

PROBLEME PROPUSE CONCURSUL REZOLVITORILOR ⁴⁾

Clasa a V - a

1.

Să se calculeze: $[7^{3^3} : (7^5)^5 - (4^4 \cdot 4^4 - 8^5) : 32^3] : 2^4 =$

Prof. Traian Cotfas, Sf. Gheorghe

2.

Se notează cu $n!$ produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$ (de exemplu: $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$).

a) Să se afle cu câte zerouri se termină $48!$;

b) Să se determine numărul natural „ n ” astfel încât $n! + 12$ să fie pătrat perfect.

Prof. Tatiana Pană, Ploiești

3.

Patru prieteni au împreună 206 lei. Dacă fiecare din primii trei elevi primește câte 5 lei de la al patrulea, atunci sumele celor patru copii, luate într-o anumită ordine, sunt numere naturale consecutive. Determinați suma inițială a celui de-al patrulea elev. Câte soluții are problema?

Prof. Nicolae Tălău, Craiova

4.

Jandarmul Pristanda numără steagurile din Ploiești. Pe prima stradă sunt: un steag roșu și unul albastru, pe a doua stradă sunt două steaguri roșii, două steaguri galbene și două steaguri albastre, pe a treia stradă sunt patru steaguri roșii, patru steaguri galbene și un steag albastru (în această ordine), ș.a.m.d.

a) Ce steaguri sunt pe străzile 4, 5 și 6?

b) Pe ce stradă este steagul cu numărul 2008 și ce culoare are acesta?

Prof.dr.Gabriel Pripoae, București

(Concursul Discipolii lui Lazăr, 2008)

5.

a) Să se cerceteze dacă există numere naturale de trei cifre de forma $\overline{abc}$ știind că împărțind numărul $\overline{abc5}$ la $\overline{cba}$ obținem câtul 9 și restul 105.

b) Să se determine câtul și restul împărțirii numărului $14^x - 7^x + 2^x$ la $7^x + 1$, unde

$$n \in \mathbb{N}^*.$$

Ilie Ella, Baia Mare

6.

Împărțind numărul 5577 la numărul natural nenul a se obține câtul b și restul 11.

Împărțindu-l pe b la a se obține câtul 11 și restul 11.

a) Să se arate că b se împarte exact la 11.

b) Aflați numărul a .

Nicoleta Bocuț, Sibiu

7.

a) Să se afle a din egalitatea : $a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \overline{aaaa} = 1234$

b) Să se determine cifrele a și b știind că $a \cdot a = \overline{b1}$

c) Arătați că dacă a și b sunt cifre consecutive nenule, atunci $11 \cdot \overline{b1} - 11 \cdot \overline{a0}$ este pătrat perfect.

Mioara Ghiță, Sibiu

⁴⁾Se primesc soluții până la 20 martie 2009

8. a) Două cărți și 3 caiete costă 58 lei, iar 5 caiete și 4 radiere costă 28 lei. Aflați cât costă fiecare produs dacă prețul caietului este dublul prețului radierei
b) Câte cărți și câte caiete a cumpărat un elev, știind că au fost 25 produse pentru care a achitat 195 lei și că o carte costă 23 lei iar un caiet 4 lei.

*Delia Pastramă, Sibiu
(Concursul Regina Maria, 2008)*

Clasa a VI -a

1. a) Fie punctele A, B, C coliniare, în această ordine, O mijlocul segmentului [AC], iar M mijlocul segmentului [BC]. Demonstrați că $AB = 2 \cdot OM$.
b) Fie unghiurile adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$ și fie Ox și Oy bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOC}$, respectiv $\widehat{BOC}$. Demonstrați că $m(\widehat{AOB}) = 2 \cdot m(\widehat{xOy})$.

Prof. Ilarie Lazăr, Ploiești

2. Suma a trei numere naturale este 2008. Împărțind pe primul la suma celorlalte două obținem câtul 10 și restul 160. Să se afle cele trei numere știind că cel mai mare divizor comun al ultimelor două este 12.

