

Pentru comenzi, publicare, abonamente sau alte informații despre revistă, contactați-ne la adresa redacției, Str Crișan nr 25 (Casa Tineretului Et 2), e-mail: editurastef@yahoo.com, prin reprezentantul revistei în școala dumneavoastră (colectivul de redacție) sau direct la www.editurastef.com

*spuneti părerea pe forumul editurii:
www.editurastef.com*

MATEMATICĂ

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

GIMNAZIU

Nr. 3

noiembrie

**Comandă revista la:
www.editurastef.com**

ANUL I - 2008

Concursul național „Micii matematicieni” Gimnaziu - ediția I

Trimiteți rezolvările problemelor, împreună cu talonul de mai jos, până la data de 1 dec 2008 (data poștei), pe adresa redacției și puteți câștiga, prin tragere la sorți, una din cele 10 reviste din numărul viitor și veți intra în clasamentul concursului „Micii matematicieni”, concurs ce se va încheia la 15 iunie 2009.

*Prin aportul vostru, în acest concurs va intra și școala voastră.
Premii surpriză !*

Acum puteți consulta clasamentul si punctajul fiecăruia la:

<http://www.editurastef.com/forum/viewforum.php?f=2&sid=9a942ee1ec2a3b7262d467f3840b06c8>

Talon concurs național „Micii matematicieni”–Nr. x

Numele _____

Prenumele _____

Cls. _____, Școala _____

Profesor _____

Localitatea _____

Județul _____

** Nu se iau în considerație taloanele xeroxate*

Regulament concurs: Fiecare problemă rezolvată corect se punctează cu 2p. Problemele rezolvate parțial se punctează cu 1p. Participare la concurs aduce de la sine 1p. [2 probleme × 2p + 1p participare = 5p]

Tehnoredactor: Dragan-Mihai Nedelcu



Tipărit: S.C. „D & A” COM S.R.L
Drobeta Tr.-Severin
e-mail: editurastef@yahoo.com
www.editurastef.com
Tel/Fax: 0352 401 584
0744-495186 / 0788.220605

Adresa redacției:
SC D & A COM SRL
Editura Ștef – Pentru revista „Matematica”
Str. Kiseleff, 76, Bl.3, sc.3, ap.1
Drobeta Tr.-Severin – Mehedinți - 220196

Clasa a V-a

1. Să se demonstreze că, din oricare patru numere naturale putem alege două a căror diferență este divizibilă cu 6.

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

2. Din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, scrise în baza zece, scoatem acele numere care au suma cifrelor 6. Aflați suma numerelor rămase.

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

3. Într-o curte se află mai mult de 200 și cel mult 300 de creioane. Câte creioane sunt dacă numărându-le câte 2, 3, 4, 5 sau 6 rămâne de fiecare dată un creion ?

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

4. Aflați numărul natural x care îndeplinește relația:

$$\overline{6x}^{70} : 8^{120} = 16^{20} : 4^{10}$$

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

5. Aflați restul împărțirii numărului $a = 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ 17\text{-}506$, la numărul $b = 128\ 000$

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

6. Să se stabilească cu câte zerouri se termină numărul:

$$15^3 \cdot 25^2 \cdot 2^4 \cdot 4^2.$$

Prof. Daniela Nica, Șc.13 Timișoara, Timiș

7. Aflați numărul natural k astfel încât numărul $N = 15^{2k} \cdot 4^k$ să se dividă cu 1000000.

Prof. Daniela Nica, Șc.13 Timișoara, Timiș

8. Stabiliți dacă numărul

$N = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008$, este pătrat perfect.

Prof. Daniela Nica, Șc.13 Timișoara, Timiș

9. Se dă numărul $a = 3^{n+3} \cdot 2^{n+6} + 3^{n+3} \cdot 2^{n+3} + 3^n \cdot 2^{n+6}$.

- să se arate că numărul a este divizibil cu 2008;
- să se determine valoarea lui n număr natural, pentru care numărul a nu este divizibil cu 6.

Prof. Elena Rîmnicianu, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

10. Dacă $a + c = 2009$ și $b + c = 10000$ să se calculeze $a + 2008b + 2009c$.

Prof. Elena Rîmnicianu, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

11. Știind că suma a două numere naturale este 2008 și cel mai mare divizor comun al numerelor este 251, să se afle numerele.

Prof. Elena Rîmnicianu, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

12. Să se afle cel mai mic și cel mai mare număr natural de 5 cifre care împărțite la 2008 dau restul 10.

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

13. Determinați numărul natural x dacă : $2^{2^x} = 4^{16}$.

Prof. Miclea Ioan, Șc. "Filaret Barbu", Lugoj, Timiș

14. Numerele naturale 79 și 95 se împart la același număr n și se obțin resturile 2 și respective 4. Care este numărul ?

Prof. Constantin Diaconescu, Șc. Bascov, Argeș

15. Ordonăți crescător numerele a, b, c, d, e, f știind că:

$$a + 3 = b - 8 = c + 9 = d - 9 = e + 14 = f - 13$$

Prof. Spiță Cristina – Șc. Zegujani, Mehedinți

16. Andreea citește în prima zi 10 pagini dintr-o carte, în a doua zi de două ori mai multe, în a treia zi de trei ori mai multe ca în prima zi și tot așa. În câte zile termină cartea știind că aceasta are 360 pagini.

