor?

$$10 + 18 \times 0 + 0 - 5 \times 0 + 16 : 1 =$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.2 – punctaj: 3p

Ce rezultat obținem rezolvând exercițiul următor?

$$6 + (81 : 9 \times 9 - 9) + 199 - 199 \times 1 =$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.3 – punctaj: 3p

Ce rezultat obținem rezolvând exercițiul următor?

$$[(271 - 169) : 2 + (280 + 120) : 4] \times 2 =$$

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Care este valoarea lui a ?

$$[(a + 2) \times 2 + 2] \times 2 + 2 = 46$$

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr.5 – punctaj: 4p

Aflați latura unui pătrat care are suma laturilor egală cu 108 cm.

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr.6 – punctaj: 4p

Un sfert din jumătatea distanței dintre două localități este 217 km. Care este distanța dintre cele două localități?

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Suma dintre un număr, dublul său și triplul său este 330. Care este numărul?

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr. 8 – punctaj: 5p

În trei saci se află o cantitate de 400 kg făină. Dacă în al doilea sac se află o cantitate de două ori mai mare decât în primul sac și

cu 25 kg mai puțin decât în al treilea sac, care este cantitatea de făină din al doilea sac?

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

Suma a 248 lei este plătită în monede de 3 lei și de 5 lei, numărul monedelor de 3 lei fiind egal cu al celor de 5 lei. Aflați câte monede de fiecare fel sunt?

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Doi cai și șapte oi consumă zilnic 65 kg de nutreț. Consumul unui cal este cu 10 kg pe zi mai mare decât al unei oi. Câte kg de nutreț consumă zilnic un cal?

- a) b) c) d)

CLASA A IV-a

□ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

Ce rezultat obținem rezolvând următorul exercițiu?

$$(2 - 1) \cdot [(1 - 0 \cdot 2) : 1 - 0] =$$

- a) b) c) d)

□ Problema nr.2 – punctaj: 3p

Ce rezultat obținem rezolvând următorul exercițiu?

$$2 + 2 \cdot 2 + 2 : 2 + 22 : 1 + 0 : 22 + 2222 : 1 + 0 : 222222 =$$

- a) b) c) d)

□ Problema nr.3 – punctaj: 3p

Ce rezultat obținem rezolvând următorul exercițiu?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 98 + 99 =$$

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Află termenul necunoscut din egalitatea:

$$2 + 2 \cdot \{2 + 2 \cdot [2 + 2 \cdot (2 - 2 : a)]\} = 22$$

- a) b) c) d)

□ Problema nr.5 – punctaj: 4p

Dacă adaug 3 la fiecare dintre vecinii unui număr, suma acestora cu numărul devine 207. La ce număr m-am gândit?

- a) b) c) d)

□ Problema nr.6 – punctaj: 4p

Într-o clasă sunt 35 de elevi. Câți băieți sunt în clasă, dacă numărul fetelor este încă o dată și jumătate din numărul băieților?

-
-
- a) b) c) d)

□ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Într-o curte sunt găini și porci, în total 28 de capete și 64 de picioare. Câte păsări și câți porci sunt?

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 8 – punctaj: 5p

Suma a cinci numere naturale este 242. Câțul dintre al doilea număr și primul număr este 3. Același cât se păstrează între al treilea și al doilea, al patrulea și al treilea, al cincilea și al patrulea. Aflați al patrulea număr.

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

În timp ce câinele face 2 sărituri, iepurele face 3, iar 5 sărituri de-ale iepurelui fac cât 2 sărituri de-ale câinelui. Câte sărituri trebuie să facă un câine pentru a ajunge un iepure care este la 75 de sărituri în fața lui?

- a) b) c) d)

❑ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Pentru 8 kg de mere și 5 kg de portocale s-au plătit 326 lei, iar pentru 4 kg de mere și 3 kg de portocale s-au plătit 182 lei. Care este prețul unui kg de mere?

a)

b)

c)

d)

CLASA A V-a

❑ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

Știind că $x + y = 23$ și $y + z = 25$ atunci rezultatul calculului $5x + 7y + 2z$ este:

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr.2 – punctaj: 3p

Cifra “a” din sistemul zecimal care verifică egalitatea:

$$\overline{aaa} + \overline{aa} + a = 369 \text{ este:}$$

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr.3 – punctaj: 3p

Perimetrul unui dreptunghi este 64 cm, iar lungimea este cu 2 mai mare decât triplul lățimii. Aria dreptunghiului este egală cu:

a)

b)

c)

d)

❑ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Ordinea crescătoare a numerelor:

$$a = \left[(3^2)^3 : 3^5 \cdot (3^4 + 3^4) \right]^4 : 3^2 ;$$

$$b = \left[(2^8 \cdot 4^6 : 8^5)^2 \right]^3 \cdot 8 ;$$

$$c = (2^{15} \cdot 5^{15})^2 : (10^{10})^2 \cdot 10^{2005^0} \text{ este:}$$

a)

b c a

b)

a b c

c)

c b a

d)

c a b

❑ Problema nr.5 – punctaj: 4p

Numărul “x” care verifică egalitatea:

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 + x = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$$

este:

a)

50

b)

51

c)

49

d)

52

❑ Problema nr.6 – punctaj: 4p

Suma tuturor numerelor naturale care dau câtul 130 la împărțirea cu 7 este:

a)

3961

b)

6391

c)

9361

d)

9136

❑ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Numărul “n” care verifică egalitatea:

$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 448 \text{ este:}$$

a)

4

b)

5

c)

6

d)

7

□ Problema nr. 8 – punctaj: 5p

Fie mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2005} < x \leq 2^{2006}\}$. Cardinalul mulțimii

A este:

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

În câte zerouri se termină produsul: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 50$?

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Ultima cifră a numărului:

$$3^{2005} + 4^{2005} + 5^{2005} + 6^{2005} \text{ este:}$$

a)

b)

c)

d)

CLASA A VI-a

□ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

După două reduceri consecutive de prețuri, prima de 15%, iar a doua de 20%, un obiect costă 83300 lei. Care a fost prețul inițial?

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.2 – punctaj: 3p

Fie punctele A, O, B coliniare. De aceeași parte a dreptei AB se duc semidreptele (OC și (OD perpendiculare, astfel încât

$m(\widehat{BOD}) = 2 \cdot m(\widehat{AOC})$. Dacă (OE este opusă lui (OC, care este măsura unghiului dintre bisectoarele unghiurilor AOC și BOE?

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.3 – punctaj: 3p

Se dă $a = 2^{1990} - 2^{1989} - 2^{1988}$. Să se afle x din proporția

$$\frac{a}{x} = \frac{4^{993}}{0,25}.$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Fie triunghiul ABC dreptunghic cu ipotenuza BC și $m(\widehat{C}) = 30^\circ$.

Dacă AD este înălțime și $AB = x$, să se afle DC.

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.5 – punctaj: 4p

Știind că $\frac{3a}{2b} = \frac{5}{4}$; $\frac{3b}{5c} = \frac{6}{7}$ și $a + b + c = 1672$, aflați $2a - b + c$.

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.6 – punctaj: 4p

Fie I punctul de intersecție al bisectoarelor unghiurilor unui triunghi ABC. Paralela prin I la BC intersectează AB în D și AC

în E. Dacă $AB = 4$ cm și $AC = 5$ cm, să se afle perimetrul triunghiului ADE.

