Concursul național de matematică ARHIMEDE
Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a III-a

I. 5p. **1.** Se dau numerele:

$$a = (4\times 8+7+6):[5\times 4:(3+2)+1]$$
$$b = (1+2)\times 10:5+6+7+8+9.$$

Arătați că b este de 4 ori a.

4p. **2.** Calculați:

$$1+3+5+...+15+17+19-2-4-6-...-16-18.$$

II. 4p. **1.** Dacă scădem dintr-un număr sfertul şi jumătatea sa, obținem 7. Care este numărul?

5p. **2.** Am adunat 13 numere naturale distincte şi nenule şi am obținut suma 92. Care sunt numerele pe care le-am adunat?

III. 9p. Suma a doua numere naturale este de forma $\overline{xx}$. Aflați numerele ştiind că:
- ultima cifră a primului număr este 9;
- al doilea număr este cu 8 mai mare decât primul număr.

IV. 9p. Într-o urnă sunt 13 bile albe şi negre, care urmează să fie extrase toate. Dacă scoatem din urnă o bilă albă, obținem 3 puncte, iar dacă extragem o bilă neagră, pierdem 2 puncte. Câte bile albe şi câte bile negre au fost în urnă, dacă au fost totalizate 24 de puncte?

Timp de lucru (1 ora şi 30 minute; la cerere, copii mai pot fi lăsați încă 30 de minute). Fiecare problemă este obligatorie şi se punctează de la 1 la 10. (Se acorda 1 punct din oficiu.)

Concursul național de matematică ARHIMEDE

Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

CLASA a IV-a

I. 5p. a) Calculați:

$$10101010 - 9999999$$

4p. b) Câte cifre de 2 s-au folosit la numerotarea unei cărți de 350 de pagini?

II. Consideram şirul următor:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

4p. a) Continuați acest şir scriind încă 11 termeni.

5p. b) Ce termen din şirul dat este pe locul 50?

III. 4p. a) Aflați numărul natural a, ştiind că:

$$2 \cdot a \cdot (a : a + a \cdot 0 + 0 : a) + a : 5 \times 5 - a \cdot 5 : 5 - 2 = 5 : 5 \cdot a$$

5p. b) Într-o clasă sunt 35 de copii. Ştiind că 2 din 7 elevi joacă şah, iar 3 din 5 joacă fotbal, puteți spune câți nu joacă nici şah nici fotbal? (Se ştie că niciun copil nu practică ambele sporturi simultan).

IV. 9p. Cu 16 ani în urmă, mamei îi mai trebuiau atâția ani, până să împlinească jumătate de secol, câți are astăzi în plus față de această vârstă.

Ce vârstă are mama mea acum?

Timp de lucru (1 ora şi 30 minute; la cerere, copii mai pot fi lăsați încă 30 minute). Fiecare problemă este obligatorie şi se punctează de la 1 la 10. (Se acorda 1 punct din oficiu.)

Concursul național de matematică ARHIMEDE
Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a V-a

I. Se considera numărul $a = 111222$.
3p. a) Să se arate că suma cifrelor numărului a este un pătrat perfect.
3p. b) Să se afle restul împărțirii lui a la 4.
3p. c) Să se scrie numărul a ca produs de două numere naturale consecutive.

II. 4p. **1.** Aflați cel mai mare număr natural de patru cifre distincte care are suma cifrelor 26 şi dacă înlocuim ultima cifra cu 7, obținem un număr cu 5 mai mare decât dacă înlocuim prima cifra cu 7.

L. Toderiuc

5p. **2.** Arătați că nu există x şi y numere naturale astfel încât:

$$x^2 - 3 \cdot y^2 = 17.$$

III. Se consideră numărul $n = 10^{2007} + 2$.
4p. a) Arătați că n este multiplu de 3.
5p. b) Aflați câtul împărțirii lui n la 3.

N. M. Goşoniu

IV. Fie $A = 9 + 98 + 997 + \ldots + \underbrace{999...9}_{97 \text{ ori}}01 + \underbrace{999...9}_{98 \text{ ori}}00$.
3p. a) Scrieți primii doi şi ultimii doi termeni sub forma $10^n - n$, $n \in \mathbf{N}^*$.
6p. b) Câte cifre de 1 conține scrierea în baza zece a numărului A?