Prof. Spiță Cristina – Șc. Zegujani, Mehedinți

17. Arătați că numărul : $N = 3^{n+3} \times 4^{n+1} + 2^{2n+6} \times 3^{n+1}$ este divizibil cu 5, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Prof. Nițoiu Angela, CT „Decebal” – Dr. Tr. Severin

18. Determinați numărul natural x din egalitatea:

$$6 \times \{ [25^3 : 5^4 - (5^x - 4)] - 1^{30} \} = 18.$$

Prof. Nițoiu Angela, CT „Decebal” – Dr. Tr. Severin

19. Într-o cutie sunt mai mult de 65 dar mai puțin de 80 nasturi. O treime sunt albi, un sfert sunt negri, iar restul sunt roșii.

Câți nasturi sunt în cutie ?

Câți nasturi sunt de fiecare fel ?

20. Să se împartă la trei persoane 24 sticle de suc identice ca mărime, din care 5 sunt pline, 11 umplute pe jumătate și 8 goale, încât fiecare să aibă același număr de sticle, dar și aceeași cantitate de suc.

21. Suma a trei numere este 134. Dacă adăugăm la fiecare același număr, obținem 48, 53 și 69. Care sunt numerele ?

22. Determinați n, p numere prime astfel încât

$$2^p (2^{n+p} - p) = 2008.$$

23. Aflați numerele naturale a, b, c care satisfac egalitățile:

$$a \cdot b = \{(2^5 \cdot 8^6) : [(16^4)^5 : (32^3)^4]\} \cdot 9;$$

$$b \cdot c = \{(3 \cdot 9^6) : [(27^3)^4 : (81^2)^3]\} \cdot 4^2;$$

$$a \cdot c = [(12^3 \cdot 36^2) : 24^3] : 3.$$

24. Comparați numerele:

$$a = 3^{1996} - 2 \cdot (3^{1995} + 3^{1994} + \dots + 3^{100}) \text{ și}$$

$$b = 2^{1996} - (2^{1995} + 2^{1994} + \dots + 2^{150})$$

25. Numerele naturale a, b, c, d împărțite la 5 dau cături numere impare consecutive și resturi nenule diferite.

Arătați că $a + b + c + d$ se divide cu 10.

Determinați valoarea minimă a sumei $a + b + c + d$.

26. Să se afle ultima cifra a numărului „ a ” și să se arate că „ a ” este pătrât perfect, unde $a = (1+2+3+ \dots +2006)^{1+2+3+ \dots +2007}$

Concurs – cls a V-a

*I** Suma a trei numere naturale este 100. Suma primelor două numere este egală cu al treilea, iar diferența lor este 20. Aflați cele trei numere.

*2** Determinați cel mai mare număr natural a care împărțit la 1985 dă câtul mai mic decât restul.

Rezolvarea în numărul viitor.

Rezolvarea problemelor din numărul trecut.

*I** Să se calculeze suma: $S = 2+7+12+\dots+302$.

Metoda I : Observând că numerele merg din cinci în cinci, scriem suma în două moduri:

$$S = 2 + 7 + 12 + \dots + 302$$

$$S = 302+297+292+\dots+ 2$$

Adunând termen cu termen, rezultă: $2S = 304+304+\dots+304$. Să vedem acum câți termeni are suma.

Scriind $2=5\times 0+2$, $7=5\times 1+2$, ș.a.m.d., $302=5\times 60+2$, observăm că suma are 61 de termeni.

Deci, $2S = 304\times 61$, de unde $S = (304\times 61) : 2$. După calcule, $S = 9272$.

Metoda a II-a:

$$S = (5\times 0+2) + (5\times 1+2) + (5\times 2+2) + \dots + (5\times 60+2) = 5\times (1+2+\dots+60) + 2+2+\dots+2 = 5\times (60\times 61):2 + 2\times 61 = 9150 + 122 = 9272.$$

*2** Fiind date numerele naturale a, b, c astfel încât: $2a + b - c = 8$ și $a - b + 3c = 4$, să se afle numărul $8a + b + 3c$.

$$8a + b + 3c = 6a + 3b - 3c + 2a - 2b + 6c = 3\times (2a + b - c) + 2\times (a - b + 3c) = 3\times 8 + 2\times 4 = 32.$$

Rezultatele obținute la concursul din revista numărul 2:

Dr. Tr. Severin – Șc. „Alice Voinescu” – Dragomir Andreea-5, Șealău Costinela Georgiana-5, Petroi Maria Adriana-5, Berbecel Andreea Cornelia-5 (prof. Nebancea Ani); **Jud. Buzău – Buzău – Șc. 11** – Ionescu Dana-4, Bunea Andreea-4, Bucur Emilia-4 (prof. Boianțiu Georgeta); **Jud. Timiș – Lugoj – Șc. „F. Barbu”** – Brînzan Denisa-5, Fodor Dariana-5, Debucean Caius Ioan-5 (prof. Miclea Ioan).