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Calculați $|x| + |y|$ știind că $|x + y + 2| + |x - y| = 0$.

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 8 – punctaj: 5p

Fie triunghiul ABC cu $AB = 3$ cm. Mediatoarea segmentului AB intersectează dreapta BC în D astfel încât lungimea lui BD reprezintă 20% din lungimea lui BC și $AC = 4 \cdot AD$. Știind că raportul perimetrelor triunghiurilor ADC și ABC este $\frac{6}{7}$, aflați lungimea segmentului AD.

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

Aflați cea mai mică și cea mai mare valoare a expresiei:

$$E = 7 \cdot (-1)^{n+2} - 8 \cdot (-1)^{k+1} + 3 \cdot (-1)^{2p};$$

$$n, k, p \in \mathbb{N}.$$

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Fie triunghiul ABC dreptunghic $m(\hat{A}) = 90^\circ$; $m(\hat{B}) = 75^\circ$ și AD înălțime, $AD = 2$ cm. Calculați lungimea lui BC.

a)

b)

c)

d)

CLASA A VII-a

□ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

Soluția ecuației $x^2 = 6^3 + 20 + 21 + 22 + \dots + 37$ este:

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 2 – punctaj: 3p

În triunghiul dreptunghic ABC se cunosc: cateta $AB = 2\sqrt{3}$ cm și $m(\hat{B}) = 30^\circ$. Dacă BD este bisectoarea unghiului $\hat{B}$, $D \in (AC)$, atunci DC este egal cu:

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 3 – punctaj: 3p

Media aritmetică și media geometrică a numerelor

$$a = \left(3\frac{3}{5}\right)^{-1} + \sqrt{0,0(3) \cdot 0,8(3)} \quad \text{și} \quad b = 3\frac{1}{2} \cdot [0,125 - 0,25 + (-1)^{-6}]^{-1}$$

este:

a) $\boxed{\frac{20}{9}; \frac{4}{3}}$

b) $\boxed{\frac{10}{9}; \frac{4}{3}}$

c) $\boxed{\frac{20}{9}; \frac{5}{3}}$

d) $\boxed{\frac{10}{9}; \frac{5}{3}}$

□ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Raza cercului circumscris triunghiului ABC, care are laturile AB=22; BC=20; AC=18, este:

a) $\boxed{32}$

b) $\boxed{33\sqrt{2}}$

c) $\boxed{30}$

d) $\boxed{\frac{33\sqrt{2}}{4}}$

□ Problema nr. 5 – punctaj: 4p

Valorile reale a lui x și y pentru care:

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 52 = 0 \text{ sunt:}$$

a) $\boxed{3 \text{ și } 2}$

b) $\boxed{6 \text{ și } -4}$

c) $\boxed{5 \text{ și } -2}$

d) $\boxed{4 \text{ și } 0}$

□ Problema nr. 6 – punctaj: 4p

În trapezul ABCD de baze $AB \parallel CD$; $AB=36$ și $CD=12$, prin punctul O de intersecție al diagonalelor se duc paralelele $OM \parallel BC$ și $ON \parallel AD$ cu

$M, N \in (AB)$. Lungimea segmentului MN este egală cu:

a) $\boxed{16}$

b) $\boxed{17}$

c) $\boxed{18}$

d) $\boxed{19}$

□ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Valorile lui $n \in \mathbb{N}$; $n > 5$ pentru care:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \leq \frac{6}{7} \text{ sunt:}$$

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr.8 – punctaj: 5p

În paralelogramul ABCD se duce o secantă oarecare prin vârful B, care intersectează dreptele DC și AD în punctele M și N. Dacă AB=5 cm și BC=3 cm, atunci valoarea produsului MC · AN este:

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

Valorile numerelor reale a, b, c pentru care avem:

$$\sqrt{a^2 - 2a + 5} + \sqrt{b^2 - 4b + 13} + \sqrt{c^2 + 6c + 25} \leq 9$$

sunt:

a)

b)

c)

d)

□ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Raza cercului circumscris unui trapez isoscel, având baza mică congruentă cu laturile neoparalele și egală cu 12 cm, iar unghiurile ascuțite dintre diagonale de 60° este egală cu:

a)

b)

c)

d)

CLASA A VIII-a

□ Problema nr. 1 – punctaj: 3p

Un triunghi dreptunghic isoscel se îndoiaie de-a lungul înălțimii corespunzătoare ipotenuzei până când cele două plane devin perpendiculare. Măsura unghiului format de cele două catete după îndoire este:

- a) b) c) d)

□ Problema nr.2 – punctaj: 3p

Rezultatul calcului $0,002 : 10^{-3} + \sqrt{7} + \sqrt{5} - \frac{2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$

este:

- a) b) c) d)

□ Problema nr.3 – punctaj: 3p

Într-un paralelipiped dreptunghic, trei diagonale ale fețelor au lungimile de $\sqrt{17}$ cm, $2\sqrt{6}$ cm și 3 cm. Diagonala paralelipipedului are lungimea:

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 4 – punctaj: 3p

Dacă $(2x + y + 4)^2 + |3x - 2y - 1| = 0$, atunci $x + y$ este:

- a) b) c) d)

□ Problema nr.5 – punctaj: 4p

Fie ABCD un romb cu $m(\hat{A}) = 120^\circ$, $\{O\} = AC \cap BD$. Dacă $MO \perp (ABC)$, $AB = a$ și $MO = 2a$, atunci aria triunghiului MAB este:

- a) b) c) d)

□ Problema nr.6 – punctaj: 4p

Fie funcția liniară $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f(x-1) = 2x - 6 - f(-1)$, $(\forall)x \in \mathbb{R}$. Calculați distanța de la originea sistemului de axe la graficul funcției.

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 7 – punctaj: 4p

Fie $OA = OB = OC = a\sqrt{6}$ și $OA \perp OB \perp OC \perp OA$, atunci distanța de la punctul O la planul (ABC) este:

-
-
- a) b) c) d)

□ Problema nr. 8 – punctaj: 5p

Suma $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+100}$ este:

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 9 – punctaj: 5p

În paralelogramul ABCD se cunosc: $AB = 2 \cdot BC = 2a$ și $2 \cdot m(\hat{A}) = m(\hat{B})$. Fie punctul P situat în exteriorul planului paralelogramului, astfel încât $PA = PB = PC = a\sqrt{2}$. Calculați măsura unghiului dintre PD și planul (ABC).

- a) b) c) d)

□ Problema nr. 10 – punctaj: 5p

Să se rezolve ecuația $x^n - 1 = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{32}$ știind că

$$n = \sqrt{33} \cdot \sqrt{6 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} \cdot \sqrt{3 - \sqrt{3 + \sqrt{3}}}.$$

- a) b) c) d)

PROBLEME PROPUSE

CLASA I

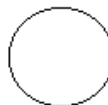
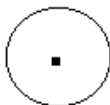
I.1. Completează căsuțele cu numerele care lipsesc:

0				4
---	--	--	--	---

5			2		
---	--	--	---	--	--

0					5
---	--	--	--	--	---

I.2. Unește fiecare mulțime cu numărul corespunzător:



5

1

3

0

4

2

I.3. Găsește numărul potrivit:

- Nu sunt mai mic decât 4;
- Nu sunt mai mare decât 6;
- Sunt vecinul mai mic al numărului 6;
- Cine sunt?