Liviu Oprişescu

Timp de lucru 2 ore (la cerere: 2 ore şi 30 de minute).Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se va face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE

Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a VI-a

I. Fie a, b, c trei numere raționale direct proporționale cu numerele 3, 4, 5.

3p. a) Să se calculeze valoarea raportului $\frac{a+b}{b+c}$.

3p. b) Să se arate că b este media aritmetica a numerelor a şi c.

3p. c) Să se determine numerele a, b, c dacă $2 \cdot a + 3 \cdot b = 72$.

Cristina Godeanu

II. Fie $x \in \mathbf{N}^*$ şi y cel mai mare număr natural care împărțit la $x + 1$ dă câtul x.

3p. a) Pentru $x = 7$, să se determine y.

3p. b) Dacă y nu este divizibil cu 3, să se arate că $x + 1$ este divizibil cu 3.

3p. c) Să se determine x, ştiind că $y = 255$.

Ştefan Smarandache

III. Se consideră $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$, astfel încât $(BC) \cap (DE) = \{T\}$. Să se demonstreze că:

4p. a) $\angle EDC \equiv \angle BCD$

5p. b) $AT \perp BD$

Cristian Olteanu

IV. 4p. a) Fie $n \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că există 2007 fracții ordinare, oricare două neechivalente, cuprinse între $\frac{1}{n}$ şi $\frac{2}{n}$.

5p. b) Să se afle cel mai mic număr natural n cu proprietatea că există 2007 fracții ordinare, oricare două neechivalente, cuprinse între $\frac{1}{n}$ şi $\frac{2}{n}$ şi care au suma o fracție ordinară subunitară.

Traian Preda

Timp de lucru 2 ore (la cerere: 2 ore şi 30 de minute). Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se va face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE

Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a VII-a

I. Numerele naturale *a, b, c* verifică simultan condițiile:

$$\frac{5\cdot a+2\cdot b-3}{2\cdot a+7\cdot b-4}=\frac{3}{4} \text{ şi } \frac{7\cdot a+c+3}{20\cdot a+17\cdot c+15}=\frac{1}{5}$$

5p. a) Să se arate că numerele *a, b, c* sunt direct proporționale cu numerele 52, 56, 65.

4p. b) Să se calculeze valoarea raportului $\frac{5\cdot a+2\cdot b}{7\cdot b+2\cdot c}$.

Ion Neață, Slatina

II. 4p. a) Arătați că: $\sqrt{17+8\cdot\sqrt{10+2\cdot\sqrt{730}}}>4\cdot\sqrt{5}$.

Godeanu Cristina

5p. b) Se consideră $a_1, a_2, ..., a_{2007}$ numere reale astfel încât $0\le a_1\le a_2\le ...\le a_{2007}$, cu $a_1+a_2+...+a_{2007}=2007$. Să se arate că:

$$2006\cdot a_1\cdot a_2+2007\ge 2007\cdot a_1+2006\cdot a_2$$

Liviu Oprişescu

III. Fie ΔABC un triunghi isoscel cu $AB\equiv AC$ şi *I* centrul cercului înscris în triunghi. Mediatoarea *d* a segmentului (*BI*) intersectează pe *BC* în *P*, iar $AI\cap d=\{T\}$. Demonstrați că:

4p. a) $m(\angle ABT)=90^o$;

5p. b) $IP=\frac{AB\cdot BC}{AB+BC+AC}$.

Petre Simion

IV. Fie *A, B, C* trei puncte coliniare în aceasta ordine. În acelaşi semiplan față de dreapta *AC* se considera punctele *M* şi *N*, astfel încât ΔABM şi ΔBNC să fie echilaterale. Se consideră punctul $P\in[AB]$. Să se demonstreze că:

4p. a) $MP+NP\ge AC$;

5p. b) $NP\ge CQ$, unde $NP\cap MB=\{Q\}$.

Traian Preda

Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE
Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a VIII-a

I. a) Descompuneti în factori:
2p. 1.) $(y+2)\cdot(y+5)+2$;
2p. 2.) $(a+1)\cdot(a+2)\cdot(a+3)\cdot(a+4)+1$.
2p. b) Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$E(X)=\frac{(X^2+X+2)\cdot(X^2+X+5)+2}{(X^2+X+3)\cdot(X^2+X+4)-2}\cdot\frac{X^2+X+5}{X^2+X+4}.$$

3p. c) Să se arate că nu există $n\in\mathbf{Z}$ pentru care $E(n)\in\mathbf{Z}$.