Clasa a VI-a

1. Știind că $\frac{a-b}{c} = \frac{2}{3}$ și $\frac{d}{a+b} = \frac{3}{2}$ calculați:

$$\frac{ad-bd}{bc+ac} \text{ și } \frac{a^2-b^2}{dc}$$

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

2. Dacă $6a^2 - 7ab + 2b^2 = 0$, $b \neq 0$, aflați valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

3. Dacă a și b sunt cifre nenule în baza 10, calculați:

$$\left[\left(10101 \overline{ab^2} \right)^{101} \cdot \left(\overline{ab}^{101} \right)^{\overline{ab^2}} \right] : \left(\overline{ababab}^{\overline{abab}} \right)^{\overline{ab}}$$

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

4. Știind că unghiul A ia valoarea din proporția:

$$\frac{A}{2009} = \frac{30 \cdot 2008}{1 + 2 + 3 + \dots + 2008},$$

să se afle suplementul complementului unghiului A .

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

5. Să se arate că $x = \frac{8^{2008} + 8^{2009}}{7^{2007}} \cdot \frac{7^{2007} + 7^{2008} + 7^{2009}}{8^{2009}} - \frac{9}{8}$ este

număr natural.

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

6. Fie mulțimile :

$$A = \left\{ x \in N \left| \frac{12}{x-4} \in N \right. \right\} \text{ și } B = \left\{ y \in N \left| \overline{22y:12} \right. \right\}.$$

7. Să se determine mulțimile: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

Prof. Nițoiu Angela, CT „Decebal” – Dr. Tr. Severin

8. Se dau unghiurile formate în jurul unui punct, ca în figura de mai jos. Știind că $m(\angle BOC) = 90^\circ$, $\angle AOB$ și $\angle COD$ sunt complementare și $\angle AOB$ și $\angle AOE$ sunt suplementare, să se demonstreze că punctele A, O și D sunt coliniare.

Prof. Nițoiu Angela, CT „Decebal” – Dr. Tr. Severin

9. Fie unghiurile AOB, BOC, COD adiacente două câte două care au suma măsurilor lor de 150° și îndeplinesc condițiile:

$$\frac{m(\angle AOB)}{m(\angle BOC)} = \frac{a}{b}, \quad m(\angle COD) = c \quad \text{unde } a, b \text{ și } c \text{ sunt numere naturale prime}$$

care verifică relația $3a+b+6c=51$. Dacă [OM și [ON sunt bisectoarele unghiurilor BOC, respectiv COD, aflați măsura unghiului MON.

10. Unghiurile $\angle AOB$, $\angle BOC$ și $\angle COD$ sunt adiacente două câte două astfel încât (OA și (OD sunt semidrepte opuse. Determinați măsurile lor știind că sunt direct proporționale cu elementele mulțimii

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N}^* \mid \frac{15}{x+1} \in \mathbb{N} \right\}, \text{ scrise în ordine crescătoare.}$$

11. Fie mulțimile

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2^{2004} \nmid x < 2^{2006}\} \text{ și } B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \nmid 3^{1337}\}.$$

Aflați $\text{card} A$ și $\text{card} B$.

12. La un concurs de matematică cei 50 de concurenți au avut de rezolvat patru probleme. După corectare, s-a observat că 40 de elevi au rezolvat corect prima problemă, 42 au rezolvat-o pe a doua, 36 pe cea de-a treia, și 37 pe a patra.

a) Să se găsească numărul minim de elevi care au rezolvat corect primele două probleme.

b) Să se arate că cel puțin 5 concurenți au obținut punctajul maxim.

13. Într-o carieră sunt 50 de blocuri de piatră, având greutatea de 370 kg, 372 kg, 374 kg, ..., 468 kg. (Fiecare piatră, începând cu a doua, are cu 2 kg mai mult decât precedenta).

a) Să se arate că greutatea blocurilor de piatră nu depășește 21 de tone.

b) Se pot transporta blocurile cu 7 camioane de câte 3 tone, fiecare camion făcând un singur transport ?

$$14. \text{ Știind că } \frac{1}{a+2006} + \frac{1}{b+2007} + \frac{1}{c+2008} = \frac{3}{2009}, \text{ să se arate că}$$

$$\frac{a}{a+2006} + \frac{b+1}{b+2007} + \frac{c+2}{c+2008} = \frac{9}{2009}.$$

15. Să se determine numerele prime, a, b, c, d știind că:

$$60a + 90b + 72c + 119d = 2008.$$

16. Să se determine numerele naturale x și y cu $x \geq 3$ care satisfac egalitatea:

$$14^{x-3} + 5^y + 10 = 636$$

Concurs – cls a VI-a

$$I^* \text{ Se dau numerele } A = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$B = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{9}\right). \text{ Calculați } 2AB + 5$$

2* Segmentul $[AB]$ are 100 cm. Punctele C și D sunt interioare segmentului $[AB]$. Dacă $AC=BD=75$ cm, arătați că $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc. Semidreptele (OZ) și (OT) sunt interioare unghiului XOY . Dacă $m(\sphericalangle XOY) = 100^\circ$, $m(\sphericalangle XOT) = m(\sphericalangle YOZ) = 75^\circ$, arătați că bisectoarea unghiurilor XOY și ZOT coincid.

