

PROBLEME PROPUSE PENTRU LICEU ⁵⁾

Clasa a IX - a

1. Să se demonstreze că un triunghi ABC este echilateral dacă și numai dacă
- $$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{3}{4}.$$

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

2. Fie numerele

$$A = \left\{ \frac{2006}{2007} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2006}{2007} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2006}{2007} \right\} + \dots + \left\{ 2006 \cdot \frac{2006}{2007} \right\} \quad \text{și}$$

$$B = \left\{ \frac{2008}{2007} \right\} + \left\{ 2 \cdot \frac{2008}{2007} \right\} + \left\{ 3 \cdot \frac{2008}{2007} \right\} + \dots + \left\{ 2006 \cdot \frac{2008}{2007} \right\}$$

unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a lui a . Comparați numerele $[A]$ și $[B]$ unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

Petre Bătrânețu, Galați

3. Se dau punctele $A(1, 0), B(-1, 2), C(4, 3)$
- Determinați ecuația dreptei BC ;
 - Intersecțiile dreptei BC cu axele;
 - Verificați dacă triunghiul ABC este dreptunghic;

Exprimați vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ în funcție de $\vec{i}, \vec{j}$;

Grațiana Calcan, Ploiești

4. Fie a, b, c și d lungimile laturilor unui patrulater convex. Dacă

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{c+d+a} + \frac{c}{d+a+b} + \frac{d}{a+b+c} \leq \frac{4}{3}, \text{ atunci patrulaterul dat este romb.}$$

5. Prin ortocentrul triunghiului ABC se duc două drepte (D) și (D') perpendiculare, care taie laturile BC, CA, AB ale triunghiului în M, N, P și, respectiv, în M', N', P' .
Să se arate că mijloacele segmentelor $[MM'], [NN'], [PP']$ sunt colineare.

Miron Oprea, Ploiești

6. Se consideră ecuația $x^2 - (2m+1)x + 2m = 0$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $2m = [\sqrt{2008}]$ rezolvați ecuația de mai sus, $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .

b) Dacă a și b sunt numere reale nenule astfel încât $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{ab} = 1$ demonstrați că există $m_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât a și b sunt soluții ale ecuației: $x^2 - (2m_0+1)x + 2m_0 = 0$.

Emilian Dima, Galați

7. Se dau numerele reale $a, b, c \in (0, \infty)$ sau $a, b, c \in (-\infty, 0)$. Să se demonstreze că cel puțin una dintre ecuațiile:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad bx^2 + cx + a = 0, \quad cx^2 + ax + b = 0 \quad \text{nu are soluții reale.}$$

Marian Teler, Costești, Argeș

⁵⁾Se primesc soluții până la 15 iunie 2009

Clasa a X - a

1. Dacă triunghiurile ABC și MNP au același centru de greutate, să se calculeze:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$$
2. Să se arate că numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ și $\sqrt{5}$ nu pot fi termenii unei progresii geometrice.
Mirică Vasile Eduard, Pitești
Boncescu Marcela, Costești
3. Să se demonstreze că:

$$\sqrt{a \cdot \log_{\frac{a+b}{2}} \sqrt{a}} + \sqrt{b \cdot \log_{\frac{a+b}{2}} \sqrt{b}} \leq \sqrt{a+b}, \text{ oricare ar fi } a, b \in (1, \infty)$$

Samuel Ioniță, Bărcănești
4. Să se cerceteze dacă numerele reale $\text{tg}1^0$ și $\text{tg}1$ sunt numere raționale sau iraționale.
(În legătură cu articolul de la pag.1) Gh. Simion, București
5. Se consideră funcția: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 2, & x < 2 \\ 2^x, & x \geq 2 \end{cases}$
 Să se studieze bijectivitatea funcției f.
Dumitru Oprea, Dragodănești, Dâmbovița
6. Să se rezolve ecuația $\log_{88}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) = \log_{1024} x$
Cătălin Năchilă, Ploiești
7. Să se rezolve ecuația $6x^2 - 5\{x\} + 1 = 0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a
 irului real x.
Marian Teler, Costești

