

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU ⁴⁾

Clasa a IX-a

1. Fie progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ cu $a_{2009} = 20,09$ și $a_{1000} = 50,36$. Să se determine numărul termenilor progresiei, care sunt numere naturale.

Emil Vasile, Ploiești

2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}, I \subset \mathbb{R}$, interval maxim. Să se determine funcția f știind că

$$\sqrt{x - \sqrt{x - f(x)}} = f(x), \forall x \in I.$$

Mihai Dicu, Craiova

3. Să se rezolve ecuațiile:

a. $x! + y! = z!$

b. $x! + y! + z! = t!$

Petre Năchilă, Ploiești

4. Fie $x, y, z \in \mathbb{R}$. Arătați că $\max [E(x, y, z)] = \begin{cases} 1, & \text{pentru } x, y, z \in [0, 1] \\ 0, & \text{pentru } x, y, z \in [0, 1) \end{cases}$, unde
 $E(x, y, z) = x + y + z - xy - xz - yz$ iar $\max [E(x, y, z)]$ reprezintă maximul părții întregi a lui $E(x, y, z)$.

Vasile Coman, Vălenii de Munte

5. Să se rezolve în numere naturale, ecuația:

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

Cătălin Năchilă, Ploiești

6. Fie $x, y, z \in [0, 1]$. Să se demonstreze că:

a. $\frac{x}{y+1} + \frac{y}{z+1} + (x-1)(y-1) \leq 1;$

b. $\frac{x}{y+z+1} + \frac{y}{x+z+1} + \frac{z}{x+y+1} \leq 1 + (x-1)(y-1)(z-1).$

Cătălin Năchilă, Ploiești

7. Fie triunghiul ABC și punctele $E, D, F \in BC$ astfel încât $[AD]$, $[AE]$ și $[AF]$ sunt bisectoarele unghiurilor BAC , BAD respectiv DAC . Să se arate că
 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$
 dacă și numai dacă $AB = AC$

Claudiu Militaru, Ploiești

8. Să se rezolve în mulțimea numerelor întregi nenule ecuația :

$$5x\sqrt{17+12\sqrt{2}} + 3y\sqrt{17-12\sqrt{2}} + 4z = 45 - 2\sqrt{2}.$$

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara

9. În patrulaterul convex $ABCD$, $E \in (AB)$ și $F \in (CD)$ astfel încât $\frac{AE}{EB} = \frac{DF}{FC} = k$. Arătați

că: **a)** $\vec{EF} = \frac{\vec{AD} + k\vec{BC}}{k+1}$. **b)** Punctele M, N, P sunt coliniare, unde $M \in (AD)$, $N \in (EF)$ și

$P \in (BC)$ astfel încât $\frac{AM}{MD} = \frac{EN}{NF} = \frac{BP}{PC}.$

Gheorghe Stancu, Ploiești

⁴⁾Se primesc soluții până la 15 iunie 2009

Clasa a X-a

1. Fie funcția $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_3 \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.
- Să se demonstreze că dacă $A = \text{Im} f$, atunci $A = [-1,1]$.
 - Să se demonstreze că $f: A \rightarrow A$ este inversabilă și să se determine f^{-1} .
 - Să se demonstreze că dacă $S_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{k}\right)$, atunci
- $$\log_3(n-1) < S_n < \log_3(n+1), \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mihai Dicu, Craiova

2. Să se determine numărul complex z , știind că:

$$\left[\frac{1}{|z|} \right] + 2 \left[\frac{1}{|z|} \right] = 3 \text{ și } 2 \left[\frac{1}{|z-2|} \right] + 1 = 3 \left[\frac{1}{|z-2|} \right].$$

Emil Vasile, Ploiești

3. Fie $a, b, c, d \in (0,1)$. În ce condiții avem:
 $3(\log_a bcd + \log_b acd + \log_c abd + \log_d abc) \leq 4$?

Cătălin Năchilă, Ploiești

4. Să se rezolve ecuațiile:

- $3^x + 4^x + 20^x = 5^x + 12^x + 16^x$
- $3^{x^2} + ax^2 = 3^x + ax, a > 0$

Petre Năchilă, Ploiești

5. Să se rezolve în numere complexe sistemul:

$$a^{13}b^{19} = i; \quad a^5b^7 = i; \quad a^2 + 2 = b^3i.$$

Petre Năchilă, Ploiești

6. Să se arate că în orice triunghi are loc inegalitatea:

$$R + r \geq \frac{r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a}{r_a + r_b + r_c}$$

Notațiile sunt cele cunoscute.

Nica Cristina-Paula și Nica Nicolae, Caracal

7. Să se arate că dacă $a, b, c \in (0,1)$ sau $a, b, c \in (1, \infty)$, atunci

$$\frac{1}{2 + \log_a b} + \frac{1}{2 + \log_b c} + \frac{1}{2 + \log_c a} \leq 1$$

Octavian Purcaru, Ploiești

Clasa a XI-a

1. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \in \mathbb{R}^*, A \in M_n(\mathbb{R})$. Să se determine $\det(A + aI_n)$, știind că
 $A^3 = a^3 I_n$ și $\det(A - aI_n) \neq 0$.

