

**ASUPRA IRAȚIONALITĂȚII NUMERELOR
DE FORMA $\cos n^0$ ȘI $\sin n^0$, $n \in \mathbb{N}$.**

Prof.dr. Gheorghe Simion, Universitatea „Politehnica” București și prof.Victor Minea, Mizil

În prezenta lucrare vom demonstra o teoremă care ne va da răspuns la întrebarea: Fie $n \in \mathbb{N}$, $\cos n^0$ este număr rațional sau irațional? Dar $\sin n^0$ este număr rațional sau irațional? Rezultatul principal al acestei lucrări este dat de următoarea teoremă :

Teoremă

Fie $n \in \{0,1,2,\dots,360\}$.

a) $\cos n^0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \in \{0,60,90,120,180,240,270,300,360\}$.

b) $\sin n^0 \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow n \in \{0,30,90,150,180,210,270,330,360\}$.

Demonstrația acestei teoreme va rezulta din următoarelor rezultate:

Lema 1

Fie $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

a) $\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x + \dots$

b) $\sin nx = C_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^5 \cos^{n-5} x \sin^5 x + \dots$

Demonstrație

Din formula lui Moivre obținem :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

Din formula lui Newton obținem :

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos^n x + C_n^1 \cos^{n-1} x (i \sin x) + C_n^2 \cos^{n-2} x (i \sin x)^2 + \dots$$

Egalând părțile reale și părțile imaginare din aceste dezvoltări obținem rezultatul enunțat.

Lema 2

Fie $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

a) Dacă $\cos x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \cos nx \in \mathbb{Q}$.

b) Dacă $\sin x \in \mathbb{Q}$, n impar $\Rightarrow \sin nx \in \mathbb{Q}$.

Demonstrație

Rezultă imediat, aplicând Lema 1

Lema 3

Fie $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, atunci:

a) Dacă $\cos nx \notin \mathbb{Q} \Rightarrow \cos x \notin \mathbb{Q}$.

b) Dacă $\sin nx \notin \mathbb{Q}$, n impar $\Rightarrow \sin x \notin \mathbb{Q}$.

Demonstrație

Rezultă din Lema 2

Lema 4

Fie $r \in \{1,2,3,4,5,6,9,10,12,15,20,30,36,45\}$, atunci $\cos r^0 \notin \mathbb{Q}$

Demonstrație

Din $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$ rezultă, aplicând Lema 3, dacă r este divizor al lui 30, $\cos r^0 \notin \mathbb{Q}$.

Deci dacă $r \in \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, $\cos r^0 \notin \mathbb{Q}$

Din $\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$, analog, rezultă $\cos 9^0 \notin \mathbb{Q}$.

Rămâne de arătat că dacă $r \in \{4,12,20,36\}$, $\cos r^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Vom arăta în cele ce urmează că, $\cos 20^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Fie $x=20^\circ$, deci vrem să arătam că, $\cos x \notin \mathbb{Q}$.

Din $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow 8\cos^3 x - 6\cos x - 1 = 0$. Deci $\cos x$

este soluție a ecuației $8y^3 - 6y - 1 = 0$. Dacă $\cos x \in \mathbb{Q}$, $y = \cos x$ ar trebui să fie $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}$.

Acest lucru se dovedește că nu este adevărat, prin verificare directă. Deci $\cos r^\circ \notin \mathbb{Q}$. Deci $\cos 20^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Aplicând acum Lema 3 și faptul că, $\cos 20^\circ \notin \mathbb{Q}$, rezultă că, $\cos 40^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Acum vom arăta că, $\cos 36^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Fie $x=36^\circ$, deci vrem să arătam că, $\cos x \notin \mathbb{Q}$.

Din $\cos 180^\circ = -1 \Rightarrow \cos 5x = -1$. Din Lema 1 rezultă că $\cos^5 x - C_5^2 \cos^3 x \sin^2 x + C_5^4 \cos x \sin^4 x = -1$. Notăm $\cos x = y$, obținem ecuația care are ca rădăcină pe $\cos x$,
 $y^5 - 10y^3(1-y^2) + 5y(1-y^2)^2 = -1 \Rightarrow 16y^5 - 20y^3 + 5y + 1 = 0$. Dacă $\cos x \in \mathbb{Q}$, $y = \cos x$ ar trebui să fie $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{8}; \pm \frac{1}{16}$. Acest lucru prin verificare directă se dovedește a fi fals. Deci

$\cos 36^\circ \notin \mathbb{Q}$

Deoarece 12 este divizor al lui 36, $\cos 36^\circ \notin \mathbb{Q}$, din Lema 3 rezultă $\cos 12^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Lema 4 este complet demonstrată.