Clasa a XI - a

1. a) Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ cu $\det A < 0$. Arătați că există $u \in \mathbb{R}$ astfel încât
 $\det(A - u \cdot I_n) = 0$.
 b) Fie $k \in \mathbb{N}^*$ și $A_i \in M_n(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, k}$. Să se arate că $\det\left(\sum_{i=1}^k ({}^t A_i \cdot A_i)\right) \geq 0$, unde
 ${}^t A_i$ reprezintă transpusa matricei.
- ***
2. Se dă matricea $A \in M_3(\mathbb{R})$ cu următoarele proprietăți:
 - i) Elementele de pe coloana principală sunt egale,
 - ii) Sumele elementelor de pe fiecare linie și de pe fiecare coloană sunt egale cu 2008.
 Să se demonstreze că $\det(A) \geq 0$. În ce situație are loc egalitatea ?

3. a) Arătați că matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ verifică ecuația:
Marian Teler, Costești

$$X^2 - (a+d)X + (ad-bc)I_2 = O_2$$

b) Rezolvați în $M_2(C)$ ecuația: $X^n = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}^*$

Simion Sorin, Pitești

4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin $x_0 \in \mathbb{R}$, arbitrar și

$$x_{2n+1} = \left| \frac{1}{2} x_{2n} - 1 \right| \text{ și } x_{2n+2} = \left| \frac{7}{4} x_{2n+1} - \frac{1}{2} \right|. \text{ Studiați convergența șirului } (x_n)_{n \geq 0}.$$

Petre Năchilă și Cătălin Năchilă, Ploiești

5. Sa se calculeze limitele sirurilor :

$$a_n = \left(1 + \frac{n^2}{2n^2+1} \right)^{3n^2}$$

$$b_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n}{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)]}$$

- 6.

Fie $A \in M_3(\mathbb{Z})$, $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & b & b^2 \end{pmatrix}$. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât să existe

egalitatea $A^{-1} = A^*$.

Felicia Ozunu, Vulcan, Hunedoara

- 7.

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

- a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea A să fie inversabilă.
b) Pentru $a = 1$ să se determine A^{-1} .

c) Să se rezolve ecuația matriceală $X \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Gh. Stancu, Ploiești

Clasa a XII - a

1. Fie polinoamele :

$$P(x, y, z) = xy(x^2 - y^2) + yz(y^2 - z^2) + zx(z^2 - x^2); Q(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \text{ cu } (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \text{ Se cere:}$$

- 1) Să se descompună în factori liniari polinomul $P(x, y, z)$
2) Să se arate că: $0 \leq \frac{|P(x, y, z)|}{Q(x, y, z)} \leq \frac{9\sqrt{2}}{32}$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$

Miron Oprea, Ploiești

2.

Fie $A(m) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ și $M = \{A(m) | m \in \mathbb{Z}\}$

- Să se demonstreze că $A(m) \cdot A(n) \in M, (\forall) m, n \in \mathbb{Z}$
- Să se demonstreze că $(M, \cdot)$ este grup comutativ
- Să se demonstreze că grupul $(M, \cdot)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{Z}, +)$

Marian Teler, Costești, Argeș

3.

Arătați că funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x \cdot e^x, & x < 0 \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ admite primitive și determinați

primitiva sa $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $F(0) = 1$.

Mihail Dina, Moreni

4.

În $M_2(\mathbb{Z})$ se consideră $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ și matricele

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Verificați ca $I_2 \in M$ și $O_2 \in M$.
- Arătați că dacă $A, B \in M$ atunci $A \cdot B \in M$.
- Arătați că mulțimea M împreună cu operația de înmulțire a matricelor formează monoid comutativ
- Dacă $A \in M, A$ este inversabilă și $A^{-1} \in M$ atunci $\det(A) = 1$.

Cezar Ozunu, Daneți, Dolj

5.

Determinați $X \in M_2(\mathbb{C})$ știind că are suma elementelor egală cu 2, iar

$$X^{2008} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Rodica Coman, Bistrița

6.

Fie funcția continuă $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ și funcția g convexă pe $\mathbb{R}$. Să se demonstreze că

$$g\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 (g \circ f)(x)dx$$

Petre Năchilă și Cătălin Năchilă, Ploiești

7.

Să se determine funcția continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$\int_a^b f^2(x)dx = \int_a^b f^3(x)dx = \int_a^b f^4(x)dx$$

Petre Năchilă și Cătălin Năchilă, Ploiești