Rezolvarea în numărul viitor.

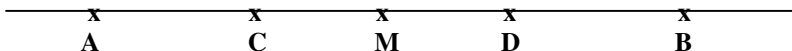
Rezolvarea problemelor din numărul trecut.

1*. Să se determine numărul natural a cu proprietatea că $a + 2 \mid 2a + 7$.

$a + 2 \mid 2a + 7$ dar $a + 2 \mid 2(a+2)$, deci $a+2 \mid (2a+7) - 2(a+2)$, de unde $a+2 \mid 3$.

De aici rezultă că $a+2$ este 1 sau 3. Dar a este număr natural, deci $a+2=1$ nu este posibil. Din $a+2=3 \Rightarrow a=1$.

2*. Se dau punctele coliniare A, B, C și D astfel încât C, D sunt între A și B iar $AB=30$ cm, $CD=12$ cm, $AC=9$ cm și fie M mijlocul lui AB. Să se demonstreze că M este și mijlocul lui CD.



Poziția celor patru puncte este cea din figură. $AB=30$ cm și M fiind mijlocul segmentului $AB \Rightarrow AM = MB = 15$ cm. $CM = AM - AC = 15$ cm - 9 cm = 6 cm. $DB = AB - AC - CM$, deci $DB = 30$ cm - 9 cm - 12 cm = 9 cm. $MD = MB - DB = 15$ cm - 9 cm = 6 cm, deci $CM = MD$, de unde rezultă că M este mijlocul lui [CD].

Rezultatele obținute la concursul din revista numărul 2:

Dr. Tr. Severin – Șc. „Alice Voinescu” – Șerban Mihai-5 (prof. Coadă Carmen); Oglindoiu Ovidiu Bogdan-3, Cioacă Alesia Andreea-5, Mihail Vlad Silviu-5, Ureche Roxana Mihaela-5, Șteta Ionuț Cristian-5, Vlădica Otilia Ana-Maria-5, Nicolau Adriana-5, Stângă Luciana Mihaela-5, Firan Claudia Alexandra-5, Catană Andra-5, Lăsculescu Denisa Ionela-5, Gichiuz Florin-5, Chirculescu Andreea Roxana-5 (prof. Nebancea Ani); **Șc. 11** – Goia Diana-5, Bratu Andrei-5 (prof. Cernovici Ileana); **Lic. „Șt. Odobleja”** – Stîngă Gina Mariana-5, Papa Ramona Dariana-5, Băciu Alexandra-5, Roșoga Augusta Lorena-4, Strhăianu Raluca Ștefania-5, Iacob Oana Mădălina-5, Munteanu Mădălina Georgiana-5, Ivănescu Alexandru-5, Brehui Andreea Carmen-5, Boboc Bianca-5, Vlăduțu Ștefan Alexandra Maria-5, Ionașcu Andra Georgiana-5, Mitroi Doru Andrei-5, Nedelcu Ștefania-5 (înv. Popescu Marcel); **Colegiul Tehnic Decebal** - Surugiu Codruța Ionela-5 (prof. Nițoiu Angela); **Jud. Vâlcea – Drăgășani – Șc. „N. Bălcescu”** – Mătiță Ionuț Sorin-5 (prof. Dogaru Alexandru).

Clasa a VII-a

1. În interiorul pătratului ABCD se consideră un punct E astfel încât triunghiul ABE să fie echilateral.

Să se arate că triunghiul ECD este isoscel;

Să se determine măsurile unghiurilor: $\angle AED$ și $\angle CDE$.

Prof. Manuela Oprea, Colegiul Tehnic Decebal – Dr. Tr. Severin

2. Calculați: $\frac{|2^{90} - 3^{60}| - |3^{60} - 4^{40}|}{123^0 - 2^{10}} \cdot 2^{-80}$

Prof. Manuela Oprea, Colegiul Tehnic Decebal – Dr. Tr. Severin

3. Se consideră triunghiurile isoscele ABC și ABD de baza [BC], respectiv [AD]. Știind că punctele D, B, C sunt coliniare și triunghiul ADC este dreptunghic, aflați:

a) măsura unghiului ACB;

b) înălțimea [AE] a triunghiului ABC, dacă $AD = 14,28$ cm.

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

4. În paralelogramul ABCD, măsura unghiului B este egală cu suplementul unghiului de 60° , $AB = 12$ cm, iar BC este egal cu două treimi din AC. Dacă M este mijlocul laturii AB, să se afle DM, perimetrul și aria paralelogramului.

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

5. Se dă un romb ABCD cu latura un număr prim par. Știind că $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$ să se afle aria rombului și distanța dintre două laturi opuse.

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

6. Să se arate că $\sqrt{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2008 + 2008}$ nu este rațional.

Prof. Miclea Ioan, Șc. "Filaret Barbu", Lugoj, Timiș

7. a) Arătați că adăugând 1 la produsul a două numere întregi impare consecutive se obține un pătrat perfect;

b) Arătați că adăugând 1 la produsul a patru numere întregi consecutive se obține un pătrat perfect.