Prof. Tatiana Pană, Ploiești

3. Mai mulți prieteni au descoperit un joc pentru care este nevoie de cel puțin 6 și cel mult 12 jucători. Ei se așează la o masă rotundă, iar pentru a afla cine începe jocul, copiii încep să numere de la 78 la 1, prima care zice „78” fiind Corina. Următorul zice „77”, următorul „76”, și așa mai departe, până când numărul 1 se nimerește tot la Corina, deci ea va începe jocul.

La al doilea joc, atunci când se decide cine va începe jocul, copiii au procedat la fel, numai că numărătoarea a pornit de la 34 la 1. În urma acesteia, s-a nimerit să înceapă jocul Camelia, aceeași fetiță care începuse numărătoarea de la 34.

Câți copii sunt la masă?

Prof.dr. Cristinel Mortici, Târgoviște

4. Se știe că sunt exact 4 numere prime în mulțimea $\{n+1, n+2, n+3, \dots, n+14, n+15\}$, iar în mulțimea $\{n, n+1, n+2, n+3, \dots, n+14, n+15, n+16\}$ sunt exact 6 numere prime. Câte numere prime sunt în mulțimea $\{n+4, n+6, n+10, n+12\}$?

*Prof.dr. Cristinel Mortici, Târgoviște
(Concursul Discipolii lui Lazăr, 2008)*

5. Arătați că nu există numere naturale de forma $\overline{abc}$ care verifică relația $\overline{ab}^2 - \overline{bc}^2 = \overline{abc}$.

Nicolae Stănică, Brăila

6. Pe semidreapta [OP se consideră punctele: $A_0, A_1, \dots, A_{2008}$ și punctele: $B_0, B_1, B_2, \dots, B_n$ astfel încât: $OA_0 = 2$ mm, $OA_1 = 7$ mm, $OA_2 = 12$ mm, ..., $OA_{2008} = 10042$ mm; $OB_0 = 5$ mm, $OB_1 = 11$ mm, $OB_2 = 17$ mm, Se cere:

a) Calculați câți cm sunt între punctele O și A_{22} .

b) Calculați $S = OA_0 + OA_1 + OA_2 + \dots + OA_{2008}$.

c) Determinați n pentru care B_n este cel mai apropiat de A_{2008} .

Liviu Ardelean, Sibiu

7. Fie unghiul AOB alungit și [OC o semidreaptă astfel încât $m(\angle AOC)=3x+3^\circ$ și $m(\angle COB)=5x+17^\circ$. Fie [OD bisectoarea unghiului AOC, [OF bisectoarea unghiului COB, [OE bisectoarea unghiului COF, [OG bisectoarea unghiului FOB.
- Să se afle $m(\angle AOC)$ și $m(\angle COB)$
 - Să se calculeze $m(\angle DOE)$
 - Să se arate că unghiurile COD și COF sunt complementare.

Monica Guita, Sibiu

8. a) Aflați cel mai mic număr natural n care are suma cifrelor egală cu 2008
b) Aflați câtul și restul împărțirii numărului $10^{p+224} - \underbrace{199\dots99}_{223\text{ori}}$ la 9, unde p este număr natural nenul .

Simona Dumitrescu, Sibiu
(Concursul Regina Maria, 2008)

Clasa a VII - a

1. Fie $S = (a+2) + (a+4) + (a+6) + \dots + (a + 2n)$, unde n este un număr natural.
- Să se demonstreze că S se divide cu n;
 - Să se descompună numărul 2009 într-o sumă de numere naturale consecutive de aceeași paritate.

Prof. Ilarie Lazăr, Ploiești

2. Fie x, y numere strict pozitive astfel încât $\frac{4x+3y}{3x+2y} - \frac{7}{5} \geq \frac{5}{3} - \frac{3x+2y}{2x+y}$ și $\frac{3x+2y}{4x+3y} + \frac{2x+y}{3x+2y} \geq \frac{3}{5} + \frac{5}{7}$. Să se demonstreze că $x = y$.

Prof.dr. Cristinel Mortici, Târgoviște

3. Fie ABCD un patrulater cu laturile AD și BC paralele, pentru care există punctele $M \in (BC)$ și $N \in CD$, C între N și D, astfel încât $AB = BM$ și $DN = AD$. Demonstrați că, dacă punctele A, M, N sunt coliniare, atunci ABCD este paralelogram.