I.4. Desenează în vârful fiecărui brăduț câte o steluță în care să așezi o cifră corespunzătoare numărului de globulețe din fiecare brăduț.



I.5.

Sus pe deal lângă izvor

S-au lăsat acum din zbor
Patru berze și-un cocor.
Spuneți dacă ați ghicit
Câte păsări au sosit?

-
- I.6. Mama tata - sunt părinți,
Iar noi doi – băieți cumiști
Și mai este și bunica
Care-o crește pe Monica
Să ghicească cineva,
Câți sunt în familia mea?
- I.7. Eu, tu și el
Împreună cu cei patru
Dansăm toți cu Voinicel
Câți suntem acum în cadru?
- I.8. Ce număr impar este mai mare decât 5 și mai mic decât 9?

CLASA a II-a

- II.1. Ce număr este cu 4 mai mare decât suma numerelor 20 și 13?
- II.2. Un termen al adunării este 22. Suma este 46. Care este celălalt termen?
- II.3. Adaugă la diferența numerelor 45 și 31 succesorul lui 11.
- II.4. Scade din suma numerelor 41 și 58 cel mai mic număr impar scris cu două cifre.
- II.5. Aflați valorile lui a:
- $$25 + a = 69$$
- $$99 - a = 6$$
- $$a - 32 = 17$$
- $$a + 27 = 27$$
- II.6. Suma a două numere impare este 14. Care pot fi aceste numere?
Găsiți și verificați toate soluțiile posibile!
- II.7. Mă gândesc la un număr; scad din el 8, apoi 21 și obțin 10.
La ce număr m-am gândit?
- II.8. Într-o cutie sunt 11 bile roșii, 23 bile albe, iar bilele albastre sunt cu 4 mai multe decât cele roșii. Câte bile sunt în cutie?
- II.9. Dacă din cei 45 de trandafiri, vând 12 și apoi încă 13, câți trandafiri mai am de vândut?

CLASA a III-a

- III.1. Efectuați:
- $$901 - 3 \times [690 : 5 \times 6 - 16 \times (558 : 9 - 176 : 8)] : 6 =$$

III.2. Găsiți numerele de trei cifre care au suma cifrelor 25.

III.3. Din suma celui mai mare număr impar de trei cifre și a celui mai mic număr par de trei cifre, scade diferența lor.

III.4. Află termenul necunoscut, știind că dacă adunăm dublul unui număr cu 234 iar rezultatul obținut îl împărțim la 10, obținem 47.

III.5. Într-un coș sunt de patru ori mai puține pere decât prune. Dacă mai punem 16 pere și luăm 8 prune, atunci numărul prunelor devine egal cu cel al perelor.

Câte prune și câte pere au fost la început în coș?

III.6. Aflați numărul a , astfel încât:

$$\{[(a + 2) \times 2 + 2] \times 2 + 2\} \times 2 - 22 = 22$$

III.7. Două numere au diferența 18. Dacă se mărește fiecare cu 6, primul devine dublul celui de-al doilea. Aflați cele două numere.

III.8. Suma a două numere de două cifre este 44. Aflați numerele știind că unul din ele se împarte exact la celălalt.

III.9. Suma a trei numere naturale este 700. Dacă primul număr este egal cu dublul celui de-al doilea număr, iar acesta este triplul celui de-al treilea număr, aflați numerele.

CLASA a IV-a

IV.1. La ce număr trebuie împărțit numărul 2874 pentru a obține câtul 25 și restul 24?

IV.2. Aflați ultimele două cifre ale produsului următor:

$$1990 \times 1991 \times 1992 \times \dots \times 1999$$

IV.3. Suma a două numere este 6045 iar câtul lor este 4. Aflați numerele.

IV.4. Aflați numărul x , știind că:

$$\{[(x + 2) : 1992 + 1992] : 1993 + 1993\} : 1994 + 1994 = 1995$$

IV.5. Suma a șase numere este 2694. Primele trei sunt numere impare consecutive iar ultimele trei tot numere impare consecutive. Aflați numerele.

IV.6. Câtul dintre a și b este 4, câtul dintre b și c este 3, iar suma celor trei numere este 6400. Care sunt numerele?

IV.7. Un dreptunghi are dimensiunile exprimate prin numere naturale impare consecutive și perimetrul de 800 cm. Aflați lungimea și lățimea dreptunghiului.

IV.8. Diferența a două numere este 135, iar suma lor este de 5 ori numărul mic. Să se afle cele două numere.

IV.9. Un bazin dreptunghiular are perimetrul de 6636 m. Află dimensiunile bazinului știind că lățimea reprezintă o șesime din lungime.

CLASA V

1. Determinați fracțiile:

a) subunitare de forma $\frac{4n+5}{19}$, $n \in \mathbb{N}$;

b) echiunitare de forma $\frac{3n+5}{2n+11}$, $n \in \mathbb{N}$;

c) supraunitare de forma $\frac{17}{2n+5}$, $n \in \mathbb{N}$.

2. Determinați numerele $\overline{xy}$, astfel încât fracția $\frac{25}{x^2+y^2}$ să fie echiunitară.

3. Determinați fracțiile de forma $\frac{\overline{x6}}{2y}$, subunitare știind că $\overline{x6}$ este pătrat perfect și $\overline{2y}$ este divizibil cu 3.

4. Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că fracția $\frac{3^{n+1} - 3^n - 5 \cdot 3^{n-1}}{243}$ este echiunitară.

5. Determinați fracțiile de forma $\frac{\overline{ab}}{xy}$, echivalente cu $\frac{4}{7}$.

6. Determinați $n \in \mathbb{N}$ știind că fracțiile $\frac{2n-3}{5}$ și $\frac{3n+2}{8}$ sunt echivalente

7. Simplificați fracțiile:

a) $\frac{1+3+5+\dots+49}{2+4+6+\dots+50}$;

b) $\frac{2 \cdot 3 + 4 \cdot 6 + 6 \cdot 9 + \dots + 20 \cdot 30}{3 \cdot 5 + 6 \cdot 10 + 9 \cdot 15 + \dots + 30 \cdot 50}$.