Reamintim acum celebra Teoremă a lui Euclid:

Teorema (Euclid)

Fie $p, q \in \mathbb{N}^*$. Notăm (p, q) c.m.m.d.c al numerelor p și q . Atunci:

$(p, q) = r \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p \cdot m + q \cdot n = r$.

Lema 5

Fie $p \in \{1, 2, 3, \dots, 89\} \setminus \{60\}$. Atunci $\cos p^\circ \notin \mathbb{Q}$.

Demonstratie

Fie $p \in \{1, 2, 3, \dots, 89\} \setminus \{60\}$. Atunci $(p, 180) = r \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 20, 30, 36, 45\}$.

Conform teoremei lui Euclid, există $m, n \in \mathbb{Z}$ astfel încât $p \cdot m + 180 \cdot n = r \Rightarrow$

$p^\circ \cdot m + 180^\circ \cdot n = r^\circ \Rightarrow \cos(p^\circ \cdot m + 180^\circ \cdot n) = \cos r^\circ \Rightarrow \cos(p^\circ \cdot m) = \pm \cos r^\circ$.

Din Lema 4 rezultă $\cos r^\circ \notin \mathbb{Q}$. Deci $\cos(p^\circ \cdot m) \notin \mathbb{Q}$.

Din Lema 3 rezultă că, $\cos p^\circ \notin \mathbb{Q}$

Folosind acum Lema 5, $\cos 0^\circ = 1 \in \mathbb{Q}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\cos 90^\circ = 0 \in \mathbb{Q}$ și proprietățile

elementare ale funcțiilor $\cos x$ și $\sin x$ rezultă Teorema enunțată la începutul lucrării.

Încheiem cu următorul exemplu:

Să se decidă dacă $\cos 2009^\circ$ este rațional sau irațional.

Avem: $2009^\circ = 5 \cdot 360^\circ + 209^\circ \Rightarrow \cos 2009^\circ = \cos 209^\circ$. Aplicând teorema de la începutul lucrării obținem că, $\cos 2009^\circ \notin \mathbb{Q}$.

O DEMONSTRAȚIE A TEOREMEI LUI THALES

Ion Ghica, Rm. Vâlcea

În manualul de Matematică pentru clasa a VII-a, edițiile anterioare anului 2006, *Teorema lui Thales* este demonstrată numai pentru rapoarte cu numere raționale.

În anul 2006, Editura Radical, din Craiova, scoate manualul de Matematică pentru clasa a VII-a, în care Teorema lui Thales are o demonstrație bazată pe aria trapezului și construcții auxiliare, iar reciproca teoremei este demonstrată prin Metoda Reducerii la Absurd ca și în manualele anterioare.

În cele ce urmează, prezint o demonstrație completă și unitară a *Teoremei lui Thales*, precum și a reciprocei ei folosind „aria triunghiului”.

Ideea demonstrației teoremei cu „aria triunghiului” mi-a fost sugerată de următoarea problemă: „Se consideră triunghiul ABC și $M \in (BC)$. Arătați că

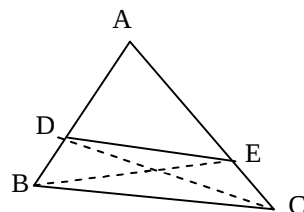
$$\frac{BM}{MC} = \frac{A_{(ABM)}}{A_{(ACM)}} \quad (A_{(PQR)} = \text{aria triunghiului } PQR).$$

Teorema lui Thales

Se consideră triunghiul ABC , $D \in AB$ și $E \in AC$. $DE \parallel BC$ dacă și numai dacă

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Demonstrație.



Cazul I: $D \in (AB)$ și $E \in (AC)$.