Prof.dr. Cristinel Mortici, Târgoviște

4. Fie ABC un triunghi echilateral și G centrul său de greutate. Dacă M este un punct exterior triunghiului astfel încât $MA = MC = \frac{MB}{2}$, să se demonstreze că AGCM este romb.

Prof. Ilarie Lazăr, Ploiești
(Concursul Discipolii lui Lazăr, 2008)

5. a) Să se determine $A = \{(x,y) / xy-y-3x=2, x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}\}$
 b) Să se arate că fracția $\frac{9a+8}{8a+7}$ este ireductibilă pentru orice $a \in \mathbf{N}$.
 c) Să se determine $x \in \mathbf{N}$ de forma $x=2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ știind că $x < 50$ și că numărul de divizori pe $\mathbf{N}$ a lui x este 6.

Pavel Toader, Sibiu

6. Se consideră triunghiul ABC , $m(\angle A)=90^\circ$, $m(\angle C)=30^\circ$, $AB=a$, $AC=b$. Mediana $[AD]$ se prelungește cu un segment $[DN] \equiv [AD]$, iar latura $[AB]$ cu $[BS] \equiv [BC]$. Fie M punctul de intersecție al bisectoarei unghiului ABC cu CN . Se cere:
 a) Să se arate că $ABNC$ dreptunghi.
 b) Să se arate că punctele S, D, M coliniare
 c) Să se calculeze aria lui $ASNM$ în funcție de a și b .

Mioara Ghiță, Sibiu

7. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A . Prolungim mediana $[AM]$ ($M \in [BC]$) cu $[MD] \equiv [AC]$ și fie S punctul de intersecție dintre bisectoarea unghiului $\sphericalangle CAM$ și bisectoarea unghiului $\sphericalangle CMD$. Să se arate că punctele C, S, D sunt coliniare dacă și numai dacă $m(\sphericalangle ABC) = 54^\circ$.

Nicolae Stănică, Marius Damian, Brăila

8. a) Să se arate că

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} + \dots + \frac{1}{3k} < \frac{1}{2},$$

oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$.

- b) Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Demonstrați că: $\frac{7}{12} < \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \dots + \frac{1}{4n} < \frac{5}{6}$.

Valentin Damian, Brăila
(Concursul Congruențe, 2008)

Clasa a VIII -a

1. Fie x, y numere reale astfel încât $x - y + 1 = 0$ și $y \in [1;3]$. Să se arate că numărul

$$a = \sqrt{x^2 + y^2 - 2y + 1} + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13}$$

are valoare constantă.

Prof. Anton Negrilă, Ploiești

2. a) Să se demonstreze că, pentru oricare numere reale a, b, c ,

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$$

- b) Să se determine numerele m și n astfel încât $(m + \sqrt{5}) \cdot (n + \sqrt{5}) = 11 + 5\sqrt{5}$.

- c) Să se determine numărul natural n astfel încât :

$$(6+2\sqrt{5})^n + (9+4\sqrt{5})^n + (14+6\sqrt{5})^n - (7+3\sqrt{5})^n - (11+5\sqrt{5})^n - (8+4\sqrt{5})^n = 3.$$

Prof.dr. Cristinel Mortici, Târgoviște

3. Fie triunghiul echilateral ABC și punctele O, Q în planul său, O interior triunghiului, Q exterior triunghiului dat, astfel încât $OA=6$ cm, $OB = 6\sqrt{3}$ cm, $OC = 12$ cm și $\triangle BQC \equiv \triangle AOC$.
- Să se demonstreze că punctele A, O, Q sunt coliniare;
 - Să se calculeze aria $\triangle ABC$;
 - Fie P un punct nesituat în planul ABC astfel încât $PB = PC = PO = 9$ cm. Să se calculeze distanța de la P la planul ABC;
 - Să se calculeze măsura unghiului format de dreptele PX și QC, unde $PX = (POC) \cap (PBQ)$.