8. Arătați că următoarele fracții sunt ireductibile:

$$\text{a) } \frac{7n+5}{4n+3}; \quad \text{b) } \frac{2n+1}{3n+2}; \quad \text{c) } \frac{5n+4}{6n+5}.$$

9. Arătați că fracția $\frac{n^2+5n}{n^2+3n+2}$ este reducibilă oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

10. Simplificați fracția: $\frac{2^{n+1} \cdot 3^n + 2^n \cdot 3^{n+1} + 6^{n+1}}{6^{n+1} - 5 \cdot 2^n \cdot 3^n}.$

11. Determinați $n \in \mathbb{N}$ astfel încât fracțiile următoare să fie numere naturale:

$$\text{a) } \frac{18}{2n+1}; \quad \text{b) } \frac{n+6}{n}; \quad \text{c) } \frac{n+8}{n+4}.$$

12. Aflați x din:

$$\text{a) } \frac{3}{10} + x = \frac{4}{5}; \quad \text{b) } \frac{5}{4} - x = \frac{1}{2}; \quad \text{c) } x + \frac{2}{3} = \frac{7}{5}; \quad \text{d) } x - \frac{1}{4} = \frac{5}{6}.$$

13. Arătați că: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{100}} = 2 - \frac{1}{2^{100}}.$

14. a) Verificați egalitatea: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)};$

$$\text{b) Calculați: } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2004 \cdot 2005}.$$

15. Determinați mulțimile:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{15} < \frac{n}{3} < \frac{7}{10} \right\}; \quad B = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{4}{7} < \frac{2}{n} < \frac{8}{5} \right\};$$

$$C = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{5n^2-3}{4} < \frac{2n^2+15}{2} \right\}; \quad D = \left\{ n \in \mathbb{N} \mid \frac{3}{5} < \frac{3}{n} < 3 \right\}.$$

16. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{1+2+3+\dots+500}{4+8+12+\dots+2000}$ arătați că $x = \frac{5b-2a}{10a-2b}$ este pătrat perfect.

17. Aflați elementele mulțimii $A = \left\{ x \mid \frac{\overline{3xx}}{x+3} \in \mathbb{N}, x - \text{cifră} \right\}.$

18. Cercetați dacă $\frac{\overline{xx9} + \overline{8x} + 7}{x9x + x6} \in \mathbb{N}$, unde x este cifră.

19. Determinați a, b, c, d astfel încât să avem egalitatea:

$$\frac{1}{a+b+c+d} = \frac{\overline{abc}}{10^4}$$

20. Un autoturism a parcurs un drum în trei zile. Știind că în prima zi a parcurs $\frac{1}{3}$ din drum, a doua zi $\frac{7}{12}$ din rest, iar a treia zi ultimii 500 km, aflați lungimea drumului.

CLASA VI

1. Aflați x din:

a) $\frac{x}{18} = \frac{4}{9}$; b) $\frac{x+1}{6} = \frac{5}{3}$; c) $\frac{0,5}{1,1} = \frac{x}{1,5}$; d) $\frac{10\left(1-\frac{1}{5}\right)}{x} = 8$; e) $\frac{\overline{x1}}{3} = \frac{\overline{8x}}{x}$;

f) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{3x}{2}$; g) $\frac{2^{2005} - 2^{2003} + 2^{2002}}{x} = \frac{4^{1001}}{3}$; h) $\frac{20 - 20 : 2}{3\left(\frac{1}{3} + 0,5\right)} = \frac{1}{x-1}$.

2. Dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, calculați: a) $\frac{2a}{a+b}$; b) $\frac{a+b}{b-a}$; c) $\frac{2a}{3b}$; d) $\frac{2a+3b}{5a+4b}$.

3. Dacă $\frac{2a+b}{3a-b} = \frac{5}{3}$, aflați $\frac{a}{b}$.

4. Determinați x, y, z știind că $\frac{3x}{4} = \frac{2y}{5} = \frac{4z}{3}$ și $x + y + z = 1$.

5. Determinați x, y, z direct proporționale cu 2, 3, 4 știind că:

a) $x + y + z = 45$; b) $2x + 3y + 4z = 145$; c) $xyz = 192$.

6. Știind că a, b, c sunt direct proporționale cu 2, 3 și 5 arătați că $ac - ab$ și $bc + ac$ sunt pătrate perfecte.

7. Determinați a, b, c știind că sunt invers proporționale cu 2, 3 și 6 și $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{6}{c} = 46$.

8. Trei muncitori au realizat o lucrare astfel: primul 40% din lucrare, al doilea $\frac{1}{3}$ din rest și încă 5% din rest, iar al treilea restul. Câți a primit fiecare dacă costul întregii lucrări a fost 12000000?

-
9. Aflați a , b , c , d știind că: $a=75\%c$, $b=50\%c$, $c=80\%d$ și $2a + b + 3c + 4d = 400$.
 10. Într-o urnă sunt 50 bile numerotate cu numere da la 1 la 50. Se extrage o bilă la întâmplare. Care este probabilitatea ca numărul bilei extrase să fie divizibil cu 2 și 3?
 11. În triunghiul ABC , $m(\hat{C}) = 90^\circ + m(\hat{B})$. Se construiește $AD \perp BC$, $D \in BC$. Arătați că $\hat{B}AD \equiv \hat{A}CD$.
 12. În triunghiul ABC înălțimile AD și BE se intersectează în H . Dacă $HD \equiv HE$, arătați că triunghiul este isoscel.
 13. Fie triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$, $D \in (BC)$ și $m(\hat{CAD}) = 20^\circ$. Știind că $AE \equiv AD$, $E \in (AB)$, calculați $m(\hat{BDE})$.
 14. În triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$, $m(\hat{A}) = 120^\circ$, M este mijlocul laturii AB . Perpendiculara din M pe BC intersectează AC în D . Arătați că: a) triunghiul DAM este echilateral; b) $CD = 3AD$.
 15. Fie triunghiurile echilaterale ABC , ABM , ACN și $\{P\} = MB \cap NC$.
 - a) arătați că M , A , N sunt coliniare.
 - b) dacă perimetrul triunghiului ABC este 12cm, calculați perimetrul triunghiului MNP .
 16. Fie triunghiul ascuțitunghic ABC cu $m(\hat{A}) = 60^\circ$, iar B' și C' picioarele înălțimilor din B și C . Dacă M este mijlocul laturii BC demonstrați că triunghiul $MB'C'$ este echilateral.
 17. În triunghiul ABC , $m(\hat{B}) = 60^\circ$ și $m(\hat{C}) = 20^\circ$. Calculați măsura unghiului determinat de înălțimea și bisectoarea triunghiului duse din A .
 18. Fie BB' și CC' mediane în triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$. Dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , arătați că:
 - a) AG este bisectoare unghiului $\hat{B}AC$;
 - b) $\hat{ABB'} \equiv \hat{ACC'}$;
 - c) $\hat{GBC} \equiv \hat{GCB}$.
 19. Fie triunghiul isoscel ABC , $AB \equiv AC$ și AM mediană. Demonstrați că $P_{\triangle ABM} = P_{\triangle ACM}$.
 20. În triunghiul ABC , G este centrul de greutate, $AC=6\text{cm}$, $BC=10\text{cm}$, $AG=4\text{cm}$. Dacă M este mijlocul lui (BC) calculați perimetrul triunghiului AMC .
-