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{\frac{AD \cdot d(C, AB)}{2}}{\frac{DB \cdot d(C, AB)}{2}} = \frac{\frac{AE \cdot d(B, AC)}{2}}{\frac{EC \cdot d(B, AC)}{2}} \Leftrightarrow$$

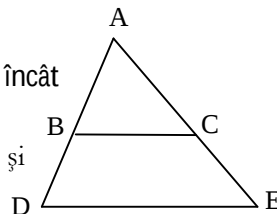
$$\frac{A_{(CAD)}}{A_{(CBD)}} = \frac{A_{(BAE)}}{A_{(BCE)}} \Leftrightarrow \frac{A_{(CAD)} + A_{(CBD)}}{A_{(CBD)}} = \frac{A_{(BAE)} + A_{(BCE)}}{A_{(BCE)}} \Leftrightarrow \frac{A_{(ABC)}}{A_{(CBD)}} = \frac{A_{(ABC)}}{A_{(BCE)}} \Leftrightarrow A_{(CBD)} = A_{(BCE)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC \cdot d(D, BC)}{2} = \frac{BC \cdot d(E, BC)}{2} \Leftrightarrow d(D, BC) = d(E, BC) \Leftrightarrow DE \parallel BC.$$

($d(P, MN)$ = distanța de la punctul P la dreapta MN).

Cazul II: $D \in AB$ astfel încât $B \in (AD)$ și $E \in AC$ astfel încât $C \in (AE)$.

Se aplică Teorema lui Thales pentru cazul I ($B \in (AD)$ și $C \in (AE)$).



$$BC \parallel DE \Leftrightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE} \Leftrightarrow \frac{AB+BD}{BD} = \frac{AC+CE}{CE} \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

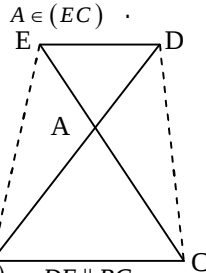
$$\text{Așadar, } DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Cazul III: $D \in AB$ astfel încât $A \in (BD)$ și $E \in AC$ astfel încât

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \Leftrightarrow \frac{\frac{AD \cdot d(C, BD)}{2}}{\frac{DB \cdot d(C, BD)}{2}} = \frac{\frac{AE \cdot d(B, CE)}{2}}{\frac{EC \cdot d(B, CE)}{2}} \Leftrightarrow \frac{A_{(CAD)}}{A_{(CBD)}} = \frac{A_{(BAE)}}{A_{(BCE)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{A_{(CBD)} - A_{(CAD)}}{A_{(CBD)}} = \frac{A_{(BCE)} - A_{(BAE)}}{A_{(BCE)}} \Leftrightarrow \frac{A_{(ABC)}}{A_{(CBD)}} = \frac{A_{(ABC)}}{A_{(BCE)}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{(CBD)} = A_{(BCE)} \Leftrightarrow \frac{BC \cdot d(D, BC)}{2} = \frac{BC \cdot d(E, BC)}{2} \Leftrightarrow d(D, BC) = d(E, BC) \Leftrightarrow DE \parallel BC.$$



CE SUNT POLINOAMELE CEBÂȘEV ?

Prof. dr. Miron Oprea și Prof. Grațiela Calcan



1821 -1894

Pafnutie Lvovici Cebâșev a fost un celebru matematician rus din secolul al XIX-lea care a elaborat lucrări originale în *teoria probabilităților*, în *calculul variațional*, în *teoria numerelor* (J.J. Sylvester l-a numit *învăgătorul numerelor prime*, care a forțat torrentul capricios al acestora să „între în limitele algebrei”), în *calculul integral* (în 1853 a analizat toate cazurile de integrabilitate a diferențialelor binome). Este considerat creatorul teoriei celei mai bune aproximări a funcțiilor prin polinoame. Are contribuții importante în *teoria mecanismelor*, a *balisticii* și în foarte multe alte domenii cu caracter aplicativ. P.L. Cebâșev a fost profesor la Universitățile din Moscova și Petersburg și membru

al Academiei de Științe din Petersburg, Berlin, Paris și al Royal Society din Londra.

În lucrările legate de *teoria celei mai bune aproximări a funcțiilor prin polinoame* (temă și azi importantă), Cebâșev introduce două tipuri de polinoame care au rămas, în literatura de specialitate, sub numele de *polinoame Cebâșev* de prima și de a doua speță. În cele ce urmează vom prezenta cititorului nostru definiția și proprietățile semnificative ale acestora.