II. Să se demonstreze că:
2p. a) $2\cdot(x^2+y^2)\geq(x+y)^2, \forall x,y\in\Re$;
3p. b) $(a^2+b^2)\cdot(a^2+c^2)\cdot(b^2+c^2)\geq a\cdot b\cdot c\cdot(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c), \forall a,b,c\geq 0$.

Virgil Nicula, (rev. Arhimede)

4p. c) $\dfrac{a+b-2\cdot c}{c^2+a\cdot b}+\dfrac{b+c-2\cdot a}{a^2+b\cdot c}+\dfrac{a+c-2\cdot b}{b^2+a\cdot c}\geq 0$, ştiind că *a, b, c* sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Traian Preda

III. Fie $ABCD$ un patrulater convex, $\{O\}=AC\cap BD$ şi afirmațiile:
1. $AC\perp BD$
2. $AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$
3. $[AO]\equiv[CO]$ sau $[BO]\equiv[DO]$
4. $AB+CD=AD+BC$

Demonstrați că:
5p. a) afirmațiile 1 şi 2 sunt echivalente;
4p. b) din 1 şi 4 rezulta 3.

Georgeta Alexandrescu

IV. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ de muchie 1, *M, N, P, Q* mijloacele muchiilor $[A'B']$, $[BC]$, $[CD]$, respectiv $[NC]$, iar O_1, O_2 centrele fețelor $CDD'C'$, respectiv $A'B'C'D'$.
5p. a) Aflați distanța dintre dreptele MO_1 şi NP;
4p. b) Dacă E şi F sunt proiecțiile lui A, respectiv C' pe (MNO_1), respectiv $(B'QP)$, atunci $EF\perp CO_2$.

Marius Mâinea

Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE
Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a IX-a

I. 5p. a) Să se rezolve inecuația:

$$[x]^3 - (x-1)\cdot[x]^2 \leq 1 - \{x\}.$$

(Am notat aici cu $[x]$ partea întreagă a numărului x, iar cu $\{x\}$ partea fracționară a numărului x. Evident $x = [x] + \{x\}$.)

Aurel Doboşan

4p. b) Fie m, n două numere naturale. Dacă $m \geq 1, n \geq 1$, $n^3 \leq (m-1)\cdot m\cdot(m+1)$, atunci $(n+1)^3 < m\cdot(m+1)\cdot(m+2)$.

Dan Ştefan Marinescu, Viorel Cornea

II. Fie ABC un triunghi şi AM, BN, CP medianele sale.

4p. 1) Să se calculeze: $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}$.

5p. 2) Dacă $\left\|\overrightarrow{AM}\right\| + \left\|\overrightarrow{BN}\right\| + \left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \left\|\overrightarrow{AA'}\right\| + \left\|\overrightarrow{BB'}\right\| + \left\|\overrightarrow{CC'}\right\|$, unde AA', BB' şi CC' sunt bisectoarele triunghiului ABC, să se arate că triunghiul ABC este echilateral.

Diana Alexandrescu

III. Fie ecuația $a\cdot x^2 + b\cdot x + c = 0$, cu a, b, $c \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$.

4p. 1) Dacă a, b, c sunt impare, atunci ecuația dată nu poate avea rădăcini raționale.

5p. 2) Dacă a, b, $c \in \{0,1,2,...,9\}$, cu proprietatea că numărul $\overline{abc}$ este prim, atunci ecuația dată nu are rădăcini raționale.

Liviu Oprişescu

IV. 9p. Fie x un număr real şi $n \in \mathbf{N}^*$ cu proprietatea că $x + x^k \in Q, \forall k \in \{n, n+1\}$.
Să se demonstreze că $x \in \mathbf{Q}$.

Sorin Rădulescu, Mihai Piticari

Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE
Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a X-a

I. 4p. a) Să se arate că $2^x > x$ pentru orice $x \in \Re$.

5p. b) Să se rezolve ecuația $x + 2^x = \dfrac{x}{2^x}$.