*Prof. Ilarie Lazăr, Ploiești
(Concursul Discipolii lui Lazăr, 2008)*

4. Fie cubul ABCDA'B'C'D' și punctele M, N, P, Q astfel încât $M \in (CC')$, $N \in (BC)$, $P \in (AB)$, $Q \in (AA')$.
- Arătați că dreptele D'M și AN sunt concurente dacă și numai dacă $C'M=BN$.
 - Dacă $NC=CM$ și $AP=AQ$ arătați că M, N, P, Q sunt coplanare dacă și numai dacă D, T, B sunt coliniare, unde $\{T\}=PC \cap AN$.

Mihai Popa, Sibiu

5. Pe cercul de centru O și raza de 6 cm se construiesc diametrele [AB] și [EF] perpendiculare. Fie D pe arcul mic AE astfel încât măsura arcului AD este de 60° . Construim de aceeași parte a planului cercului segmentele $AA'=6$ cm, $BB'=x$ cm $EE'=7$ cm, $FF'=3$ cm în așa fel că AA' , BB' , EE' , FF' sunt perpendiculare pe planul cercului.
- Să se calculeze AD.
 - Să se calculeze tangenta unghiului determinat de dreptele A'F și BE.
 - Să se calculeze $d(B, (A'AF))$.
 - Să se afle x știind că punctele A', B', E', F' sunt coplanare.

Pavel Toader, Sibiu

6. a) Să se afle minimul expresiei $4x^2-4x+7$, $x \in \mathbf{R}$ și pentru ce valoare a lui x se realizează.
- b) Fiind date numerele reale pozitive x și y, pentru care

$$4 \left(x \cdot y + \frac{1}{x \cdot y} \right) = 17, \text{ determinați}$$

i) minimul expresiei $\left(x + \frac{1}{x} \right) \cdot \left(y + \frac{1}{y} \right)$ și

ii) valorile lui x și y, pentru care este atins acest minim

Mihaela Dragoie, Sibiu

a) Arătați că $\sqrt{2n+2\sqrt{n^2-1}} = \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

7. b) Fie $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Găsiți cel mai mare

număr natural neneul pentru care $S_n < 5\sqrt{2}$.

c) Demonstrați că $\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot \frac{7}{\sqrt{12}} \cdot \dots \cdot \frac{201}{\sqrt{10100}} > 1+2+2^2+ \dots + 2^{99}$.

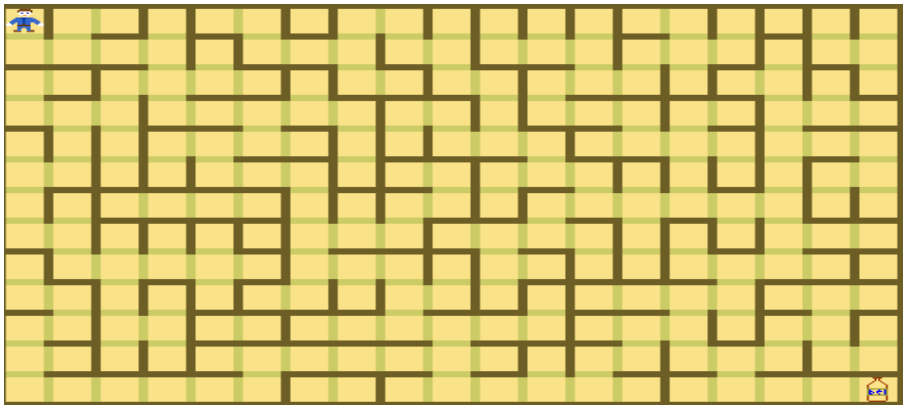
*Marius Macrea, Sibiu
(Concursul Regina Maria, 2008)*

8. Fie sirul de numere naturale :1 ; 1;2 ; 1;2;3 ; 1;2;3;4 ; ... ; 1;2;3;...;2009 .

- a) Care este prima pozitie pe care apare numarul 56 in scrierea sirului ?
- b) Aflati al 2009-lea termen al sirului .
- c) Cate patrate perfecte gasim pe primele 2009 pozitii ?

Ștefan Smarandache, București

LABIRINT 1



LABIRINT 2