I. Polinoamele Cebâșev de prima speță

Definiție: Se numește *polinom Cebâșev de prima speță* polinomul de forma $T_n(x) = \cos n\theta$ unde $x = \cos \theta$ și $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{ll}
 n=0 \Rightarrow T_0(x)=1 & n=4 \Rightarrow T_4(x)=8x^4-8x^2+1 \\
 \text{Calculând pentru: } n=1 \Rightarrow T_1(x)=x & n=5 \Rightarrow T_5(x)=16x^5-20x^3+5x \quad \dots \\
 n=2 \Rightarrow T_2(x)=2x^2-1 & n=6 \Rightarrow T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1 \\
 n=3 \Rightarrow T_3(x)=4x^3-3x &
 \end{array}$$

observăm că se obțin o serie de polinoame în care $n = \text{grad}.T_n(x)$, $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots$, (adică, coeficientul director al polinomului este 2^{n-1}) și polinoamele de grad impar conțin numai monoame de grad impar, iar cele de grad par conțin numai monoame de grad par. Mai observăm că:

$$\begin{array}{l}
 T_{n+1}(x) = \cos(n+1)\theta = \cos(n\theta + \theta) \\
 T_{n-1}(x) = \cos(n-1)\theta = \cos(n\theta - \theta)
 \end{array}
 \Rightarrow T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2\cos n\theta \cos \theta = 2xT_n(x)$$

Deci, aceste polinoame verifică relația de recurență: $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ care funcționează pentru $n \geq 1$; $T_0(x)=1$ și $T_1(x)=x$ fiind dați.

Cercetând cu atenție polinoamele începând cu $T_2(x)=x$, observăm că:

$$\begin{array}{l}
 T_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 2xT_1(x) - T_0(x); T_0(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 2xT_2(x); T_4(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 2xT_3(x) - T_2(x) \quad \dots \\
 T_5(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 2xT_4(x) - T_3(x); \dots; T_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)
 \end{array}$$

Ceea ce înseamnă că polinomul Cebășev de primă speță, de gradul n este determinantul

$$\text{de ordinul } n, \quad \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1x \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1x \end{vmatrix} \quad (\text{aceasta fiind o}$$

matrice pătrată de ordinul n tridiagonală).

Pe de altă parte, folosind formula lui Moivre $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$,

găsim: $T_n(x) = \cos n\theta = \cos^n \theta - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \theta \sin^4 \theta - \dots = x^n - \binom{n}{2} (1-x^2)x^{n-2} + \binom{n}{4} (1-x^2)^2 x^{n-4} - \dots$, în

care coeficientul director este: $1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = 2^{n-1}$

$$\text{Mai observăm că } T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + i\sqrt{1-x^2} \right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2} \right)^n \right]$$

Proprietăți

Din relația de recurență și din definiție, rezultă următoarele proprietăți ale polinoamelor Cebășev de prima speță:

1. $T_{2n}(x) = T_{2n}(-x)$
2. $T_{2n+1}(-x) = -T_{2n+1}(x)$
3. Zerourile polinomului $T_n(x)$ sunt în intervalul $(-1,1)$ deoarece

$$T_n(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(n \arccos x) = 0 \Rightarrow n \arccos x = (2k-1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \Rightarrow x = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \in (-1,1) \text{ pentru } k = \overline{1, n}$$

$$4. T_n(1) = \cos(n \arccos 1) = \cos(n \cdot 2k\pi) = 1; T_{2n}(-1) = \cos(2n \arccos(-1)) = \cos 2n(2k+1)\pi = 1;$$

$$T_{2n+1}(-1) = \cos[(2n+1) \arccos(-1)] = \cos(2n+1)(2k+1)\pi = -1$$

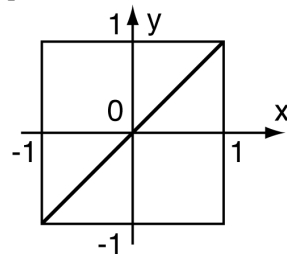
5. Se verifică imediat că $T_n(x)$ este soluție a ecuației diferențiale de ordinul doi :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

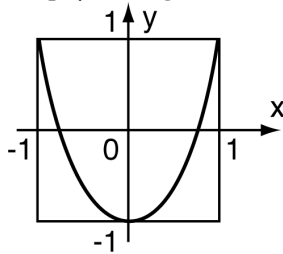
6. De asemenea, se verifică egalitatea: $\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)t^k$; (ceea ce înseamnă

că aceste polinoame au ca funcție generatoare $\frac{1-t^2}{1-2tx+t^2}$)