Sorin Rădulescu, Adrian Troie

II. Să se calculeze:

3p. 1) $tg\left(2 \cdot arctg \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right), \quad x \in (0;1)$;

6p. 2) $a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$, unde $a_k = \dfrac{\arcsin \dfrac{\sqrt{2 \cdot k + 1}}{k+1}}{arctg \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot k + 1}}}, \quad k \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Mihail Bencze

III. Fie tetraedrul $[VABC]$ şi punctele $A' \in (AB), B' \in (BC), C' \in (CA)$, astfel încât:
$\dfrac{A'A}{A'B} = \dfrac{B'B}{B'C} = \dfrac{C'C}{C'A} = k > 0$, iar $VA' \perp VB' \perp VC' \perp VA'$.

5p. a) În cazul k = 1, să se demonstreze că muchiile $[VA]$, $[VB]$ şi $[VC]$ sunt congruente.

4p. b) În cazul $k \neq 1$ şi pentru VA = VB = VC, să se arate că unghiurile $\angle AVC, \angle BVC, \angle CVA$ sunt congruente.

Dan Popescu

IV. Fie A o mulțime de numere reale cu n elemente şi $f : A \to A$ cu proprietatea că:

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|, \ \forall x, y \in A, x \neq y.$$

Să se demonstreze că:

4p. 1) f nu poate fi bijectivă;

5p. 2) $g = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ ori}}$ este constantă.

Oana Nițulescu, Lavinia Savu

Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE
Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a XI-a

I. 4p. 1) Se consideră matricea $A \in M_2(\Re)$ cu proprietatea $\det(I_2 + A^2) = 0$. Să se calculeze det A.

5p. 2.) Fie $X, Y, Z \in M_2(\mathrm{N})$ cu proprietatea:

$$X \cdot Y - Z^2 = Y \cdot Z - X^2 = Z \cdot X - Y^2 = I_2.$$

Să se demonstreze că *X, Y* şi *Z* sunt inversabile.

Marius Mâinea

II. Se consideră o funcție $f : \Re \to \Re$ cu proprietatea:

$$f(x+1) \cdot f(x) + f(x+1) + 1 = 0, \forall x \in \Re.$$

Demonstrați că următoarele afirmații sunt echivalente:

5p. 1) Ecuația $f(x) = -1$ nu are soluții în $\Re$.

4p. 2) *f* nu este continuă.

Marcel Chiriță

III. 5p. 1) Fie $A \in M_n(\Re), A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ cu $a_{ij} = \begin{cases} 1, daca & i \neq j \\ 2, daca & i = j \end{cases}$

Calculați det A şi A^{-1} în cazul $n \in \{3,4\}$.

Aurel Doboşan. Trandafir Bot

4p. 2) Fie $A, B \in M_2(Z)$ cu proprietatea că $AB + BA = I_2$. Să se demonstreze că: $\det\left[(AB)^n + (BA)^n\right]$ este pătrat perfect pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

Marius Drăgan

IV. 9p. Să se determine toate funcțiile monotone surjective $f : \Re \setminus Q \to Q$.

Sorin Rădulescu, Ion Savu

Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.

Concursul național de matematică ARHIMEDE

Ediția a IV-a, etapa a II-a, 17 martie 2007

Clasa a XII-a

I. 4p. 1) Să se demonstreze că:

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int_{1}^{2} \frac{dy}{y \cdot \sqrt[4]{1+y^4}}.$$

5p. 2) Să se calculeze: $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

I.V. Maftei

II. Să se rezolve ecuațiile:

4p. 1) $x^2 = x$ în Z_{20};

5p. 2) $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{9} & \hat{2} \\ \hat{7} & \hat{9} \end{pmatrix}$ în $M_2(Z_{11})$.

Costel Chiteş, Adrian Stoica

III. 4p. 1) Să se calculeze $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$.

5p. 2) Să se determine $a, b \in \Re$, cu proprietatea:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n^2}{(n+1)^2} + \frac{n^2}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{n^2}{(n+n)^2} + a \cdot n + b \right] = 0.$$

Marcel Chiriță

IV. 9p. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel şi $a, b \in A$. Să se arate că dacă:

$x^3 + a \cdot x^2 + b \cdot x = 0_A, \forall x \in A$, atunci inelul $(A,+,\cdot)$ este comutativ.

Sorin Rădulescu, Petruş Alexandrescu

Timp de lucru 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii. Notarea se face de la 1p la 10p. Fiecare subiect primeşte 1p din oficiu.