8. Fie triunghiul ABC și $[AD]$ bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$, $D \in (BC)$. Dacă E și F sunt simetricele punctului D față de AB și AC , arătați că:

a) $[AE] \equiv [AF]$;

b) $AD \perp EF$.

9. Fie pătratul $ABCD$ și punctul E în interiorul, iar F în exteriorul pătratului, astfel încât triunghiurile ABE și BCF să fie echilaterale. Arătați că punctele D , E , F sunt coliniare.

10. Să se arate că: $\frac{3}{4} < \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{15}} + \frac{1}{\sqrt{35}} < 1$.

11. Se consideră mulțimea

$$M = \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid x = \overline{0,abc} \quad \text{si} \quad \frac{2}{3} \leq x \leq \frac{5}{6} \right\}.$$

Să se calculeze media aritmetică a numerelor din mulțimea M .

12. Doi elevi, A și B , joacă următorul joc. A alege un număr natural de la 1 la 8. B adaugă la acest număr un număr natural de la 1 la 8 și spune suma obținută. A adaugă acestei sume un număr natural de la 1 la 8 și spune noua sumă, și așa mai departe. Câștigă jucătorul care obține suma 2007. Arătați că jucătorul B poate adopta o strategie de câștig sigur.

13. Un triunghi ascuțitunghic ABC are $m(\angle BAC) = 30^\circ$. Bisectoarea unghiului BAC , intersectează mediatoarea laturii AB în punctul I . Pe perpendiculara în I pe dreapta AI se consideră punctul P astfel încât $IP = IA$. Punctele P și C se află de o parte și de alta a dreptei AI .

a) Să se arate că triunghiul PIB este echilateral.

b) Dacă, în plus, $AI = BC$, să se arate că patrulaterul $BCIP$ este romb.

14. Aflați numărul natural „ a ” știind că

$$1^a + 2^a + 3^a + 4^a + 9^a = 111.$$

15. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{1}{1005} + \frac{1}{1006} + \frac{1}{1007} + \dots + \frac{1}{2008} < \frac{3}{4}.$$

16. Fie triunghiul ABC cu $[AB] \equiv [AC]$, $m \angle(BAC) = 30^\circ$ și M mijlocul lui $[BC]$. Se pun în evidență simetricele P și Q ale punctului M față de dreptele AC , respectiv AB . Dreapta PQ intersectează dreptele AC și AB în E , respectiv F .

Ce fel de triunghi este APQ ?

Calculați perimetrul triunghiului MEF știind că $AM = 2$ cm.

17. Arătați că numărul

$A = 1 - 2 - 3 + 4 - 5 - 6 + 7 - 8 - 9 + \dots + 1999 - 2000 - 2001$ este multiplu de 1003.

18. Fie $A = \{x \in \mathbf{Z}^* \mid -13 \leq x < 40\}$ și $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, $B \neq A$.

Calculați suma tuturor elementelor din A .

Arătați că produsul tuturor elementelor mulțimii $A-B$ nu poate fi egal cu produsul tuturor elementelor mulțimii B .

19. În triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) avem $m(\angle ABC) = 72^\circ$ și $AD \perp BC$, $D \in BC$. Fie $E \in (AD)$ astfel încât $m(\angle DBE) = 18^\circ$ și F punctul de intersecție al perpendicularei din A pe AD cu dreapta BE .

Dacă O este mijlocul segmentului EF , calculați măsura unghiului $\angle AOB$.

Arătați că $AC = \frac{1}{2} EF$.

20. Aflați n întreg astfel încât $\sqrt{\frac{3n+5}{n+5}} \in \mathbb{Z}$.

21. Fie numerele: $x = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ și $y = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$. Aflați media aritmetică, geometrică și armonică a numerelor x și y .

22. Fie triunghiul isoscel ABC cu baza BC . Dacă punctul $D \in (AC)$ încât $\triangle ABD \cong \triangle BAC$ și $\angle BDC = \angle ACB$ să se calculeze:

- măsurile unghiurilor triunghiului ABC ;
- $AD + 3 \cdot BC + 6 \cdot BD$ când $BC = K$, cu $K > 0$.

Concurs – cls a VII-a

1*. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC , M este mijlocul lui BC , D proiecția lui A pe BC și E proiecția punctului G de intersecție a medianelor pe BC . Să se arate că $3BE = BD + BC$

2*. Fie $m, n, p \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ $n \in \mathbb{N}^*$ și

$$x = (-123)^{123} m^{n+2} n^5 p^{2n+1}$$

$$y = (-848)^{848} m^n n^3 p^{2n}$$

Dacă x și y au semne diferite, atunci să se precizeze semnul numărului p .

Rezolvarea în numărul viitor.

Rezolvarea problemelor din numărul trecut.