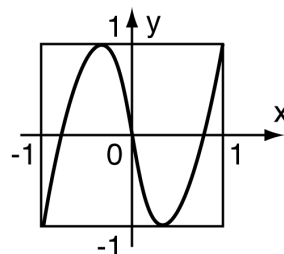
Proprietățile 1-4 ne permit să construim imediat graficele acestor polinoame. Iată graficele polinoamelor Cebășev de prima speță și de gradele 1-6:



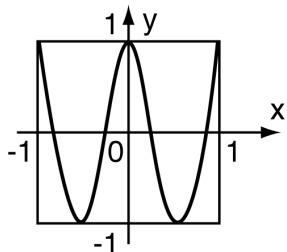
$T_1(x)=x$



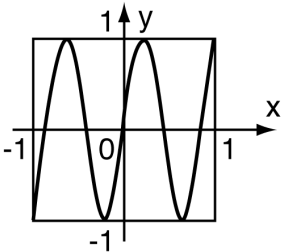
$T_2(x)=2x^2-1$



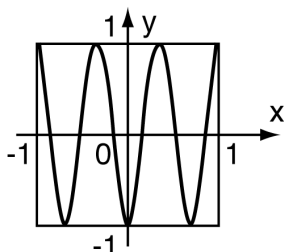
$T_3(x)=4x^3-3x$



$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$



$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$



$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$

II. Polinoamele Cebâșev de a doua speță

Definiție: Se numește polinom Cebâșev de a doua speță polinomul de forma

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} \text{ unde } \cos \theta = x \text{ și } n \in \mathbb{N}.$$

$$n=0 \Rightarrow U_0(x) = 1$$

$$n=4 \Rightarrow U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

Calculând pentru: $n=1 \Rightarrow U_1(x) = 2x$

$$n=5 \Rightarrow U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$n=2 \Rightarrow U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$n=6 \Rightarrow U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 42x^2 - 1$$

$$n=3 \Rightarrow U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

observăm că se obțin o serie de polinoame în care $n = \text{grad} U_n(x)$, $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$

(adică, coeficientul director este 2^n) și polinoamele de grad impar conțin monoame de grad impar, iar cele de grad par conțin numai monoame de grad par.

$$\left. \begin{aligned} \text{Mai observăm că : } U_{n+1}(x) &= \frac{\sin(n+2)\theta}{\sin \theta} \\ U_{n-1}(x) &= \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) = \frac{2\sin(n+1)\theta \cos \theta}{\sin \theta} \text{ sau}$$

$$\boxed{U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)} \text{ pentru } n \geq 1 \text{ cu } U_0(x) = 1 \text{ și } U_1(x) = 2x \text{ dați.}$$

Cercetând cu atenție polinoamele, începând cu $U_2(x)$, observăm că:

$$U_2(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2xU_1(x) - U_0(x); U_3(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x & 1 \\ 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2xU_2(x) - U_1(x);$$

$$U_4(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2xU_3(x) - U_2(x); U_5(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2xU_4(x) - U_3(x); \dots$$

$$U_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{vmatrix} = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Ceea ce înseamnă că polinomul Cebâșev de a doua speță de gradul n este determinantul

$$\text{matricei pătrate de ordinul } n \text{ tridiagonală: } \det \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2x \end{bmatrix} = U_n(x).$$

Observăm că $U_{2n}(-x) = U_{2n}(x)$; $U_{2n+1}(-x) = -U_{2n+1}(x)$ iar zerourile polinomului $U_n(x)$

sunt $\cos \frac{k\pi}{n+1} \in (-1, 1)$ cu $k = \overline{1, n}$.

Este evident că, pe baza acestor proprietăți se pot construi imediat graficele acestor două polinoame, “oarecum” analoage cu ale polinoamelor de prima speță.

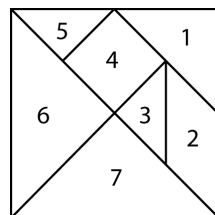
Bibliografie

- [1] I. Purcaru și O.Bîscă: Oameni, idei, fapte din Istoria matematicii (Ed. Economică, București, 1996)
- [2] S.I.Novoselov: Curs special de trigonometrie (Ed. Tehnică, București, 1956)
- [3] I.Cuculescu: Analiza numerică (Ed. Tehnică, București, 1967)
- [4] D.Y.Savio and E.R.Suryanarayan: Chebychev Polynomials and Regular Polygons (Mathematical Monthly, 1993, august-september)
- [5] A.M.Iaglom și I.M.Iaglom: Probleme neelementare tratate elementar (Ed. Tehnică, București, 1962)

ASCUȚITORI PENTRU MINTE

Anunțam cititorii, că, începând cu acest număr, introducem, în cuprinsul revistei, rubrica cu titlul de mai sus, care cuprinde 5-10 probleme de perspicacitate ce pun la încercare *spiritul de observație, ituiția și ... mintea omului.*

1. Pătratul alăturat este alcătuit din 7 figuri numerotate de la 1 la 7, dintre care numai 6 și 7 sunt egale. Cu ajutorul celor 7 bucăți să se alcătuiască un dreptunghi și apoi tot cu ele un triunghi.