CLASA VII

1. Să se efectueze:
 - a) $9x^3y^2z : (-3xy^2) + 2xz \cdot (-2x)$;
 - b) $(x^3y^5 - x^2y^3 + 5xy^2) : (-xy^2)$;
 - c) $\left(\frac{1}{9}a^2bc + \frac{5}{18}ab^2c^3\right) : (-0,3)abc$.
2. Utilizând formulele de calcul prescurtat, să se calculeze:
 - a) $(2x + 3y)^2 - (x - 3y)^2 - (2x + y)(2x - y)$;
 - b) $(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 - 2x - 2)^2$;
 - c) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$.
3. Descompuneți în factori:
 - a) $6x^4y^4z - 4x^3y^2z^4 + 8x^2y^3z^2$;
 - b) $x^4 + \frac{1}{4} + x^2$;
 - c) $2x^2 - 2\sqrt{10}x + 5$;
 - d) $(x + y)^2 - 2(x^2 - y^2) + (x - y)^2$;
 - e) $4x^4 + y^4$;
 - f) $3x(a - 1) + 3(1 - a) - 5a + 5$.
4. Dacă $a + \frac{1}{a} = 5$ să se calculeze $a^2 + \frac{1}{a^2}$.
5. Dacă $a^2 + 3a = -1$ să se calculeze $a^4 + 6a^3 + 12a^2 + 9a + 2$.
6. Efectuați:
 - a) $\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{6(x+1)}$;
 - b) $2x - 1 + \frac{x^2 - x^4}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$;
 - c) $\left(\frac{x}{3} - \frac{x+1}{y^2} : \frac{4x+4}{y^3} + \frac{x}{2}\right) : \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4}\right)$;
7. Fie fracția: $F(x) = \frac{5x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$ și numărul real a.

a) Calculați $F(2a+1)$;

b) Calculați $\frac{x^4-1}{x-1} - (x^3-1) \cdot F(x)$.

8. Fie expresia:

$$E(x, y) = \frac{x}{y^2 - x^2} : \left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} - \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \right) + \frac{1}{2(x+y)}$$

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Determinați $y \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(y+6) \cdot E(x, y) \in \mathbb{N}$.

9. a) Efectuați aducând la forma cea mai simplă expresia:

$$E(x) = (2x^2 + 3x - 2) \left[\left(\frac{1}{1-x} - 1 \right) : \left(1 - \frac{1-2x^2}{1-x} \right) \right]$$

b) Calculați $E(1) + E(2) + \dots + E(2005)$.

10. Se consideră expresia:

$$E(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$$

a) Să se scrie sub forma $E(x) = mx + n + \frac{p}{x-1}$, cu $m, n, p \in \mathbb{Z}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.

11. Dacă în triunghiul dreptunghic ABC, AD este înălțime, iar E și F sunt proiecțiile punctului D pe catetele AB și AC, să se demonstreze relația: $DB \cdot DC = FC \cdot FA + EB \cdot EA$.

12. Fie ABCD un trapez cu baza mică $AB = a$ și baza mare $CD = b$. pe latura AD se ia un punct M, astfel ca $\frac{MA}{MD} = \frac{p}{q}$. Prin M se duce paralela

MN la cele două baze. Să se calculeze MN în funcție de a, b, p, q .

13. Dacă M este un punct oarecare pe ipotenuza unui triunghi dreptunghic ABC să se demonstreze relația:

$$MB^2 \cdot AC^2 + MC^2 \cdot AB^2 = MA^2 \cdot BC^2.$$

14. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, avem $AB = 18$ cm și $AC = 24$ cm. Se notează cu M mijlocul ipotenuzei BC, iar cu N și P proiecțiile lui M pe catetele AB și AC. Dacă $AM \cap BP = \{O\}$, se cere:

a) Să se calculeze AO;

- b) Să se afle înălțimea NE a paralelogramului BMPN.
15. Într-un trapez ABCD raportul bazelor este $\frac{3}{5}$, iar înălțimea 6 cm. Dacă laturile neparalele se intersectează în F, aflați distanța de la F la bazele trapezului.
16. Într-un triunghi dreptunghic ABC, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, paralela dusă prin punctul D, mijlocul ipotenuzei BC, la cateta AB întâlnește înălțimea dusă din vârful A în punctul E. Arătați că $AD \perp CE$.
17. Fie P un punct pe diagonala BD a pătratului ABCD. Să se arate că perpendicularele din P, B și D pe AB, AP și CP se întâlnesc pe diagonala AC.
18. Se dă un trapez dreptunghic ABCD, cu unghiurile A și B drepte. $CD = 70$ cm, baza mică $AD = \frac{5}{4} \cdot CD$ și $AB = \frac{3}{5} \cdot CD$. Pe AB luăm punctul M astfel încât $AM = 12$ cm. Prin M se duce o paralelă la AD care întâlnește pe CD în N. Să se calculeze:
- Perimetrul trapezului;
 - Lungimile segmentelor ND și NC.
19. Triunghiul echilateral ABC și triunghiul dreptunghic DBC, $m(\hat{D}) = 90^\circ$, au latura BC comună, iar $BC = 18$ cm, $DC = 9$ cm. Să se calculeze AD.
20. Dacă triunghiul ABC este isoscel $AB \equiv AC$, demonstrați că
- $$BC = 2AB \cdot \cos\left(\frac{\hat{A}}{2}\right).$$

CLASA VIII

1. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \in (-\infty, -1] \\ 3, & x \in (-1, 0) \\ x + 3, & x \in [0, 5) \\ 2x - 2, & x \in [5, \infty) \end{cases}$$

Să se calculeze $f(-2)$; $f(-1)$; $f\left(-\frac{1}{2}\right)$; $f\left(\frac{-1}{5734}\right)$; $f(0)$; $f(1)$; $f(10)$.

2. Dacă $f : A \rightarrow B$, unde $A = \{0,1,2\}$, este definită prin $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, să se determine mulțimea valorilor lui f .
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 7x - 14$. Care din punctele de mai jos aparțin graficului acestei funcții?
4. Să se completeze domeniul de definiție, respectiv codomeniul, pentru funcțiile de mai jos:

a) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

b) $f : \{1,2,3\} \rightarrow B$, $f(x) = x^2 + x + 1$;

c) $f : \{-1,0,1\} \rightarrow B$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x = -1 \\ 2x - 5, & x = 0 \\ x - 1, & x = 1 \end{cases}$.

5. Să se reprezinte grafic funcțiile următoare:

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in (-\infty, -1) \\ x, & x \in [-1, 2] \\ 2, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$;

b) $f : \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ x - 2, & x \in [-1, 1] \\ 3x, & x > 1 \end{cases}$.

6. Să se determine funcția liniară al cărui grafic conține punctele $A(-3, -1)$ și $B(2, 4)$.
7. Să se determine funcția liniară $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care îndeplinește condiția: $2f(x) + 3f(1-x) = 4x - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
8. Să se rezolve ecuațiile:
 - a) $\frac{3x+2}{x-1} + \frac{2x+3}{1-x} = 0$;
 - b) $\frac{x-1}{x+1} = \frac{x-1}{x}$;