Prelucrare, Petre Năchilă

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, \infty)$ astfel încât $|a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x - n| \leq x^2, \forall x \in (-1, 1)$.
Să se determine $a_1 a_2 \dots a_n$.
Mihai Dicu, Craiova
3. Fie funcția $f : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$ și pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, definim
 $a_n = \left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) \right| \cdot \left| f\left(\frac{2}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right|^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot \left| f(1) - f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right|^{\frac{1}{n}}$. Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ în
următoarele cazuri separate:
a. f este crescătoare, dar nu este strict crescătoare
b. f este funcție continuă.
Emil Vasile, Ploiești
4. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu proprietatea că $(a_n - a)(a_{n+1} - b) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Să se demonstreze că șirul $\left(\frac{n^2 + na + a^2}{n^2 + nb + b^2} \cdot a_n \right)_{n \geq 1}$ este convergent.
Petre Năchilă, Ploiești
5. Fie șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ definite prin $0 < x_0 < y_0$ și
 $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n + y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n^3 + y_n^3}{x_n^2 + y_n^2}, \forall n \geq 0$. Să se precizeze dacă:
a. șirurile sunt convergente;
b. șirurile au aceeași limită.
Cătălin Năchilă, Ploiești
6. Fie șirul $(a_n)_{n \geq 0}$ definit prin $a_0 > 0, a_n^2 - 2a_{n+1} \leq 2a_n - 4 \leq 4a_n - 2a_{n+1} + 3, \forall n \geq 0$. Să
se demonstreze că șirul este convergent și să se determine limita sa.
Petre Năchilă, Cătălin Năchilă, Ploiești
7. Determinați $X \in M_2(\mathbb{C})$ care verifică $X^{2009} + X^{2008} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Claudian Militaru, Ploiești

Clasa a XII-a

1. Fie $(G, \cdot)$ grup finit de ordin impar cu proprietatea: $\forall x_1, x_2, x_3 \in G$ există $\sigma \in S_3 - \{e\}$
astfel încât $x_1 x_2 x_3 = x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}$. Să se demonstreze că grupul este comutativ.
Emil Vasile, Ploiești
2. Fie $a, b \in (0, \infty), a < b, p \in \mathbb{R}$ astfel încât $x^2 + px + ab \neq 0, \forall x \in [a, b]$. Să se
determine $\int_a^b \frac{\ln x}{x^2 + px + ab} dx$.
Mihai Dicu, Craiova

3. a) Fie funcțiile continue $f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$. Să se demonstreze că dacă
- $$\left(\int_0^2 f(x)g(x)dx \right)^2 = \left(\int_0^2 f(x)dx \right) \left(\int_0^2 g(x)dx \right), \text{ atunci există } a \in \mathbb{R} \text{ astfel încât}$$
- $$f = ag.$$

b) Dacă $f(x) > 0, \forall x \in [0, 2]$, să se determine minimul produsului

$$\left(\int_0^2 f(x)dx \right) \left(\int_0^2 \frac{1}{f(x)} dx \right).$$

Petre Năchilă, Ploiești

4. Fie funcțiile $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, definite prin
- $$f_n(x) = \frac{\int_0^x (1-t^2)^n dt}{\int_0^1 (1-t^2)^n dt}.$$

a. Să se demonstreze că funcțiile f_n sunt funcții polinomiale și să se determine paritatea lor.

b. Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(x)}{f_{m+n}(x)}, m \in \mathbb{N}^*$ fixat, în cazurile $x \in (0, 1)$, respectiv $x \in (-1, 0)$.

Cătălin Năchilă, Petre Năchilă, Ploiești

5. Fie $a \geq 0, I_a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x dx, f(a) = (a+1)I_a I_{a+1}$. Să se demonstreze că:

a. f este o funcție periodică și $f(0) = \frac{\pi}{2}$.

b. Dacă $0 \leq n \leq a \leq n+1$, atunci $\frac{n+1}{n+2} < \frac{2}{\pi} f(a) < \frac{n+2}{n+1}$.

c. $(f(a+n))_{n \geq 1}$ este sir convergent.

Cătălin Năchilă, Petre Năchilă, Ploiești

6. Fie $(A, +, \cdot)$ inel. Să se demonstreze că:

a. $x^2 = 1, \forall x \in A - \{0\} \Rightarrow A$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ sau cu $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$;

b. $x^4 = 1, \forall x \in A - \{0\} \Rightarrow A$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ sau cu $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$, sau cu $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$.

7. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții cu proprietățile:

i) f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

ii) g este derivabilă cu derivata continuă pe $\mathbb{R}$.

Atunci demonstrați că sunt adevărate afirmațiile:

1) $f(x) \cdot g(x)$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.

2) $(f \circ g)(x) \cdot g'(x) \cdot g(x)$ admite de asemenea primitive pe $\mathbb{R}$.

Coman Vasile, Valenii de Munte