1. Calculați media aritmetică a numerelor:

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2008} \quad \text{și} \quad b = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2007}{2008}.$$

Ma (a,b) = (a+b): 2

$$a+b = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2008} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{2007}{2008}$$

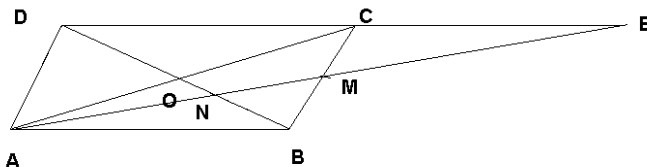
$$a+b = \frac{2}{2} + \frac{3}{3} + \frac{4}{4} + \dots + \frac{2008}{2008} = 1+1+1+\dots+1 = 1(2008-2+1)=2007$$

$$\text{Ma (a,b)} = 2007:2 = 1003,5.$$

2. În paralelogramul ABCD, punctul M este mijlocul laturii BC, intersecția laturii AC cu latura BD este punctul O, intersecția laturii AM cu latura CD este punctul E și intersecția laturii AM cu BD este punctul N.

a) Demonstrați că patrulaterul AMEC este paralelogram;

b) Demonstrați că ariile paralelogramelor ABCD și ABEC sunt egale și aflați raportul dintre aria triunghiului ABM și aria patrulaterului ABED.



a) M-mijlocul laturii [BC] și din ipoteză știm că $BC \parallel AD$ (ABCD-paralelogram) rezultă ca în $\triangle AED$ avem CM-linie mijlocie $\Rightarrow$ C-mijlocul laturii [DE] $\Rightarrow [DC] \equiv [CE]$. Cum CE este prelungirea laturii DC $\Rightarrow CE \parallel AB \Rightarrow$ ABEC paralelogram (are 2 laturi opuse paralele și congruente)

b) ABEC paralelogram $\Rightarrow AC \parallel BE$ și $[AC] \equiv [BE]$ și în plus M-mijlocul [AE].

Paralelogramului ABCD i se poate calcula aria ca fiind produsul dintre latura AB și înălțimea care coboară din C pe AB. Fie aceasta CP.

Paralelogramului ABEC i se poate calcula aria ca fiind produsul dintre latura AB și înălțimea care coboară din C pe AB. Aceasta fiind tot CP (dintr-un punct se poate duce o singură perpendiculară pe o dreaptă. Deci ariile celor două paralelograme sunt egale.

Cum M-mijlocul [BC] $\Rightarrow$ aria $\triangle ABM$ este jumătate din aria $\triangle ABE$ care la rândul ei este jumătate din aria paralelogramului ABEC $\Rightarrow$ A $\triangle ABM$ este o patrimă din aria paralelogramului ABEC

Rezultatele obținute la concursul din revista numărul 2:

Dr. Tr. Severin – Șc. „Alice Vonescu” – Mitroi Arina Daniela-5, Ținică Roxana-5, Ham Denisa Mariana-5, Bobiți Răzvan Lucian-5, Gavra Andreea-5, Argint Dragoș-5, Duță Diana-5 (prof. Nebancea Ani).

Clasa a VIII-a

1. În triunghiul ABC notăm cu D mijlocul segmentului BC și avem $AD = a$, $m(\sphericalangle ADB) = 60^\circ$, $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$. În B ridicăm perpendiculara BE pe planul triunghiului, cu $BE = a\sqrt{2}$. Aflați perimetrul triunghiului ABC.

Arătați că: $A_{ABC}^2 + A_{BCE}^2 = A_{ABE}^2 + A_{ACE}^2$.

Prof. Manuela Oprița, Colegiul Tehnic Decebal – Dr. Tr. Severin

2. Scrieți mai simplu:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} \cdot \sqrt{(2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}) \cdot (2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}})}$$

Prof. Manuela Oprița, Colegiul Tehnic Decebal – Dr. Tr. Severin

3. Se consideră paralelogramul ABCD cu $AB = 2a$, $AD = a$ și $m(\sphericalangle B) = 120^\circ$ și perpendiculara MB pe planul acestuia, $MB = a$.

- să se arate că $BC \perp (MBD)$
- să se calculeze distanța de la punctul M la AD
- să se stabilească poziția dreptei de intersecție a planelor (MAB) și (MDC) față de planul (ABD)
- calculați $\sin \sphericalangle (MD; AB)$

Prof. Coadă Carmen, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

4. Fie $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$. Arătați că $a \in \left(\frac{11}{12}; 5,5\right)$

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

5. Arătați că $\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{6} \in \mathbb{Z}$, oricare $x \in \mathbb{N}$

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

6. Arătați că numărul $a = \overline{x4} \cdot \overline{x6} + 1$ este pătrat perfect, oricare ar fi cifra x .

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

7. Fie $a = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{47}$. Arătați că $a : 3$ și $7 \mid a$.

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

8. Arătați că oricare ar fi $x \in R$ avem:

- a) $x^2 - x + 1 > 0$
- b) $3x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 > 0$
- c) $4x^4 + 4x^3 + x^2 + 1 > 0$
- d) $x^6 + x^4 - x^3 - x^2 + 1 > 0$
- e) $3x - x^2 - \frac{9}{4} \leq 0$

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

9. Se consideră cubul ABCDA`B`C`D` cu lungimea muchiei egală cu a .

a) Să se arate că piramida BAB`C este regulată și să se calculeze aria sa.

b) Două mobile P și Q pornesc în același timp și cu aceeași viteză din A și C`, parcurgând drumurile ABC și respectiv C`D`A. Să se determine distanța PQ în funcție de a și de distanța x dintre A și P în condițiile date.