-
-
- c) $\frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{x}\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{x}\right) = 1;$
- d) $\frac{2x+1}{3x-2} - \frac{2x-1}{3-2x} - \frac{4x^2-3x+3}{6x^2-13x+6} = 1.$
9. Să se discute în funcție de parametrul real m ecuațiile:
- a) $mx + 5 = 3x - 15m;$
- b) $(m+6)x - 5 = 0;$
- c) $m^2x + 3 = 9x + m;$
- d) $x - m = \frac{x-1}{m};$
- e) $(m^2 + 2m - 15)x = m + 5;$
10. Să se rezolve ecuațiile de gradul al doilea:
- a) $x^2 - 3x + 2 = 0;$
- b) $4x^2 + 4x + 1 = 0;$
- c) $3x^2 - 2x - 1 = 0;$
- d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{2}{5} = 0;$
- e) $\sqrt{2}x^2 + (1 + \sqrt{2})x - 1 = 0.$
11. O prismă are baza un paralelogram cu dimensiunile 6 cm și 8 cm și unghiul ascuțit egal cu 60° . Știind că înălțimea prisme este 10 cm să se afle volumul prisme.
12. O prismă triunghiulară are ca bază un triunghi dreptunghic cu catetele de 5 cm și 12 cm. Muchiile laterale sunt egale cu 6 cm și fac cu planul bazei un unghi de 45° . Să se afle volumul prisme.
13. Se consideră piramida VABCD cu baza ABCD, un pătrat de latură a , și fețele laterale triunghiuri echilaterale. Să se determine (în funcție de a):
- a) funcțiile trigonometrice ale unghiurilor dintre fețele VAD și VAB;
- b) unghiul dintre VA și planul (ABC).
14. Fie OABC o piramidă triunghiulară cu muchiile $OA=30$ cm, $OB=40$ cm și $OC=70$ cm, perpendiculare două câte două. Să se afle distanța de la O la planul (ABC).
-
-

-
-
15. Printr-una din laturile bazei unei piramide triunghiulare regulate cu înălțimea $4\sqrt{3}$ cm și latura bazei 5 cm, se duce planul perpendicular pe muchia opusă. Să se calculeze aria secțiunii.
16. O piramidă patrulateră regulată are apotema bazei de a cm și unghiul pe care-l fac fețele laterale cu planul bazei este 60° . Să se calculeze aria laterală, aria totală, volumul și aria secțiunii diagonale.
17. Catetele unui triunghi dreptunghic sunt $AB = 30$ cm și $AC = 40$ cm. În vârful unghiului drept se ridică perpendiculara AS pe planul triunghiului $AS = 70$ cm. M fiind mijlocul ipotenuzei BC , se cere:
- a) Distanța de la S la BC ;
 - b) Aria laterală a piramidei $SABC$;
 - c) Arătați că piramidele $SAMB$ și $SAMC$ au volumele egale.
18. Un trunchi de piramidă are bazele pătrate cu laturile de 3 cm respectiv 5 cm. Volumul său este de 196 cm^3 . Să se calculeze înălțimea trunchiului precum și înălțimea piramidei din care provine.
19. Ariile bazelor unui trunchi de piramidă patrulateră regulată sunt S și s . aria secțiunii diagonale este semidiferența ariilor bazelor. Să se afle:
- a) Unghiul pe care muchia laterală îl formează cu planul bazei;
 - b) Aria totală a trunchiului.
20. O piramidă triunghiulară cu vârfurile V, A, B, C are $AB=AC$ și $VA=VB=VC=13$ cm, $BC=6$ și aria lui ABC este 27 cm^2 . Să se afle înălțimea piramidei și volumul trunchiului obținut prin secționarea piramidei cu un plan paralel cu baza ce trece prin mijlocul înălțimii.

MATEMATICĂ DISTRACTIVĂ

Curiozități



- Să admirăm câteva rezultate frumoase

$$\begin{array}{r} .123456789 + \\ 987654321 \\ \hline 111111110. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 987654321 - \\ 123456789 \\ \hline 864197532 \end{array}$$

$$123456789 \cdot 8 + 9 = 987654321$$

$$12345678 \cdot 8 + 8 = 98765432$$

$$1234567 \cdot 8 + 7 = 9876543$$

$$123456 \cdot 8 + 6 = 987654$$

$$12345 \cdot 8 + 5 = 98765$$

$$1234 \cdot 8 + 4 = 9876$$

$$123 \cdot 8 + 3 = 987$$

$$12 \cdot 8 + 2 = 98$$

$$1 \cdot 8 + 1 = 9$$

- Observați!

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

$$1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$$

$$1233 = 12^2 + 33^2$$

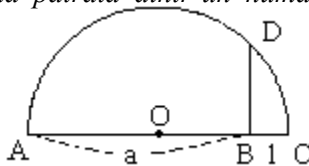
$$8833 = 88^2 + 33^2$$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$$

- Scriind sub forma unui triunghi numerele impare, suma fiecărei linii este egală cu cubul numărului care reprezintă linia.

		1				1
		3		5		8
	7		9		11	27
13	15	17	19			64
.....						

- Cum extrăgea Leonardo da Vinci rădăcina pătrată dintr-un număr pozitiv a ? Construia un segment AB de lungime a pe care-l prelungea cu un segment BC de lungime 1. Cu diametrul AC construia un semicerc. În B ducea o perpendiculară pe AC care tăia semicercul în D. Conform teoremei înălțimii în triunghiul dreptunghic ADC, $DB = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{a}$!?



- Curiozități cu fracții și radicali

$$\frac{11}{3} + \frac{11}{8} = \frac{11}{3} \times \frac{11}{8}$$

$$\sqrt{3\frac{3}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

$$\sqrt{7\frac{7}{48}} = 7\sqrt{\frac{7}{48}}$$

- Să simplificăm și altfel

$$\frac{2666}{6665} = \frac{266}{665} = \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{3544}{7531} = \frac{344}{731}$$



- ❑ Am urmărit într-un magazin următorul dialog:

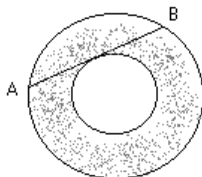
- Cât costă unul?
- Două mii de lei.
- Cât costă douăzecișitrei?
- Patru mii lei.
- Dați-mi patrusutecincizecișase!
- Plățiți la casă șase mii lei!

Ce a cumpărat clientul?

- ❑ Găsiți o relație matematică pentru toate numerele mai puțin 5, 17 și 523.
- ❑ Să se scoată unu din 19 și să rămână 20!?
- ❑ Stabiliți egalitatea fără a atinge vreun chibrit!?

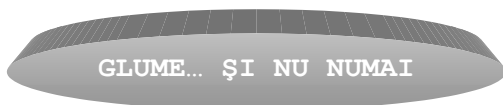
$$\times | + | = \times$$

- Să se partajeze mulțimea $M = \{1^2; 2^2; 3^2; \dots; 2000^2\}$ în două mulțimi A și B cu proprietățile:
 - A și B să fie disjuncte;
 - fiecare să aibă 1000 elemente;
 - suma elementelor din A să fie egală cu suma elementelor din B.
- Aflați aria hașurată cunoscând lungimea segmentului $AB = 5$ cm.



- De câte ori este mai mare suprafața hașurată din primul pătrat decât suprafața hașurată din al doilea pătrat?
- Folosind numai compasul să se împartă în patru părți congruente circumferința unui cerc al cărui centru este precizat.
- Complecțați pătratul alăturat cu numere prime, astfel încât să obțineți pe fiecare linie, coloană și diagonală aceeași sumă.

	1	
		7



- - Poți să comentezi semnificația rezultatului $0^n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$?
- Bineînțeles! O nulitate ridicată la orice putere tot nulitate rămâne!
- - Ce meserie aveți?
- Contabil.
- Și nu e monoton?
- Oh, deloc! Eu nu am găsit niciodată la un calcul același rezultat!