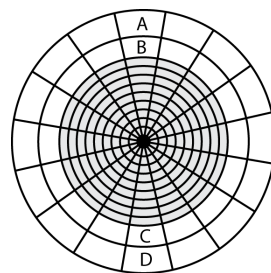


2. Figura alăturată este formată din două discuri circulare cu același centru dar de raze diferite și este împărțită prin opt diametre în 16 sectoare de cerc. Fiind date mulțimile de numere $M=\{0, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 9\}$; $N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$

Să se înscrie M în căsuțele discului exterior, iar N în căsuțele discului interior astfel încât :

a) dacă se adună cele 4 numere aflate în sectoare opuse să obținem totdeauna 26 (de exemplu $A+B+C=26$)

b) dacă discul mic se rotește în orice sens, în momentul opririi, suma numerelor din fiecare sector să rămână tot 26.

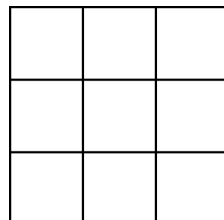


3. Se știe că în Japonia, nu numai pentru că teritoriul este bătut de cutremure și taifunuri, dar și din tradiție, casele obișnuite (nu și apartamentele din blocuri) sunt construite din materiale ușoare, cu pereți interiori mobili, astfel că dintr-o cameră se pot face două. Un japonez, construindu-și o casă pătrată (ca în figura alăturată) a ținut

neapărat ca ea sa fie cu pereții mobili, astfel încât, atunci când va voi, iar unii copii se vor căsătorii, să-și poată împărți casa după placul inimii lor. Cele 9 camere le-a dorit pătrate, rămânând să le dea și alte forme, în eventualitatea că va desființa unii din cei 12 pereți interiori desparțitori și orice schimbare s-ar face trebuie ca din fiecare cameră să se poată intra în alta.

Cum trebuie procedat pentru ca :

- a) dacă se scot 4 pereți să rămână 6 camere
 b) dacă se scot 4 pereți să rămână 5 camere
 c) dacă se scot 5 pereți să rămână 4 camere
 d) dacă se scot 6 pereți să rămână 3 sau 4 camere (după dorință)
 e) dacă se scot 8 pereți să rămână 2 camere



4. Se știe că numarul populației județului Brașov în anul 1900, era format din 5 cifre. Dacă se adaugă cifra 1 la sfârșitul acestui numar se obține un număr de 3 ori mai mare decât dacă se adaugă aceeași cifră 1 la începutul numărului. Se cere numărul populației județului Brașov în anul 1900.

$$\begin{array}{r}
 **** * \\
 **** * \\
 **** * \\
 **** * \\
 **** * \\
 **** * \\
 **** * \\
 **** * \\
 \hline
 2212****
 \end{array}$$

5. Să se refacă înmulțirea

6. Folosind o singură dată fiecare din cifrele 1 ,2, 3, 4, 5, 6 și fiecare din operațiile adunare, scădere, înmulțire, împărțire și ridicare la putere, să se obțină cel mai mare număr posibil.

7. Să se împartă 45 în patru părți astfel încât dacă la prima parte se adaugă 2, din a doua se scade 2, iar a treia se înmulțește cu 2, iar a patra parte se împarte la 2, rezultatele să fie egale.

8. Să se afle data nașterii unui copil știind că s-a născut într-un an cu soț în ziua de 30 a lunii, într-o zi de joi și a împlinit cinci ani tot într-o joi.

9. Mironuț este fiul soriei tatălui fiicei fratelui mamei Măriucăi, dar mama lui Măriuca este sora cu mama lui Mironuț. Ce relație de rudenie este între Măriuca și Mironuț ?

10. Să se determine numarul de trei cifre din care dacă scad 7 se divide la 7 , dacă scad 8 se divide la 8 , iar dacă scad 9 se divide la 9.

Rubrică realizată de M. Oprea