Prof. Nebancea Ani, Șc. Alice Voinescu – Dr. Tr. Severin

10. Fie $a = 2\sqrt{(2-2008)^2} + 2\sqrt{(-2008)^2} - 2(\sqrt{2008} + 2007)$.

Să se afle mulțimea

$$A = \{ x \in R \mid |x - a| \leq 3 \}.$$

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

11. Fie expresia $E(x) = 2(x - 2008)^{2008} - 2[(-1)^x - 2^x : 2^{2008}]^x$.

Să se afle aceasta expresie pentru $x = 2009$.

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

12. Se dă triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$. Se duce perpendiculara din A pe planul triunghiului pe care se ia punctul M astfel încât $AM = AB = 30$ cm, iar $AC = 40$ cm. Să se afle distanțele de la punctul M la vârfurile triunghiului, la mijlocul ipotenuzei, precum și la punctul G - centrul de greutate al triunghiului ABC.

Prof. Moclea Adriana, Șc. 11, Dr. Tr. Severin

13. Să se rezolve ecuația:
$$\frac{\sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}} = \frac{4}{x}.$$

14. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sunt:

$a = 2n(n+1)$, $b = 2(n+1)(n+2)$ și $c = (n+1)^2 + 2$, $n \in N$. Arătați că diagonala paralelipipedului are ca lungime un număr natural.

15. Fie tetraedrul ABCD și M, N, P, Q, R, S mijloacele segmentelor [AB], [BC], [CD], [DA], [AC], [BD], respectiv. Arătați că dreptele MP, NQ, RS sunt concurente.

16. Fie $n \in N$ și $P = \frac{1}{n+1} - \frac{5}{n+5} + \frac{4}{n+6}$.

a) Să se arate că, oricare ar fi $n \in N$, numărul P se reprezintă ca fracție zecimală periodică.

b) Care este cea mai mică valoare a lui n pentru care numărul P se reprezintă ca fracție zecimală periodică simplă?

17. Pe o tablă sunt scrise numerele naturale consecutive de la 1 la 100. Doi elevi, A și B, joacă următorul joc: pe rând, începând cu A, ei completează cele 99 de spații dintre oricare două numere consecutive cu semnele “+”, “-” sau “.”. Dacă în final rezultatul obținut este număr impar, câștigă jucătorul care a completat ultimul spațiu rămas liber. Să se arate că jucătorul A poate adopta o strategie de câștig sigur.

18. Fie m și n două numere naturale distincte. Să se arate că, dacă numărul $p = 2^m + 2^n$ este pătrat perfect, atunci $|m - n| = 3$.

19. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ se dau $AB = 10\sqrt{7}$ cm, $BC = 24$ cm și $AA' = 50$ cm. Fie punctul M situat pe segmentul (AA') astfel încât triunghiul $D' MC$ să fie dreptunghic. Să se calculeze distanța de la punctul C' la dreapta MD .

20. Numărul rațional $\frac{a}{b}$ este de forma:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2006} + \frac{1}{2007} + \frac{1}{2008}.$$

Cercetați dacă numărul întreg „ a ” se divide cu 287.

21. Fie numerele $a = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{4013}$,

$$b = 5 \cdot 2^{2005} \text{ și}$$

$$c = 2^{2007} + 1.$$

a) Să se calculeze $(a+1) : 4^{2007}$;

b) Să se afle restul împărțirii lui $a + b$ la c .

22. Se consideră mulțimea $A = \{a \in \mathbb{N} \mid 100 \leq a \leq 142\}$. Un număr natural d se numește prieten cu 11 dacă:

a) $11 \mid d$

b) există $b \in A$ și $c \in A$ astfel încât $d = b^2 + c^2$.

Găsiți toate numerele naturale prietene cu 11.

23. Un trapez $ABCD$ are bazele AB și CD , $AB > CD$. Punctul M este mijlocul laturii AD . Aria trapezului este de 80 cm^2 , $BC = 10$ cm. Se ridică perpendiculara PM pe planul trapezului astfel încât $PM = 6$. Să se afle distanța de la punctul P la dreapta BC .

24. În triunghiul ABC ($m(\angle A) = 90^\circ$, și M mijlocul laturii BC. Mediatoarea laturii BC intersectează AC în N, astfel încât $\frac{AN}{NC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Dacă $AB = a$, să se afle $m(\angle ABC)$.

25. Fie triunghiul ABC ($[AB] \equiv [AC]$), unde perpendiculara în C pe BC intersectează AB în D iar G este mijlocul segmentului AC.

a) Arătați că $\frac{EC}{DC} = \frac{1}{3}$, unde $BG \cap DC = \{E\}$;

b) Aflați distanța de la D la dreapta BG, precum și valoarea raportului $\frac{GE}{DC}$, dacă $m(\angle B) = 60^\circ$, iar $BC = a$.