- - Câți copii are vecinul tău? întreabă musafirul.
- Înmulțind numărul copiilor cu înălțimea blocului exprimată în metri, cu anul nașterii bunicii și cu vârsta ei, se obține 12.605.127. În ce an s-a petrecut dialogul, dacă el a avut loc în București?
- Pe când era copil, celebrul savant Einstein, l-a întrebat pe unchiul său ce este algebra. Acesta i-a răspuns prompt: "algebra este arta de a calcula a leneșilor".
- Să nu se ocupe de matematică cei ce doresc să facă averi mari, căci acestea se dobândesc prin legi și procedee contrare matematicii. Matematica spune că $2 + 2 = 4$, pe când averile mari se realizează scriind $2 + 2 = 5$ când este de luat și $2 + 2 = 3$ când este de dat.
- Einstein a fost întrebat la o recepție, de soția unui om de afaceri:
- Dumneavoastră care știți atâtea lucruri, în atâtea domenii, puteți să-mi explicați diferența dintre timp și eternitate?
- Desigur, eu a-și avea timp să vă explic, dar v-ar trebui o eternitate ca să înțelegeți, a răspuns savantul.
- Un profesor se hotărâște să le dea elevilor săi un test cu răspunsurile DA/NU. Gigel care nu s-a pregătit pentru acest test, completează răspunsurile aruncând o monedă: DA pentru valoare și NU pentru stemă. După trecerea timpului acordat, în timp ce strângea lucrările, profesorul îl găsește pe Gigel aruncând în continuare moneda.
- Gigel, nu înțeleg de ce ți-a luat atâta timp pentru completarea formularului? se miră profesorul.
- Știți, domnule profesor, întotdeauna mi-a plăcut să verific rezultatele!



... originea cuvântului cifră se află în limba arabă: $\varnothing$ (i) fr înseamnă zero?

... originea cuvântului fracție este latină (fracțio = frângere)?

... scrierea unei fracții prin utilizarea unei linii orizontale între numitor și numărător a fost utilizată pentru prima oară de arabi?

... dacă avem două numere reale a și b putem exprima

a) propoziția: "cel puțin unul este negativ" prin relația $a + b < 0$;

b) propoziția: “numai unul este negativ” prin relația $a \cdot b < 0$ sau $|a| + |b| = |a - b|$;

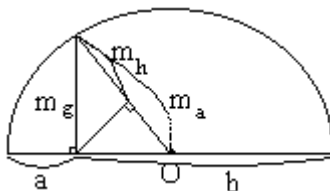
c) propoziția: “ambele sunt negative” prin relațiile $a \cdot b < 0$ și $a + b < 0$?
 ... pentru n valori strict pozitive $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ care au m_a - media aritmetică, m_g - media geometrică și m_h - media armonică, avem:

$$a_1 \leq m_h \leq m_g \leq m_a \leq a_n ?$$

... la școala lui Pitagora media aritmetică a două numere se calcula aflând pe x din proporția $\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{a}$, media geometrică aflând x din proporția

$$\frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{x}, \text{ iar media armonică din proporția } \frac{a-x}{x-b} = \frac{a}{b} ?$$

... într-un desen din Evul Mediu sunt reprezentate astfel segmentele ce măsoară m_a , m_g și m_h a segmentelor de lungime a și b ?



... probabilitatea ca varianta voastră din 6 numere să fie câștigătoare la o tragere LOTO 6/49 este de $1/13.983.816$. Dacă jucați câte 3 variante diferite în fiecare săptămână, timp de 89642 de ani, fiți siguri că veți obține premiul cel mare?

... condiția care trebuie să o îndeplinească lungimile segmentelor a , b , c pentru ca ele să poată fi laturile unui triunghi este:

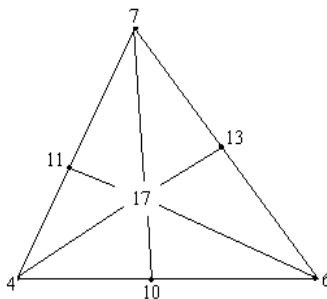
$$|a - b| < c < a + b ?$$

... dintre toate triunghiurile care au perimetrele egale, aria maximă o are triunghiul echilateral?

... dintre toate paralelipipedele înscrise într-o sferă, cubul are volumul maxim?

Triunghiul

Desenați un triunghi și puneți trei persoane să scrie câte un număr în cele trei vârfuri. Fiecare persoană își alege câte un vârf al triunghiului. În exemplul nostru prima scrie 7, a doua 6 și a treia 4. Voi scrieți apoi pe fiecare latură a triunghiului, la mijloc, suma numerelor de la extremitățile laturii. În cazul nostru $13 = 7 + 6$, $10 = 6 + 4$, $11 = 4 + 7$. Dacă uniți vârfurile cu punctele opuse, unde a-ți scris aceste numere, obțineți întotdeauna aceeași sumă. În exemplul nostru $17 = 7 + 10 = 6 + 11 = 4 + 13$. Încercați și cu alte numere!



Leul de bronz

Și acum o problemă care pare a fi “strămoșul” dificilelor probleme cu robinete care umplu un bazin. Iată textul:
 “Sunt un leu de bronz. Ochii mei, gura mea și piciorul drept sunt fântâni. Ochiul drept umple un bazin în 2 zile, ochiul stâng în 3 zile, piciorul drept în 4 zile și gura în 6 ore. Dacă toate curg în același timp, cât le va trebui pentru a umple bazinul?”

Lotul național de fotbal

Antrenorul Iordănescu convoacă un lot de jucători pentru echipa națională de fotbal de la Steaua, Rapid, Craiova și Dinamo. La primul antrenament ziaristi se interesează de numărul jucătorilor care la dat fiecare din cele patru echipe.

Un jucător de la Steaua se oferă să le dea lămuririle necesare: “să știți că de fapt toți selecționații suntem de la Steaua cu excepția a 18 jucători”. Un dinamovist sesizând intenția colegului său, completează: “adevărul este că toți suntem de la Dinamo mai puțin 18 jucători”. Nedumerirea generală se amplifică de replica tăioasă a unui oltean care produce panică în rândul zariștilor: “dacă vreți să știți adevărul gol-goluț, atunci dați-mi voie să vă spun că toți suntem de la Craiova afară de 18 jucători”. Rapidiștii nu se lasă

mai prejos și spun: “poate că au dreptate cei care au vorbit până acum, dar cei pe care-i vedeți aici suntem de la Rapid și numai 18 provin din alte echipe”.

Considerând că toți cei patru jucători spun adevărul, puteți să-i ajutați pe ziariști în încercarea lor de a determina numărul jucătorilor selecționați din fiecare echipă?

O monedă falsă

Aveți 9 monezi, din care una este falsă, făcută dintr-un metal mai ușor decât monezile bune. Dacă dispuneți de o balanță, cum puteți identifica moneda falsă prin maxim două cântăriri?

Un părinte slab pedagog

Pentru a-și încuraja copilul la învățătură, un părinte îi promite o monedă de 5000 lei, pentru prima notă de 10, două monezi pentru a doua notă de 10, patru pentru al treilea, opt pentru al patrulea ș.a.m.d. Copilul ia într-un semestru 12 note de 10. Ce sumă ar trebui să primească?



O familie numeroasă

Un băiat afirmă: “eu am un număr egal de frați și de surori”. Una dintre surori spune la rândul său: “eu am de două ori mai mulți frați decât surori”. Dacă ambele afirmații sunt corecte, calculați câți frați și câte surori erau în familie?

Vaporul și pluta

Un vapor parcurge pe Dunăre în sensul curentului distanța S în 5 ore, iar împotriva curentului aceeași distanță în 6 ore. Să se afle în cât timp parcurge această distanță o plută purtată de viteza apei.



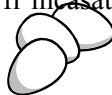
Oile ciobanului

Un cioban nu are 100 de oi, dar îi mai lipsesc anume atâtea cât ar avea peste 100, dacă ar avea de nouă ori cât are acum.

Câte oi are ciobanul?

La târg

Două țărănci au adus împreună la târg 100 ouă, una avea mai multe decât cealaltă; ambele au încasat sume egale. Atunci prima i-a spus celeilalte: “dacă a-și avea ouăle tale, a-și fi încasat 15 crăițari.” Cea de-a doua i-a răspuns: “iar dacă eu a-și fi avut ouăle tale, a-și fi încasat pentru ele $6\frac{2}{3}$ crăițari.”



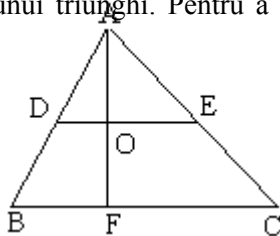
Câte ouă au avut fiecare?

Elevii lui Pitagora

După o legendă, se spune că Pitagora fiind întrebat de către Policrate, tiranul Siracuzei, câți elevi are, a răspuns: “jumătate din elevi studiază matematica, un sfert muzica, a șaptea parte asistă în tăcere și în plus mai sunt trei fete.” Câți elevi erau?

O problemă simplă

Doi frați moștenesc o livadă sub forma unui triunghi. Pentru a o împărți “frățește” cel mare măsoară înălțimea triunghiului, o taie în două, duce o paralelă la baza triunghiului și îi oferă celui mai mic triunghiul din vârf, el mulțumindu-se cu trapezul format pe baza triunghiului.

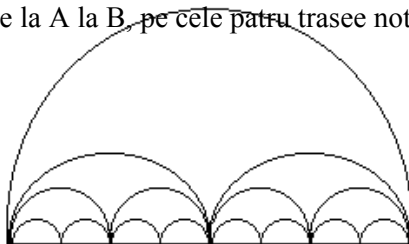


Evident împărțeala nu este justă! De câte ori este mai mare suprafața pe care și-a rezervat-o fratele cel mare față de aceea pe care a oferit-o celui mai mic?

Cursa pe trasee diferite

Patru copii trebuie să alerge de la A la B, pe cele patru trasee notate pe figură:

- traseul 1 – un semicerc cu raza R ;
- traseul 2 – două semicercuri de rază $\frac{R}{2}$;



- traseul 3 – patru semicercuri de rază $\frac{R}{4}$;
- traseul 4 – opt semicercuri de rază $\frac{R}{8}$.

Dacă ați fi printre acești alergători, ce traseu v-ați alege? Calculați lungimile celor patru trasee și clasificați-le.



□ *Urmăriți exactitatea calculelor de mai jos și spuneți unde este greșeala:*

$$\text{I. } a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

considerăm $a = b$ și avem:

$$a^2 - a^2 = (a - a) \cdot (a + a)$$

$$a \cdot (a - a) = 2a \cdot (a - a)$$

împărțim cu $a - a$

$$a = 2a$$

împărțim cu a

$$1 = 2 ?$$

II. Considerăm trei numere diferite ($a \neq b \neq c$) și relația de mai jos:

$$a - b = c$$

amplificăm cu $a - b$

$$(a - b)^2 = c \cdot (a - b)$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = ca - cb$$

$$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

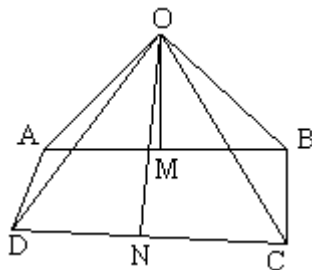
$$a \cdot (a - b - c) = b \cdot (a - b - c)$$

împărțim cu $a - b - c$

$$a = b ?$$

□ *Orice unghi obtuz este drept?*

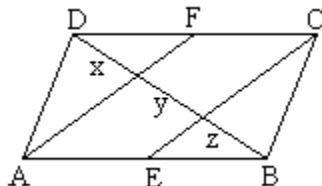
Demonstrație: Fie segmentul AB, unghiul drept $\hat{A}\hat{B}C$ și unghiul obtuz $\hat{B}\hat{A}D$ astfel încât $AD \equiv BC$. Perpendicularele pe segmentele AB și CD în mijloacele M respectiv N ale acestora se intersectează în O.



deoarece orice punct de pe mediatoarea unui segment este egal depărtat de capetele segmentului rezultă că $OA \equiv OB$ și $OC \equiv OD$. Din construcție avem și $BC \equiv AD$ deci $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$ de unde rezultă că $\widehat{OAD} \equiv \widehat{OBC}$. Dar $\widehat{OAB} \equiv \widehat{OBA}$ deoarece triunghiul OAB este isoscel deci $\widehat{BAD} \equiv \widehat{ABC}$.

□ *Orice paralelogram are diagonala de lungime nulă!*

Demonstrație: Fie $ABCD$ un paralelogram, E și F mijloacele laturilor AB și CD iar G și H intersecția diagonalei BD cu AF și EC . Mai notăm cu x , y și z lungimea segmentelor DG , GH și HB .



Se demonstrează ușor că $AF \parallel EC$.

Din $\triangle DGF \sim \triangle BGA$ rezultă $\frac{DG}{BG} = \frac{DF}{AE} = \frac{1}{2}$, sau $\frac{x}{y+z} = \frac{1}{2}$. În mod

analog, din $\triangle EHB \sim \triangle CHD \Rightarrow \frac{z}{x+y} = \frac{1}{2}$. Așadar $\frac{x}{y+z} = \frac{z}{x+y} \Leftrightarrow$

$x^2 + xy = yz + z^2 \Leftrightarrow x^2 - z^2 = yz - xy \Leftrightarrow (x-z)(x+z) = -y(x-z)$.

Simplificând cu $x-z$ se obține imediat $x+y+z=0 \Rightarrow BD=0$? Unde s-a greșit?

□ *Toate trapezele sunt isoscele?*

Demonstrație: Fie E intersecția laturilor neoparalele AD și BC ale trapezului $ABCD$. Din $DC \parallel AB$ conform teoremei fundamentale a

asemănării $\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$, (1). Deoarece

$\triangle ACE \sim \triangle BDE$ (au $\widehat{E}$ comun și laturile adiacente proporționale) atunci

$\widehat{CAE} \equiv \widehat{DBE}$ rezultă că patrulaterul $ABCD$ este inscriptibil și pentru că $DC \parallel AB \Rightarrow$

$\widehat{CDB} \equiv \widehat{DBA}$, dar cum în același cerc la unghiuri congruente se opun coarde congruente, rezultă că $AD \equiv CB$ și deci $ABCD$ este trapez isoscel?