26. Să se determine $a, b, c \in \mathbb{N}$ știind că $2^a - 2^b - 2^c = 4^{1003}$.

17. Să se determine numerele prime a și b astfel încât $a^2 + b^3 = 368$.

27. Să se arate că un număr scris în baza 10 care are 2008 cifre dintre care 2007 de 3 nu poate fi pătrat perfect.

28. Pe planul pătratului ABCD se ridică, de aceeași parte, perpendicularele AM și CN.

Se dau: $AB = \sqrt{3}$, $AM = \frac{5\sqrt{2}}{2}$, $CN = \sqrt{2}$.

a) Să se arate că $MN \perp BD$.

b) Să se calculeze distanțele de la M la BN respectiv la planul (BCN)

Concurs – cls a VIII-a

1*. Se consideră polinoamele $P(x) = x^2 - 2x - 1$, $Q(x) = -x^2 - 1$. Arătați că oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $Q(a) < 0$. Dacă $n \in \mathbb{Z}$, atunci $[P(n) - Q(n)]$ se divide cu 4.

2*. Dacă $m \in \mathbb{R}$ și $m^2 + m - 1 = 0$, atunci
 $m^5 + 3m^4 - m^3 - 8m^2 - 2m + 4 = 0$

Rezolvarea în numărul viitor.

Rezolvarea problemelor din numărul trecut.

1*. Determinați $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât

$$[a, b] - \left[\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}, \sqrt{12 + 2\sqrt{35}} \right] = \emptyset.$$

$$4 + 2\sqrt{3} = 3 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + 1 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{3} + 1^2 = (\sqrt{3} + 1)^2, \quad \text{deci}$$

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = |\sqrt{3} + 1| = \sqrt{3} + 1$$

$$12 + 2\sqrt{35} = 7 + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} + 5 = (\sqrt{7})^2 + 2\sqrt{7}\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2,$$

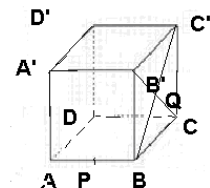
deci $\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} = \sqrt{7} + \sqrt{5}$

În concluzie pentru ca după ce scădem cele două intervale să obținem mulțimea vidă trebuie ca a să fie un număr întreg strict mai mare decât 2, dar nu mai mare decât 4 (chiar egal), iar b să fie un număr mai mare decât 2, dar nu mai mare ca 4 (chiar egal). Un exemplu de interval $[a, b]$ este $[3, 4]$.

2*. Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$, $AB = a$, P mijlocul muchiei AB și Q intersecția dreptelor BC' și $B'C$. Arătați că :

$$AC' \parallel (B'PC);$$

$$D'Q \perp (B'CP).$$



Dem: a) P-mijlocul laturii [AB] și Q-mijlocul laturii [B'C] $\Rightarrow$ PQ este linie mijlocie în $\triangle ABC' \Rightarrow PQ \parallel AC'$. Cum P,Q aparțin planului (PCB') înseamnă că dreapta determinată de cele două puncte este inclusă în plan; AC' nu este inclusă în acel plan deci $AC' \parallel (PB'C)$;

b) Din $\triangle D'C'Q$ -dreptunghic în C' rezultă din T. Pitagora că $D'Q = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

QP fiind linie mijlocie în $\triangle ABC'$ înseamnă că $PQ = \frac{AC'}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

În $\triangle D'AP$ -dreptunghic în A aplicăm T. Pitagora $\Rightarrow D'P = \frac{3a}{2}$

Dacă $D'Q \perp (PB'C)$ atunci trebuie arătat că $D'Q \perp PQ$. Acest lucru se demonstrează aplicând Reciproca T. Pitagora în $\triangle D'QP$: $DP^2 = D'Q^2 + PQ^2$, ceea ce este adevărat prin înlocuirea rezultatelor obținute anterior.

Rezultatele obținute la concursul din revista numărul 2:

Dr. Tr. Severin – Șc. „Alice Voinescu” – Bordea Mike Loius Gabriel-5, Pîrvan Florinel Flavius-5, Tănăsescu Ștefania Doina-5, Mirescu Cristian Petrișor-5, Răcăreanu Eduard Cosmin-5, Călin Marius Mihai-5, Știucă Andrei Constantin-5, Mureșean Alin Tony-5, Muschici Ionela Iuliana-5, Baicoană Iulia Adriana-5, Văduva Stancu Silvana Alina-5 (prof. Nebancea Ani).

Au colaborat	
Drobeta Turnu-Severin	
Șc. „Alice Voinescu” – Nebancea Ani, Coadă Carmen; Șc. 11 – Moclea Adriana, Rîmniceanu Elena; Colegiul Tehnic „Decebal” – Oprea Daniela, Nițoiu Angela; Șc. Zegujani – Spiță Cristina.	
Jud. Argeș	
Șc. Bascov – Diaconescu Constantin.	
Jud. Timiș	
Timișoara – Șc. 13 – Nica Daniela; Lugoj – Șc. „F. Barbu” – Miclea Ioan	